Université Paris-Sud | 2015-2016
L2/S4 M204 | Mathématiques : Algèbre

Feuille d'exercices n^{0}2

Exercice 1
Déterminez les restes des divisions euclidiennes suivantes:

1. 2^{17} divisé par 3 ;
2. 5^5 divisé par 7 ;
3. 111970 divisé par 9.

Exercice 2
Calculer les pgcd suivants : pgdc$(94, 267)$, pgdc$(106, 317)$, pgdc$(82, 519)$, pgdc$(9348, 1640)$, pgdc$(1050, 735)$, pgdc$(306, 198)$.

Exercice 3
Pour chaque couple (a, b) ci-dessous, démontrer que a et b sont premiers entre eux et construire une relation de Bézout de la forme $au + bv = 1$: $(a, b) = (25, 38)$, $(19, 54)$, $(18, 29)$, $(51, 148)$, $(94, 205)$, $(293, 107)$.

Exercice 4
a) Montrer que si a, b, q et r sont 4 entiers tels que $a = bq + r$, alors pgdc$(a, b) =$ pgdc(b, r).
b) En déduire :
(i) $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, pgdc$(15a + 4b, 11a + 3b) =$ pgdc(a, b).
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! + 1$ et $(n + 1)! + 1$ sont premiers entre eux.
(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+1} + 2^{n+1}$ et $3^n + 2^n$ sont premiers entre eux.

Exercice 5
Soit n un entier naturel strictement positif.

1. Montrer que $10^{n+1} - 9n - 10$ est divisible par 9.
2. On appelle u_n le nombre dont l'écriture décimale est 1...1 (avec n fois le chiffre 1). Exprimez u_n en fonction de n.
3. Calculez $u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n.
4. Déduisez-en que $10^{n+1} - 9n - 10$ est divisible par 81.

Exercice 6 (Application des congruences : la preuve par 9)
Rappelez en quoi consiste la *preuve par* 9 d'une opération (multiplication ou division) et justifiez cette procédure.

Exercice 7 (Application des congruences : Critères de divisibilité)
Rappelez comment on sait si un nombre est divisible par $2, 3, 4, 5, 9$ ou 11 sans effectuer la division et justifiez les critères énoncés.

Exercice 8
On se propose de montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons donc qu'il n'en existe qu'un nombre fini $u_1, \ldots, u_n$.
On pose $N = 4u_1u_2 \cdots u_n - 1$.

1. N peut-il être divisible par l'un des nombres $2, u_1, \ldots, u_n$?
2. Montrez que tous les diviseurs premiers de N sont de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Déduisez de 2) que N est congru à 1 modulo 4.
4. Aboutissez à une contradiction et concluez.

Exercice 9 *a*) Déterminer le reste de la division euclidienne de 90829109 par 7; par 9; par 11.

b) Soit n un nombre entier. Combien de valeurs peut prendre n^3 modulo 8?

c) Soit n un nombre entier. Combien de valeurs peut prendre n^2 modulo 4?

d) Montrer qu'il n'existe aucun couple d'entiers (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 1999$.

Exercice 10 *a*) Soit n un nombre entier. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 7 ?

b) Démontrer que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 2012$ n'admet pas de solutions entières.

Exercice 11 *a*) Soit n un nombre entier. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 7 ?

b) Déterminer toutes les solutions entières de l'équation $7x - 4y^3 = 0$.

Exercice 12
Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. Si a est divisible par b, alors a^2 est divisible par b^2.

b) Soient p un nombre premier et a un entier naturel non nul. Si x et y sont deux entiers vérifiant $ax \equiv ay$ $[p]$, alors $x \equiv y$ $[p]$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel au moins égal à 2. Si n n'est pas premier, alors il existe des entiers a, b premiers entre eux avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$ tels que $n = ab$.

Exercice 13 *a*) Soit n un nombre entier. Montrer que si n n'est pas divisible par 3, alors $n^2 \equiv 1$ $[3]$.

b) En déduire qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $x^2 - 3y^2 = 1970$.

Exercice 14
Quel est le dernier chiffre de $2009^{2010^{2011}}$? De $2007^{2008^{2009}}$?

Exercice 15
Les nombres suivants sont-ils des carrés (respectivement des cubes) : $2^3 5^2 7^4$; $2^4 7^6 11^2$; $2^6 3^3 5^3$?

Exercice 16
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:
a) $4x^2 - xy - 17 = 0$.
b) $3x^2 + xy - 11 = 0$.

Exercice 17
(a) Trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x-5$ divise $x+7$.
b) Trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x-4$ divise $x+9$.
c) Trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x+2$ divise $4x+6$.

