Feuille d'exercices 6
Equations différentielles et primitives : premiers exemples

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes, puis donner la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 3$:

a) $y'(x) = \cos x$ b) $y'(x) = x^3$ c) $y'(x) = 5\cos x - 2x^3$

2. Déterminer (sur des intervalles que l'on précisera) :

a) $\displaystyle\int (-2x^5 + 3x)\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{6}{x^3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\,dx$

d) $\displaystyle\int (2 - \tan^2 x)\,dx$ e) $\displaystyle\int x^2 \sin x^3\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{7x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \cos^5 x \sin x\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+3)^4}\,dx$ i) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{2+\sin x}\,dx$

3. Résoudre, sur des intervalles que l'on précisera, les équations différentielles suivantes, puis donner pour a) et b) la solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$:

a) $y''(x) = \cos 7x$ b) $y''(x) = \dfrac{1}{(x-1)^6}$ c) $y''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''(x) + 2y(x) = 0$. Préciser la période des solutions.

b) Donner la solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = -1$ et $y'(0) = 1$.

5. On considère le problème

$$(P) \quad \begin{cases} y''(x) + 12y(x) = 0 \\ y(0) \ = 1/2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Chercher la solution de (P) sous la forme $y(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$.

6. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) + 16y(x) = 5$$

a) Chercher une solution constante de l'équation.

b) Déterminer toutes les solutions de l'équation.

7. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) + 16y(x) = x^2$$

a) Chercher une solution particulière de l'équation de la forme $y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

b) En déduire toutes les solutions de l'équation.

8. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) + 16y(x) = \cos 3x$$

a) Chercher une solution particulière de l'équation de la forme $y_2(x) = \alpha \cos 3x$.

b) Déterminer toutes les solutions de l'équation.

9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''(x) + 16y(x) = 3x^2 - 4\cos 3x$