PCSO
COURS D'ANALYSE
Chapitre 1: Inégalités

Orsay 2012 – 2013

Avant-Propos

Le cours au tableau, le poly et les séances de travaux dirigés

Tout au long de l'année, un polycopiés illustrera chaque chapitre du cours d'Analyse. Le cours au tableau donnera les repères basiques pour introduire un sujet et vous permettre de traiter les exercices correspondants. Nous consacrerons seulement 1 heure en moyenne par semaine au cours.

C'est donc dans le poly que vous trouverez une présentation ordonnée et exhaustive de chaque chapitre. Sa lecture est un complément indispensable du cours au tableau. Les étudiants qui ont plus de difficultés peuvent sauter les démonstrations. Le symbole « ✘ » marque les résultats particulièrement importants pour les applications. Enfin, le mot *« Compléments »* désigne les parties hors programme, réservées aux lecteurs plus motivés.

Vous devez chercher les exercices proposés avant la séance où ils seront corrigés. Chaque fois qu'un exercice vous pose des problèmes, revenez à la partie du cours correspondante, vérifiez que les définitions, théorèmes et exemples ont été bien compris. Rien ne remplacera jamais ce travail personnel, même si vous « séchez ».

Après les séances de cours et td consacrées à un thème, vous devez être capable de fournir une rédaction rigoureuse des exercices correspondants sans consulter vos notes. L'impression d'avoir compris la solution d'un exercice corrigé en td est trompeuse et ne vous permettra pas de réussir un exercice analogue posé dans un contrôle.

Cours et exercices s'éclairent mutuellement. Plusieurs allers-retours entre le cours et les applications seront nécessaires pour une bonne compréhension : il est illusoire de prétendre tout comprendre immédiatement.

Précisons sans plus tarder le

Programme du Cours d'Analyse

1. Inégalités.
2. Généralités sur les fonctions.
3. Limites, continuité.
4. Dérivées.
5. Etude de fonctions.
6. Premiers exemples d'équations différentielles.
7. Fonctions continues sur un intervalle.

8. Bijections.
9. Le logarithme népérien.
10. L'exponentielle.
11. L'intégrale.

Vous trouverez dans les cours d'Analyse et Géométrie du tronc commun toutes les notions mathématiques nécessaires pour la Physique.

Cependant, ces cours ne sont pas conçus comme des « formulaires » ou des « boîtes a outils » pour les autres disciplines scientifiques, mais comme de véritables cours de mathématiques, ce qui est, d'ailleurs, la meilleure façon de servir les autres sciences.

Un exemple : il est utile et nécessaire de connaître la formule de dérivation $\left(x^3\right)' = 3x^2$, mais pour trouver toute la richesse de la notion de dérivée il faut partir de sa définition mathématique. Sans vous confronter à cette définition, vous ne comprendrez pas la notion physique de vitesse instantanée, ni pourquoi les équations différentielles sont si fréquentes en sciences. A ce propos, évoquons

Le but de la PCSO

La PCSO est une formation encore « généraliste » qui, à partir de votre niveau actuel, cherche à vous donner des bases solides dans toutes les disciplines scientifiques fondamentales, en particulier en mathématiques.

Sur le tronc commun s'articulent deux options (« Sciences de la Vie » et « Maths - Chimie - Physique ») pour mieux préparer vos projets professionnels. Mais ne confondez pas ces projets avec ce que vous faites cette année, ne brulez donc pas les étapes : vous n'êtes pas dans une prépa pour la filière médicale ou autre...

Vous n'êtes pas non plus dans un module de « remise à niveau » destiné à vous donner la formation d'un élève de Terminale S : notre Diplôme Universitaire ne prépare pas le Bac S.

Par les contenus et le style d'enseignement, la PCSO se situe entre le niveau du lycée et celui d'un premier cycle universitaire, elle vise à vous mettre en mesure de suivre avec succès un enseignement scientifique de type licence.

Le style des maths en PCSO

On abandonnera en mathématiques le style scolaire du lycée, qui privilégie souvent les résultats et l'application de recettes au détriment de la compréhension et de la qualité des raisonnements. Vous devez aller vers

- La précision dans le vocabulaire et la manipulation des concepts.
- La justification de vos affirmations et des étapes d'un calcul à partir des théorèmes du cours.

