Feuille d'exercices 11
L'intégrale

1. Déterminer :

1) $\displaystyle\int 5e^{-3x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx$ 3) $\displaystyle\int xe^{3x^2-1}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+5}\,dx$ 5) $\displaystyle\int 3^x\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$ 7) $\displaystyle\int \tan x\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$ 10) $\displaystyle\int \frac{1}{3+e^{-x}}\,dx$

2. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 (4-3x)^5\,dx$ 2) $\displaystyle\int_2^6 \frac{1}{(2x+5)^3}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^3 x\,dx$

5) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{2x+1}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x e^{\cos x}\,dx$ 7) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ 8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$

9) $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x}{(x^2+5)^2}\,dx$ 10) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ 11) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^7 x}\,dx$ 12) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

3. Déterminer :

1) $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^x\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}(x^2-x)\,dx$ 3) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$ 4) $\displaystyle\int (x^2+3x-5)\ln x\,dx$

5) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ 7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ 8) $\displaystyle\int (x^2-3x)\sin 2x\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ 10) $\displaystyle\int_2^3 \ln x\,dx$ 11) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$ 12) $\displaystyle\int_a^b e^x\sin x\,dx$

4. Soient les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par $a(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$ et $b(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$.

a) Tracer les graphes de $t\to\dfrac{1}{t^2}$ et $t\to\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
Donner l'interprétation géométrique des fonctions a et b.

b) Déterminer l'expression explicite des deux fonctions.

c) Calculer leurs limites en 0^+ et $+\infty$

5. *On ne cherchera pas à calculer la primitive intervenant dans cet exercice.*

a) Soit $a > 0$ donné. Exprimer en fonction de a, le maximum et le minimum sur l'intervalle $[a, 2a]$ de la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + t^3}$.

b) En déduire que

$$\frac{1}{4a + 8a^2} \leq \int_a^{2a} \frac{dt}{t^2 + t^3} \leq \frac{1}{a + a^2}$$

On définit maintenant la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2 + t^3}$.
Déduire de la question précédente $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

6. A l'aide d'un encadrement de l'intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer), déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{6 + t^2}\, dt$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$

7. Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -t + 2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

a) Tracer le graphe de f et donner l'interprétation géométrique de F.

b) Déterminer l'expression explicite de F.

c) Déterminer F' et F''. Etudier la concavité et convexité de F, tracer son graphe.