Université Paris-Sud **M204 2016/2017**

Devoir maison n°1

À rendre pour le 31 mars 2017

Exercice 1 : On note $\mathbb{A}$ le sous ensemble de $\mathbb{C}$ des éléments de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k(i\sqrt{2})^k$, pour n variant dans $\mathbb{N}$ et les a_k variant dans $\mathbb{Z}$.
1. Montrer que l'on a l'égalité $\mathbb{A} = \{a + b\,i\sqrt{2}\ ,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Puis montrer que $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif intègre, où les opérations $+$ et $\cdot$ désignent respectivement l'addition et la multiplication usuelles sur $\mathbb{C}$.

2. On considère A, B, C, D les points de $\mathbb{C}$ d'affixes respectives 0, 1, $1 + i\sqrt{2}$ et $i\sqrt{2}$. On note R le rectangle $ABCD$, et $\mathcal{R}$ l'ensemble délimité par R, c'est-à-dire l'ensemble $\{a + bi\sqrt{2}\ ,\ a, b \in [0, 1]\}$.

Déterminer la quantité :

$$\max_{M\in\mathcal{R}} \min\left(\|\overrightarrow{AM}\|, \|\overrightarrow{BM}\|, \|\overrightarrow{CM}\|, \|\overrightarrow{DM}\|\right).$$

3. En s'aidant éventuellement d'une représentation de $\mathbb{A}$ dans le plan complexe, déduire de la question précédente la quantité :

$$\max_{M\in\mathbb{C}} \min_{N\in\mathbb{A}} \|\overrightarrow{MN}\|.$$

4. Pour $z = a + bi\sqrt{2} \in \mathbb{A}$, on pose $j(z) = |z|^2 = a^2 + 2b^2$. Prouver que $\mathbb{A}$ est un anneau euclidien pour la jauge j.

5. Vérifier que, pour tous $z, z' \in \mathbb{A}$, on a l'égalité :

$$j(z \cdot z') = j(z) \cdot j(z')$$

et en déduire l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{A}$.

6. On considère $\mathbb{B}$ le sous-ensemble de $\mathbb{A}$ défini par : $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{A}\ ,\ j(z) = 17\}$. Après avoir explicité tous les éléments de $\mathbb{B}$ (qui sont au nombre de 4), prouver que chacun d'eux est irréductible.

Exercice 2 : À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 872 et de 156, puis résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$872 \cdot x + 156 \cdot y = 44$$

$$872 \cdot x + 156 \cdot y = 74$$

Exercice 3 : Donnons-nous $n \in \mathbb{N}$ dont l'écriture en base 10 est $\overline{n_r \ldots n_1 n_0}$ (c'est-à-dire que $n = \sum_{k=0}^{r} n_k 10^k$). On applique à n l'algorithme suivant :

(i) on regroupe les chiffres de n par paquets de trois chiffres en commençant par le chiffre des unités, que l'on somme pour obtenir un nouveau nombre m_1 (c'est-à-dire que $m_1 = \overline{n_2n_1n_0} + \overline{n_5n_4n_3} + \cdots = \sum_{k=0}^{r} n_k 10^{\overline{k}}$, où $\overline{k}$ désigne le reste de la division euclidienne de k par 3) ;

(ii) on répète le processus (i) jusqu'à obtenir un nombre à trois chiffres (au plus), que l'on note m_2 ;

(iii) on voit m_2 comme un nombre à trois chiffres, noté $\overline{abc}$; si a (respectivement b, c) est le plus petit des trois chiffres, on pose $m_3 = \overline{abc}$ (respectivement $m_3 = \overline{bca}$, $m_3 = \overline{cab}$) ;

(iv) on voit m_3 comme un nombre à trois chiffres, noté $\overline{abc}$, et on pose m_4 le nombre à deux chiffres $m_4 = (b-a)\cdot 10 + (c-a)$;

(v) on pose enfin $m_5 = 3 \cdot m_4$, qui est un nombre à trois chiffres (ou moins).

Donnez une condition nécessaire est suffisante sur les trois chiffres de m_5 pour que le nombre n considéré initialement soit un multiple de 37. On pourra s'aider du fait que $37 \cdot 27 = 999$.

Exercice 4 : On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 puis A^3, et en déduire que $\mathrm{I}_3 + A + A^2 + A^3 = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$. On pourra s'aider du fait que P possède 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$, à savoir -1, i et $-i$, et que le polynôme cherché ne dépend que du reste de la division euclidienne de n par 4.

3. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n. Parmi les groupes que vous avez pu rencontrer, donner celui qui est isomorphe au sous-groupe de $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$ engendré par la matrice A.