Une rédaction floue ou approximative vous empêche de développer le sens critique et de corriger les erreurs, elle rend très vite inexploitables vos calculs.

Le chemin pour arriver à un résultat est aussi important que le résultat lui-même : formules et calculs ne peuvent pas apparaître sans articulation logique ni justification par le langage. C'est la pertinence et la clarté du discours qui valide le résultat.

Il semble nécessaire maintenant de prendre un peu de hauteur et d'évoquer rapidement quelques qualités que vous devez développer si vous voulez réussir la PCSO et des études universitaires :

Les traits de la maturité

1. L'autonomie, la capacité d'initiative.

L'assimilation des connaissances demande une participation active de l'étudiant. Vous devez « investir le terrain » : jouer avec les objets mathématiques, explorer les théorèmes, exemples et exercices, vous perdre et sécher... apprendre à partir de vos erreurs, réaliser que parfois on est loin d'avoir compris, faire l'expérience des impasses et des chemins multiples vers la solution d'un problème.

Vous devez vous défaire de toute mentalité d'« étudiant-client » ou d'« étudiant-assisté » : ne pas attendre que tout soit explicité, résolu... L'enseignant n'est pas là pour vous donner la solution d'un exercice, mais pour vous aider à la trouver par vous-même.

Nous ne serons pas en mesure de vous aider avec efficacité si vous ne dépassez pas le trop global « je n'ai rien compris » : il faut cibler les difficultés à partir d'un travail personnel et ne pas hésiter alors à poser des questions précises, même si elles vous paraissent basiques.

2. La capacité de remise en question.

Il ne s'agit pas de se « démolir », mais d'exercer une autocritique bienveillante et constructive sans laquelle vous n'avancerez pas.

Prenez très au sérieux les remarques et conseils que les enseignants ne manqueront pas de vous adresser à titre individuel : il est essentiel de déraciner très vite toutes sortes de mauvaises habitudes (de comportement, raisonnement ou travail...) qui peuvent gêner votre progression.

Passez en revue régulièrement les « fondamentaux » : assiduité, participation en cours et td, quantité et qualité du travail personnel...

Attention enfin aux arguments faciles qui évacuent toute responsabilité individuelle : « le cours était très difficile, le groupe a lâché » ou « de toutes façons, personne ne comprend rien à ce cours »... Vous remarquerez que, dans ce groupe qui « a lâché », il y a des étudiants qui ont parfaitement réussi : prenez-les comme référence.

3. La souplesse, la capacité d'adaptation à l'environnement académique. L'ouverture intellectuelle.

Vous intégrez un Diplôme Universitaire : le programme, le calendrier, le style d'enseignement, le niveau des épreuves de chaque matière sont conçus dans un but précis (nous l'avons déjà évoqué) : ils ne sont pas « négociables ».

Cherchez donc à vous adapter au cursus proposé, jouez le jeu et restez ouverts et positifs : ce sera plus enrichissant (et amusant) que la fermeture et vous procurera un réel plaisir dans la pratique de chaque discipline.

L'ouverture intellectuelle est un état d'esprit essentiel si vous voulez faire des études supérieures. Soyez réceptifs aux contenus de chaque matière et souples pour intégrer des éclairages nouveaux, des façons de faire très différentes de ce qui vous avez connu au lycée.

4. La capacité d'engagement.

Vous travaillez votre cours ou un exercice, à la maison ou à la faculté : êtes-vous concentré ? êtes-vous « présent » à ce que vous faites ? impliqué ? êtes-vous là à 100%, sans réserves ? mobilisez-vous toutes vos réssources ?

Ces questions vous aideront à évaluer votre capacité d'engagement, mais on pourrait évoquer aussi à ce propos : la générosité dans l'effort, l'oubli de soi... et, dans un autre plan : la gestion du « long terme », l'endurance, la capacité de travail.

Il n'y aura pas de réussite en PCSO, ni plus tard, sans un engagement très fort de votre part.

Bien que différent, l'engagement est très lié à la motivation, mais aussi à l'ouverture intellectuelle, à l'envie de comprendre et de connaître. Il est clair que si vous avez un projet professionnel défini (mieux encore : une vocation affirmée) alors vous serez plus motivé, plus fort face aux difficultés d'un cursus, plus engagé...

