FEUILLE D'EXERCICES N°4

Arithmétique des polynômes

Exercice 1
Soient $A = X^6 + 1$ et $B = X^4 + X^3 + X - 1$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer leur pgcd D et trouver tous les polynômes U et V tels que $UA + VB = D$.

Exercice 2
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 tels que $P(X)+2$ soit divisible par X^3+X+1 et $P(X) - 2$ divisible par $X^3 - X + 1$.

Exercice 3
Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$ divise $(X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1$.

Exercice 4
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul. Si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle non nulle de P (avec p et q premiers entre eux), montrer que q divise le coefficient dominant de P et que p divise le coefficient constant de P. En déduire que le polynôme $3X^3 + X - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 5
Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 1, et d leur pgcd.

1. Supposons que $z \in \mathbb{C}$ vérifie $z^m = z^n = 1$. Montrer que $z^d = 1$. En déduire que le pgcd de $X^m - 1$ et de $X^n - 1$ est égal à $X^d - 1$.
2. Supposons $m \geqslant n$, et notons r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que le reste de la division de $X^m - 1$ par $X^n - 1$ est $X^r - 1$. Retrouver le résultat de la première question.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
   (a) Quel est le pgcd de $P^m - 1$ et de $P^n - 1$?
   (b) Montrer que, si m et n sont premiers entre eux, alors $(P^m - 1)(P^n - 1)$ divise $(P - 1)(P^{mn} - 1)$.
4. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m et n pour que $1 + X^q + \ldots + X^{qn}$ divise $1 + X^q + \ldots + X^{qm}$?

Exercice 6
Soient L un corps et K un sous corps de L (par exemple $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), et soient P et Q deux polynômes de $K[X]$. Montrer que le pgcd de P et Q dans $K[X]$ est égal au pgcd de P et Q dans $L[X]$.

Idéaux, anneaux principaux

Exercice 7
Soit A un anneau commutatif. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que les ensembles $I \bigcap J$ et $I + J = \{i + j : (i, j) \in I \times J\}$ sont des idéaux de A.

Exercice 8
Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle *radical* de I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ et un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Si $A = \mathbb{Z}$ et $I = n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$, trouver explicitement $\sqrt{I}$.

Exercice 9
Dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$, trouver le pgcd de:

1. 99 et 77;
2. $-8i$ et $3 + 5i$;
3. $1 + 7i$ et 15.

Exercice 10
Dans cet exercice, on se place dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

1. Montrer que 3 est un élément irréductible, mais 5 n'est pas irréductible.
2. Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, on définit $N(z) = |z|^2$. Montrer que $N(z) \in \mathbb{N}$ et que $N(zz') = N(z)N(z')$.
3. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $N(z) = 1$.
4. En déduire l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
5. Montrer que si $N(z)$ est un nombre premier, alors z est un élément irréductible. L'inverse est-t-il vrai?
6. Montrer qu'il y a exactement 2 facteurs irréductibles de 5, que l'on déterminera.
7. Décomposer le nombre 45 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 11
Dans cet exercice, on se place dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

1. Montrer que cet anneau est un anneau euclidien (c'est-à-dire, trouver une jauge euclidienne).
2. Trouver le pgcd de $7 + \sqrt{-2}$ et 6.
3. En imitant la méthode de l'exercice précédent, décomposer le nombre 45 en facteurs irréductibles.

Exercice 12
Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien, ainsi un anneau principal. Que peut-t-on dire de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$? Et l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$?