Feuille d'exercices 8
Bijections

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3$.

a) Tracer le graphe de f. La fonction f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$?

b) Montrer que f est une bijection de $[\,0, +\infty\,[$ sur l'intervalle $f\,(\,[\,0, +\infty\,[\,)$ que l'on déterminera.

c) On note g la fonction réciproque de cette bijection. Donner son expression explicite.
Tracer ensemble les graphes de f et g.

2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

a) Préciser son ensemble de définition D_f, dresser son tableau de variation et tracer son graphe.

b) Déterminer $f\,(D_f)$. Montrer que f est une bijection de D_f sur $f\,(D_f)$.

c) Déterminer sa fonction réciproque f^{-1} et tracer ensemble les graphes de f et f^{-1}.

3. On considère la fonction $f : [-1,\ 1\,] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 2 & \text{si } x \in [-1,\ 0\,] \\ -x - 2 & \text{si } x \in [\,0,\ 1\,] \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de f.

b) Montrer que f est une bijection de $[-1,\ 1\,]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

c) Déterminer sa bijection réciproque.

4. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$.

a) Montrer que f est une bijection de $]-1/2, +\infty\,[$ sur un ensemble que l'on précisera.

b) Déterminer la bijection réciproque.

5. Soit $I = [\,0,\ \pi/2\,[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}$.

a) Quel est le sens de variation de f ? Déterminer l'intervalle $f(I)$.
Montrer que f définit une bijection de I sur $f(I)$.

b) L'équation $f(x) = 2$ admet-elle des solutions dans I ? Si oui, combien ?

6. Soit $I =]\,0, +\infty\,[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{5x}$.

a) Calculer f' et étudier son signe.

b) Déterminer $f(I)$. La fonction f est-elle une bijection de I sur $f(I)$?

c) L'équation $f(x) = -1$ admet-elle des solutions dans I ? Si oui, combien ?
Mêmes questions pour l'équation $f(x) = 0$.

Exercices supplémentaires

7. Soit $I =]0, \pi/2[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$.

a) Calculer f'. Etudier son signe.
On pourra utiliser l'inégalité $\tan x < x + x\tan^2 x$, si $x \in I$: voir l'exercice 9 de la Feuille 5.

b) Déterminer $f(I)$.

c) La fonction f est-elle une bijection de I sur $f(I)$?

d) L'équation $f(x) = \pi/3$ admet-elle des solutions dans I ? Si oui, combien ?
Mêmes questions pour l'équation $f(x) = 1/3$.

8. Soit $f :]\,0,\ 1\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x}$.

a) Montrer que f est une bijection de $]\,0,\ 1\,[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que l'équation $f(x) = \dfrac{2}{\pi}$ admet dans l'intervalle $]\,0,\ 1\,[$ une solution unique α.

   i) Comparer α et $\frac{1}{2}$.

   ii) Comparer α et $\frac{1}{4}$.

c) Déterminer la bijection réciproque f^{-1}.
Indication : Pour $y \in f\,(\,]\,0,\ 1\,[\,)$ fixé, l'équation $y = f(x)$ conduit à une équation du second degré en x (dont les coefficients dépendent de y), résoudre cette équation et déterminer, parmi les deux racines, celle appartenant à $]\,0,\ 1\,[$.

9. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{\sin x}$ et l'intervalle $I = [\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi[$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

b) Préciser les signes de $\sin x$ et de $\cos x$ sur I. En déduire le signe de f' sur cet intervalle.

c) Déterminer $f(I)$.

d) Montrer que f est une bijection de I sur $f(I)$.

e) L'équation $f(x) = -9$ admet-elle des solutions dans I ? Si oui, combien ?

f) Mêmes questions pour l'équation $f(x) = -12$.