5. Le travail sur les émotions.

Beaucoup d'étudiants sont victimes d'une grande fragilité émotionnelle : on panique à l'approche d'un examen, on manifeste des phobies ou des angoisses à l'égard d'une matière où d'un point précis du programme, on ne peut pas s'extraire des polarités affectives fortes « j'adore/ je déteste », on vit les difficultés sous le mode de l'agacement... et, en fin de compte, on perd ses moyens.

Les mathématiques focalisent beaucoup de réactions « épidermiques » de crispation et fermeture, sans doute liées à des étapes délicates de la scolarité.

Face à une situation perçue comme difficile, on peut s'énerver ou se mettre en colère, mais aussi rester paralysé, ou encore tomber dans un abattement profond... S'installer durablement dans ces états « émotionnels » ne vas pas résoudre un conflit : il faudra reprendre ses esprits et évaluer le problème avec calme et distance.

Les émotions font partie de l'être humain, mais il existe d'autres niveaux dans la personne et on ne peut que vous encourager à « monter quelques étages » pour atteindre des régions plus stables de votre esprit, à l'abri des aléas de l'existence, où la raison puisse se déployer dans la sérénité.

Il y a beaucoup de techniques pour maîtriser les émotions : travail urgent pour certains, car un cursus académique est riche en situations de stress et d'extrême difficulté.

Cette énumération des facettes de la maturité n'est pas exhaustive (par exemple, il est indispensable d'entreprendre une réflexion éthique sur vos relations avec les enseignants et avec vos camarades, sur la façon de créer une bonne dynamique de travail et d'entraide dans votre groupe...).

La taille de notre module et la disponibilité des enseignants rendent possible un enseignement de qualité et un encadrement personnalisé. N'hésitez pas à faire part à vos enseignants de vos problèmes et remarques.

Je vous remercie pour l'intérêt que vous avez consacré à ces lignes. Bon courage à tous !

José Montesinos

Table des matières

Chapitre 1

Inégalités

1.1 Ensembles de nombres

Rappelons les notations correspondantes aux principaux ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$ note l'ensemble des nombres naturels : $\mathbb{N} = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\ \}$

On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers : $\mathbb{Z} = \{\ \ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\ \}$

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\ \right\}$

On a les inclusions suivantes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

On peut situer ces nombres sur une droite : il suffit de choisir une origine (qui représentera le nombre 0), une unité de longueur et un sens de parcours (généralement de gauche à droite). On parle alors de la « droite numérique » : le nombre rationnel x est représenté par le point d'abscisse x sur la droite.

La question suivante se pose alors : tout point de la droite numérique a-t-il pour abscisse un nombre rationnel ? La réponse est non : on peut construire un carré dont le côté a pour longueur 1 ; la diagonale de ce carré a une longueur ℓ qui vérifie $\ell^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ (Th. de Pythagore). Il suffit de reporter cette longueur sur la droite pour déterminer un point d'abscisse ℓ. Or $\ell \notin \mathbb{Q}$ car on peut montrer qu'il n'y a pas de nombre rationnel dont le carré soit 2.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est « dense » dans la droite : dans tout voisinage V_p d'un point donné p de la droite numérique on peut trouver un rationnel (et donc une infinité). En particulier, p est la limite d'une suite numérique de rationnels. Cependant, $\mathbb{Q}$ ne répond pas aux besoins de l'Analyse car il n'est est pas une partie « connexe » (c'est à dire d'un seul tenant) de la droite : on sait que dans V_p il existe aussi un point d'abscisse non rationnelle. Par conséquent, entre deux rationnels donnés il existe une infinité de points sans abscisse dans $\mathbb{Q}$.

Nous introduirons intuitivement l'ensemble des nombres réels (qu'on note $\mathbb{R}$) comme l'ensemble des abscisses de TOUS les points de la droite numérique. Ainsi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (comme $\ell = \sqrt{2}$, e ou π) s'appellent les nombres irrationnels. L'ensemble $\mathbb{R}$ s'identifie à la droite numérique et l'on dit indifféremment « point » ou « nombre réel ».