Exercice 18
a et b sont-ils premiers entre eux pour (a,b)=(241,120), (2221,15), (721,13) et (346,12) ?

Exercice 19
a) Soit a un entier, dont le reste dans la division euclidienne par 12 est 7. Quel est le reste dans la division euclidienne de a par 3 ? Quel peut être le reste dans la division euclidienne de a par 48 ? et par 15 ?
b) Soit b un entier, dont le reste dans la division euclidienne par 3 est 2. Quel peut être le reste dans la division euclidienne de b par 12 ?

Exercice 20
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
a) $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.
b) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.
c) que $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 21
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :
a) $95x + 71y = 46$.
b) $20x - 53y = 3$.
c) $23x - 13y = 5$.
d) $10x - 3y = 2$.
e) $91x - 112y = 14$
f) $91x - 112y = 10$

Exercice 22
Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ le système $\left\{ \begin{array}{rcl} x+3y-4z & = & 6 \\ 2x+y-z & = & 10 \end{array} \right.$

Exercice 23
a) Montrer que si 8 divise $n-7$ alors n ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.
b) Montrer que si $a^3+b^3+c^3$ est un multiple de 7, l'un au moins des entiers a, b et c est un multiple de 7.

Exercice 24
Le but de cet exercice est de trouver l'ensemble des solutions entières n de l'équation

$$\mathrm{pgdc}(2n+8, 3n+15) = 6.$$

a) Montrer que si n est une solution alors $n \equiv 2 \bmod 3$ et $n \equiv 1 \bmod 2$.
b) Déduire de la question précédente un entier k tel que si n est une solution alors $n \equiv k \bmod 6$.
c) Montrer que pour tout a entier, $2a+3$ et $3a+5$ sont premiers entres eux (On pourra trouver une relation de Bézout).
d) Vérifier que si $n \equiv k \bmod 6$ alors n est une solution.

Exercice 25
a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, 6 divise $5n^3 + n$.
b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.

Exercice 26
Soient a et b deux entiers.
a) Montrer que $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ est divisible par 30.
b) Montrer que $ab(a^{60}-b^{60})$ est divisible par 2.3.5.7.11.13.31.61.

Exercice 27
Pour chaque paire d'entiers (a, b) donnée ci-dessous, calculer le pgcd de a et b par chacune des deux méthodes suivantes :

1. en utilisant l'algorithme d'Euclide (auquel cas on déterminera de plus un jeu de coefficients pour l'identité de Bezout);
2. en utilisant la décomposition en facteurs premiers de a et de b.

i) $a = 123\ 456$, $b = 654\ 321$;

ii) $a = 1\ 970$, $b = 217\ 362$;

iii) $a = 3\ 534$, $b = 540\ 903$;

iv) $a = 5\ 052$, $b = 32\ 098$.

Exercice 28
Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$ que l'on suppose premiers entre eux. Calculer le pgcd de ab et $a+b$.

Exercice 29
On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que l'on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers.

a) Montrer qu'il existe une telle écriture avec p et q premiers entre eux.

b) Montrer que 2 divise p^2, puis que 2 divise p.

c) Montrer que 2 divise q et aboutir à une contradiction.

Exercice 30
Soient a et b deux entiers.

a) Supposons que a et b soient premiers entre eux. Calculer leur ppcm.

b) On ne suppose plus maintenant que a et b sont premiers entre eux. Calculer le produit PGCD(a,b)PPCM(a,b).

Exercice 31
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}^2$.

a) $51x + 14y = 0$;

b) $51x + 21y = 1$;

c) $27x + 33y = 60$.

Exercice 32
Trouver tous les $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$5^{x^2+3x+9} \equiv 4 \mod 17.$$

Exercice 33

1. Résoudre le système de congruences suivant et en donner la plus petite solution positive :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & 3 \pmod 7 \\ x & \equiv & 4 \pmod 9 \end{array} \right.$$

2. Si x et y sont deux solutions de ce système, a-t-on $x - y$ divisible par 63? par 49?

Exercice 34

Résoudre les systèmes de congruences ci-dessous en utilisant l'une des deux méthodes suivantes :

a) en regroupant les équations par paires (pour chaque système);

b) en exploitant la linéarité du problème (une fois pour toutes).

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & \equiv & -3 & \pmod{11} \\ x & \equiv & 103 & \pmod{13} \\ x & \equiv & 3 & \pmod{15} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & \equiv & 25 & \pmod{11} \\ x & \equiv & 35 & \pmod{13} \\ x & \equiv & 31 & \pmod{15} \end{array}\right.$$

Dans chaque cas, déterminer la plus petite solution positive.