Université Paris-Sud 2016-2017
L2/S4 M204 Mathématiques : Algèbre

Feuille d'exercices n^{0}5

Exercice 1

1. Factoriser le polynôme $X^2 + i\sqrt{3}X - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser le polynôme $X^4 - X^2 - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Factoriser le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{Q}[X]$.
4. Factoriser le polynôme $X^4 + 2X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{Q}[X]$.
5. Soit $a \in]0, \infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser le polynôme $X^n - a$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ et en déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} sin(\frac{k\pi}{n})$.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser le polynôme $P = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}$.

Exercice 3
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Le polynôme P a-t-il une racine multiple ?

Exercice 4
Soit $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé.

1. Montrer que Q' est scindé. Cette propriété est-elle valable dans $\mathbb{Q}[X]$?
2. Montrer que, si $a \in \mathbb{R}^*$, alors $Q' - aQ$ est scindé (on pourra étudier la fonction $x \longrightarrow Q(x)e^{-ax}$ et noter qu'elle tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$).
3. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $a_0Q + a_1Q' + \ldots + a_nQ^{(n)}$ est scindé (on pourra considérer l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\delta(H) = H'$ et calculer $(P(\delta))(Q)$).

Exercice 5
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes.

1. $\frac{X^5+1}{X^2(X-1)^2}$
2. $\frac{X^4+X+1}{X(X^2+1)^3}$
3. $\frac{X^2}{(X-1)(X^2-X+1)^2}$
4. $\frac{X^4}{X^3-1}$

Exercice 6
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$: $F(X) = \frac{3X^2+3X-1}{(X^2+1)(X+2)^2}$ et $G(X) = \frac{X^n}{X^n-1}$.

Exercice 7
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{Q}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{3X^2-5}{(X^4-2)(X^2+1)}$.

Exercice 8
Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé et ayant des racines simples.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P''(x)P(x) \leq (P'(x))^2$ (on pourra utiliser la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$). En déduire que $a_0a_2 \leq a_1^2$.
2. Montrer que, pour $k \in [[1, n-1]], a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 9 (Théorème de Gauss-Lucas)
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2. Notons $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ses racines (non nécessairement distinctes), et α une racine de P'.

1. Supposons que α n'est pas une racine de P. Montrer qu'il existe des réels $(m_i)_{1\leq i\leq n}$ strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n m_i(\alpha - z_i) = 0$ (on pourra utiliser la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$).
2. On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ (par la bijection $z = x+iy \mapsto (x, y)$). Soit D une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$, supposons que toutes les racines de P sont d'un même côté de D. Montrer que les racines de P' sont aussi de ce même coté de D.
3. Supposons que toutes les racines de P sont dans un disque de centre γ et de rayon r. Montrer qu'il en est de même des racines de P'.

Exercice 10
On considère le groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. (On rappelle que c'est un groupe pour la loi $\circ$.)

a) Montrer que $\mathcal{S}_3$ contient exactement trois sous-groupes de cardinal 2 que l'on notera $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$.

b) Montrer que $\mathcal{S}_3$ contient un et un seul sous-groupe de cardinal 3 que l'on notera $\mathcal{C}$.

c) Que peut-on dire des $\mathcal{C} \cap \mathcal{T}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$?

Exercice 11 *a*) Calculer les produits suivants de permutations dans $\mathfrak{S}_3$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer les produits suivants de permutations dans $\mathfrak{S}_4$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} ;$$

c) Calculer les produits suivants de permutations dans $\mathfrak{S}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} ;$$

Exercice 12 1. Dans le groupe $\mathfrak{S}_5$, calculer les produits de permutations suivants :

(a) $(12345)^{-1}(345)(12345)(345)^{-1}$;

(b) $(12)(34)(213)(12)(34)$.

2. Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$, calcuer les produits de permutations suivants et donner leur décomposition en produits de cycles disjoints :

   (a) $(521364)(243)$;

   (b) $(213)(1325)(46)$

3. Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$, calculer les produits de permutations suivants, puis décomposer en produit de transposition :

   (a) (1342);

   (b) $(132)(314)$;

   (c) $(13240)(2413)(4132)$.