Les opérations usuelles sur les rationnels et leurs propriétés s'étendent à $\mathbb{R}$. En voici une présentation rapide :

> *Nous admettrons les propriétés suivantes des nombres réels :*
>
> *P.1 On peut ajouter, soustraire ou multiplier des nombres réels et diviser par un nombre réel différent de 0. Les règles de calcul sont celles que vous avez toujours pratiquées :*
>
> *(a)* $a+b=b+a,\ 0+a=a,\ a+x=0 \Leftrightarrow x=-a,\ a+(b+c)=(a+b)+c$
>
> *(b)* $ab=ba,\ 1a=a,\ ax=c \Leftrightarrow x=\dfrac{c}{a}$ *(ici $a\neq 0$),* $a(bc)=(ab)c,\ a(b+c)=ab+ac$
>
> *P.2 Tout nombre réel différent de 0 est, ou bien positif, ou bien négatif.*
>
> *P.3 Si a et b sont positifs, alors $a+b$ et ab le sont aussi.*

Voici encore quelques résultats bien connus qu'on peut établir à partir des propriétés précédentes :

> *C.1* $a0=0,\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc,\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd},\ \dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
>
> *C.2* $-(-a)=a,\ -(a+b)=-a-b,\ -(ab)=(-a)b=a(-b),\ -\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$
>
> *C.3 Si a est positif, alors $-a$ est négatif. Si a est négatif, alors $-a$ est positif.*
>
> *C.4 Si a et b sont positifs, alors $\dfrac{a}{b}$ l'est aussi.*
>
> *C.5 Si a et b sont négatifs, alors $a+b$ est négatif et ab, $\dfrac{a}{b}$ sont positifs.*
>
> *C.6 Si a est positif et b est négatif, alors ab et $\dfrac{a}{b}$ sont négatifs.*

1.2 Définitions et propriétés fondamentales des inégalités.

Nous définissons les inégalités à partir de la notion de réel positif :

Définition 1.2.1 (Inégalités)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. On dit que 0 est inférieur ou égal à a (on notera $0 \leq a$) si a est positif ou nul.
2. Plus généralement, on dit que b est inférieur ou égal à c (ce qui se note $b \leq c$) si le nombre $c-b$ est positif ou nul ($0 \leq c-b$).
3. La relation $b \leq c$ peut s'écrire aussi $c \geq b$ (qui se lit c est supérieur ou égal à b).
4. Enfin, si $b \leq c$ et $b \neq c$, on dit que b est inférieur strictement à c, ce qui se note $b < c$ ou encore $c > b$.

Nous allons énoncer et démontrer les règles fondamentales qui nous permettront de travailler avec les inégalités. Les démonstrations utiliseront les propriétés P.1 ... P.3 et leurs conséquences C.1 ... C.6 énoncées ci-dessus.

Proposition 1.2.2 *Quels que soient les réels a, b, c, on a*

1. *Propriété réflexive : $a \leq a$*
2. *Propriété antisymétrique : si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$*
3. *Propriété transitive : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$*
4. *L'ordre est total : on a $a \leq b$ ou $b \leq a$*

Démonstration : Montrons les deux dernières propriétés.
Transitivité : par hypothèse, $b - a$ et $c - b$ sont positifs ou nuls, donc $c - a = (c - b) + (b - a)$ l'est aussi, comme somme de deux réels positifs ou nuls, et par conséquent $a \leq c$.
L'ordre est total : si $0 \leq b - a$, alors on a $a \leq b$. Si le réel $b - a$ n'et pas positif ou nul, alors on aura $0 \leq -(b - a) = a - b$ et donc $b \leq a$. □

Remarque.
On écrira $a \leq b \leq c$ pour signifier que $a \leq b$ et $b \leq c$ (ce qui implique $a \leq c$).

Définition 1.2.3 (Encadrement)
Toute inégalité de la forme $a \leq b \leq c$ est appelée un encadrement de b, on dira alors que a est un minorant de b et que c est un majorant de b.

✘ **Proposition 1.2.4** ***(Inégalités et addition)***
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

A.1 Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.

A.2 Si $a + b \leq c$, alors $a \leq c - b$.

