# Feuille d'exercices 7
# Le Théorème des valeurs intermédiaires

**1.** Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle indiqué :

a) $x^7 - x^2 + 1 = 0$ sur $[-2,\ 0\,]$ b) $\tan x = \dfrac{3}{2}\,x$ sur $\left]\,\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\,\right[$ c) $\sqrt[3]{x^3+6x+1} = 3x+2$ sur $\mathbb{R}$

**2.**

a) Montrer que l'équation $\dfrac{1}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{(x-2)^5} = 0$ possède dans $]\,1,\ 2\,[$ une solution unique.

b) Montrer que cette équation n'admet pas de solution dans les intervalles $]-\infty,\ 1\,[$ et $]\,2,\ +\infty\,[$ (on pourra utiliser un tableau de signes).

**3.**

a) Montrer que l'équation $x^3 - 3x - 3 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[\,2,\ 3\,]$.

b) En donner (par balayage ou dichotomie) un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à $10^{-1}$.

**4.** On considère l'équation $x = \cos x$.

a) Montrer que toute solution appartient nécessairement à l'intervalle $[\,0,\ 1\,]$.

b) Montrer l'existence et l'unicité de la solution.

c) En donner des valeurs approchées par défaut et par excès à $10^{-1}$ près, puis à $10^{-2}$ près.

**5.**

I) Soit la fonction $P(x) = x^3 + x + 1$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $P(\alpha) = 0$.

b) Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$.

II) Soit la fonction $f(x) = 6x^5 + 10x^3 + 15x^2 - 30$.

a) Calculer $f'$. Etudier son signe en fonction de $\alpha$.

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

**6.**

I) Soit la fonction $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b) Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$.

II) Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

a) Préciser $D_f$. Calculer $f'$ et dresser le tableau de variation de $f$ (On utilisera les résultats de la partie I).

b) Etudier les asymptotes à $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$ ainsi que la position du graphe de $f$ par rapport aux asymptotes (on pourra écrire $x^3+1=(x^2+1)(\alpha x+\beta)+\gamma x+\delta$).

c) Tracer le graphe de $f$.

## Exercices supplémentaires

**7.**

a) Montrer que la fonction $P(x)=2x^3-3x^2-1$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $\alpha$.
Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$.

b) Faire l'étude complète de la fonction $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$.

**8.** Soit la fonction $f(x)=x\sin x+\cos x$.

a) Calculer $f'$. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[\,0,\ 2\pi\,]$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[\,\pi/2,\ 3\pi/2\,]$.

c) Montrer que $\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\pi$.

**9.**

I) Soit $P(x)=-x^3+3x-6$.

a) Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-\infty,-1\,]$ une solution unique $\alpha$.

b) Montrer que $-3<\alpha<-2$, puis donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$.

c) Dresser le tableau de variation de $P$.

d) En déduire que $\alpha$ est l'unique racine réelle de $P$.

II) Soit la fonction $f(x)=\dfrac{3-x^3}{x^2-1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f$ ainsi que les limites de $f$ aux extrémités de son ensemble de définition.

b) Calculer la dérivée de $f$, étudier son signe. Dresser le tableau de variation de $f$.

c) Déterminer les asymptotes à $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$, étudier la position du graphe de $f$ par rapport aux asymptotes (on pourra écrire $3-x^3=(x^2-1)(\alpha x+\beta)+\gamma x+\delta$ ).

d) Donner l'allure approximative du graphe de $f$.