Feuille d'exercices 5
Etude de fonctions

1. Déterminer les asymptotes à f et la position du graphe par rapport aux asymptotes. Pour c) on pourra écrire $x^2 - 3x + 5 = (x+2)(ax+b) + c$.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$ b) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x+2}$

2. Déterminer les asymptotes à f en $+\infty$ et en $-\infty$ (*on pourra utiliser un DL en* $\dfrac{1}{x}$).

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ b) $f(x) = \sqrt[5]{x^5 + x^4}$ c) $f(x) = x\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{-2013}$

3. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier sa continuité.

b) Calculer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 1^- et 1^+.

c) Déterminer les asymptotes à f, étudier la position du graphe par rapport aux asymptotes. On pourra écrire $x^2 + 2x + 6 = (x-1)(ax+b) + c$.

d) Etudier la dérivabilité de f, calculer sa dérivée.

e) Dresser le tableau de variation de f, déterminer ses extrema locaux et tracer son graphe.

4. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

a) Déterminer son ensemble de définition. Etudier sa continuité.

b) Déterminer les asymptotes à f (*utiliser un DL en* $\dfrac{1}{x}$ *ou bien la Prop. 5.1.4 du Cours*).

c) Préciser les points où les formules de dérivation garantissent l'existence de la dérivée de f. Calculer cette dérivée.

d) Compléter (à l'aide de la définition de dérivée) l'étude de la dérivabilité de f.

e) Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.

5. Compléter l'étude de la fonction $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ (Feuille 4, exercice 10).

[suite page suivante]

6. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

a) Déterminer son ensemble de définition. Etudier sa parité et sa périodicité.

b) Etudier la continuité de f. Déterminer ses asymptotes.

c) Etudier la dérivabilité de f, calculer sa dérivée.

d) Dresser le tableau de variation de f, déterminer ses extrema locaux et tracer son graphe.

7.

a) Montrer que la fonction $f(x) = x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $x > \sin x$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer (en étudiant les variations d'une fonction) que $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x > 0$.

8.

a) Montrer, en étudiant le sens de variation d'une fonction, que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ si $x \geq 0$.

b) En déduire que $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}$ pour tout $x \geq 0$.

9. Montrer que, pour tout $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$, on a l'inégalité :

$$\tan x \leq x + x \tan^2 x$$

Exercices supplémentaires

10. Etudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-4}$ b) $g(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$ c) $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$