A.3 Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Démonstration :
A.1 : Il suffit de remarquer que $(b+c) - (a+c) = b - a$ et que, par hypothèse, $b - a$ est positif ou nul.
A.2 : D'après la propriété précédente, en ajoutant le réel $-b$ aux deux membres de l'inégalité $a + b \leq c$, on obtient $a + b - b \leq c - b$, d'où le résultat.
A.3 : Puisque $a \leq b$, il vient $a + c \leq b + c$. De même, $c \leq d$ implique $c + b \leq d + b$. La propriété transitive permet de conclure. □

Remarque.
La propriété A.3 nous dit qu'on peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens. Remarquons qu'on ne peut, au contraire, soustraire membre à membre des inégalités :

$a \leq b$ *et* $c \leq d$ *n'implique pas en général que* $a - c \leq b - d$

En effet, on a bien $2 \leq 5$, $1 \leq 2$, et $2 - 1 \leq 5 - 2$; mais, d'autre part, $2 \leq 3$, $1 \leq 5$, et $2 - 1 \geq 3 - 5$.

✘

Proposition 1.2.5 ***(Inégalités et multiplication)***
Soient a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

M.1 Si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$.

M.2 Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $ac \geq bc$. En particulier ($c = -1$), $a \leq b$ implique $-a \geq -b$.

M.3 Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

M.4 Si $a \leq b \leq 0$ et $c \leq d \leq 0$, alors $ac \geq bd$.

Démonstration :
M.1 : Par hypothèse, $b - a$ et c sont positifs ou nuls, donc leur produit $(b - a)c = bc - ac$ l'est aussi. La preuve de M.2 est analogue.
M.3 : D'après M.1, en multipliant les membres de l'inégalité $a \leq b$ par le réel positif c, on obtient $ac \leq bc$. De même, $c \leq d$ et $b \geq 0$, implique $cb \leq db$. La propriété transitive permet de conclure.
Pour montrer M.4, multiplier les membres des inégalités $a \leq b \leq 0$ et $c \leq d \leq 0$ par -1 et appliquer M.3. □

Remarque.
Attention aux hypothèses sur le signe :

Les conditions $a \leq b$ et $c \leq d$ ne permettent pas de comparer les réels ac et bd.

✘

Proposition 1.2.6 ***(Inégalités et division)***
Quels que soient les réels a, b, on a :

D.1 Si $0 < a \leq b$, alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

D.2 Si $a \leq b < 0$, alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

Démonstration :
D.1 : Le réel $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ est positif ou nul car, d'après les hypothèses, $b - a \geq 0$ et $ab > 0$.
La preuve de D.2 est analogue (on peut aussi multiplier l'inégalité $a \leq b < 0$ par -1 et appliquer D.1). □

Remarque.
Eviter le division membre à membre des inégalités :

$a \leq b$ et $c \leq d$ ne permettent pas de comparer $\dfrac{a}{c}$ et $\dfrac{b}{d}$, même pour des réels positifs

On a $1 \leq 2$, $3 \leq 4$ et $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{4}$; mais $1 \leq 2$, $3 \leq 10$ et, au contraire, $\frac{1}{3} \geq \frac{2}{10}$.

Voici quelques propriétés concernant la racine carrée :

Proposition 1.2.7

1. *Si $0 \leq a < b$, alors $a^2 < b^2$*
2. *Si $0 \leq a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.*
3. *Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a : $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$*

Démonstration
1 : Il suffit de multiplier membre à membre les inégalités $0 \leq a < b$ *et* $0 \leq a < b$ *(propriété M.3).*
2 : Par l'absurde. Supposons que $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$. *On a* $0 \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{a}$ *et la propriété 1 implique* $(\sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a})^2$, *d'où* $b \leq a$ *ce qui contredit l'hypothèse.*
3 : L'implication $\Rightarrow$ *est la propriété 1. Pour* $\Leftarrow$, *utiliser 2 :* $0 \leq a^2 < b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$ *(remarquer que* $\sqrt{a^2} = a$ *car* $a \geq 0$, *de même* $\sqrt{b^2} = b$*).* □

Exemple.
Soient x et y deux réels tels que

$$1 \leq x \leq 2 \tag{1}$$

$$-6 \leq y \leq -3 \tag{2}$$

Encadrons $x + y$, $x - y$, xy et $\dfrac{x}{y}$:

