Feuille d'exercices 9
Le logarithme népérien

1. Expliciter en fonction des nombres $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$ les logarithmes suivants : $\ln 100$, $\ln 2430$, $\ln \dfrac{25}{24}$, $\ln \sqrt[3]{75}$.

2. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a l'inégalité : $\ln n! \leq n \ln n$.

4. Résoudre les inéquations :

a) $\ln |x| > 0$

b) $\ln(x-1) < 0$

c) $\ln(x^2 + 2x - 3) - 2\ln(x-1) \geq \ln 5$

d) $\ln \sqrt{x+1} + \ln \sqrt{x-1} \leq \dfrac{1}{2}$

5. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln \dfrac{3 + \cos x}{1 + x^2}$

b) $f(x) = \ln(x^3 \sqrt[5]{2 - \sin x})$

c) $f(x) = \sqrt{1 + \ln^2 x}$

d) $f(x) = \ln(\ln x)$

e) $f(x) = \ln |x|$

f) $f(x) = \ln |\cos x|$

6. Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

l'égalité n'ayant lieu que si $x = 1$. Appliquer l'inégalité précédente au réel $x = \sqrt[n]{e}$ pour montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

pour tout entier $n \geq 2$.

7. Démontrer que pour tout $x > -1$ on a l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

8. Calculer, à l'aide des développement limités, les limites des fonctions suivantes en 0 :

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - \sin x}{5\ln(1+x) + x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{3\tan x - \ln(1+4x)}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{\tan x^2}{x \ln(1 - 3x)}$

9. Calculer les limites des fonctions suivantes en 0^+ (ou en 0 si cela a un sens) :

a) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{\ln(1+x)}$

b) $f(x) = x \ln \dfrac{x}{x+4}$

c) $f(x) = x \ln \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + 2\sin x)}{\sin x}$

e) $f(x) = \sqrt{x} \ln^3 x$

f) $f(x) = (\ln x)\ln(x+1)$

10. Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

a) $f(x) = \ln x - \ln(x+1)$ b) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+3x+2)}{\ln x}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$ e) $f(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ f) $f(x) = \ln^5 x - \sqrt[3]{x}$

11. Soit $f :]\,0, +\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) En déduire que f se prolonge par continuité à droite en 0.
On notera f le prolongement. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

c) Déterminer les asymptotes et branches paraboliques de f.

d) Calculer f'. Etudier son signe.

e) Calculer f''. Etudier la convexité et la concavité de f.

f) Dresser le tableau de variation de f, donner l'allure de son graphe.

12. Soit $f :]\,0, +\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) En déduire que f se prolonge par continuité à droite en 0.
On notera f le prolongement. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?
Admet-elle une demi-tangente à droite en 0 ?

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

d) Calculer f' et f''. Etudier la convexité et la concavité de f.

e) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$. Déterminer le signe de f'.

f) Dresser le tableau de variation de f. Tracer son graphe.

Exercices supplémentaires

13. Etudier les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad g(x) = (\ln x)^2 \qquad h(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

14.

a) Montrer que si f est une fonction convexe sur un intervalle I, alors

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

pour tous $a,\ b \in I$.

b) Montrer que la fonction $f(x) = x \ln x$ est convexe sur l'intervalle $]\,0, +\infty\,[$. En déduire que pour tous $a,\ b > 0$ on a

$$(a+b) \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq a \ln a + b \ln b$$

c) Montrer que la fonction $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe sur l'intervalle $]\,1, +\infty\,[$. En déduire que pour tous $a,\ b > 1$ on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$