L'addition membre à membre (propriété A.3) des inégalités (1) et (2) donne

$$\boxed{-5 \leq x + y \leq -1}$$

En multipliant les membres de l'inégalité (2) par -1 on obtient (propriété M.2)

$$3 \leq -y \leq 6 \tag{3}$$

et l'addition membre à membre (encore A.3) de (1) et (3) implique

$$\boxed{4 \leq x - y \leq 8}$$

Le produit membre à membre de (1) et (3) donne (propriété M.3 : réels positifs !)

$$3 \leq -xy \leq 12$$

En multipliant par -1 cet encadrement, il vient (d'après M.2)

$$\boxed{-12 \leq xy \leq -3}$$

Prenons l'inverse dans les membres (3) (propriété D.1 : réels positifs !), on obtient

$$\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{3} \tag{4}$$

En multipliant membre à membre (1) et (4) (M.3 : réels positifs !) on a $\dfrac{1}{6} \leq -\dfrac{x}{y} \leq \dfrac{2}{3}$ et enfin (produit par -1 : M.2)

$$\boxed{-\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{6}}$$

□

Rappelons les définitions des différents types d'intervalles :

Définition 1.2.8 (Intervalles)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $[a, a] = \{a\}$ et :

$$[a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \qquad]a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \qquad]-\infty, a[\; = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

2. Si $a < b$, on considère aussi les intervalles :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \qquad]a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$
$$[a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \qquad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

3. Enfin : $]-\infty, +\infty[\; = \mathbb{R}$.

1.3 Inéquations

1.3.1 Introduction

Définition 1.3.1 Une inéquation est une inégalité dans laquelle figure une ou plusieurs quantités inconnues.

Exemple.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x}{x-2} \leq 3 \qquad (I)$$

Le domaine de validité de (I) est $\mathbb{R} - \{2\}$. Pour tout $x \neq 2$ on a

$$(I) \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x-2} - 3 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6-2x}{x-2} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3-x}{x-2} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{x-2} \geq 0$$

A l'aide d'un tableau de signes on trouve (exercice) que l'ensemble des solutions est

$$]-\infty, 2[\;\cup\; [3, +\infty[$$

□

✘ *On retiendra quelques principes généraux :*

1. *Commencer par déterminer le domaine de validité de l'inéquation.*
2. *Regrouper tout dans le premier membre pour avoir* 0 *dans le second : la résolution de l'inéquation se réduit à une étude de signe.*
3. *Procéder par des équivalences successives : les inéquations ainsi trouvées possèdent donc le même ensemble de solutions.*

1.3.2 Le signe du trinôme du second degré

Proposition 1.3.2 *Soient a, b, c trois réels fixés, $a \neq 0$. Considérons l'équation*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{E}$$

Le discriminant de (E) est, par définition, le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions (racines)*
$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
On a alors $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, qui est du signe de a pour tout x à l'extérieur du segment déterminé par r_1 et r_2, et du signe de $-a$ si x est entre les racines
2. *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution unique*
$$r = \frac{-b}{2a}$$
On a $ax^2 + bx + c = a(x - r)^2$, qui est du signe de a pour tout $x \neq r$.
3. *Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solutions réelles et $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout x.*

Démonstration : Ecrivons le trinôme en complétant le carré

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Si $\Delta < 0$, on a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$: le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout x et n'a pas de racines réelles.

Si $\Delta = 0$, on obtient $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$: le trinôme admet une racine unique $r = \frac{-b}{2a}$ et il est du signe de a pour tout $x \neq r$.

Si $\Delta > 0$, l'identité remarquable $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ appliquée à $\alpha = x + \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ donne

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = (x - r_1)(x - r_2)$$

Les racines du trinôme sont r_1 et r_2, un tableau de signe pour $a(x - r_1)(x - r_2)$ permet de compléter la preuve de 1. $\square$

Remarques.

Le graphe de la fonction $f : x \to ax^2 + bx + c$ est une parabole. Si $a > 0$ les branches de la parabole sont dirigées vers le haut, si $a < 0$ vers le bas (se rappeler que le terme ax^2 domine en $\pm\infty$).

Les racines réelles de (E) sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec l'axe des x. On retrouve ainsi graphiquement le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction des signes de a et Δ :

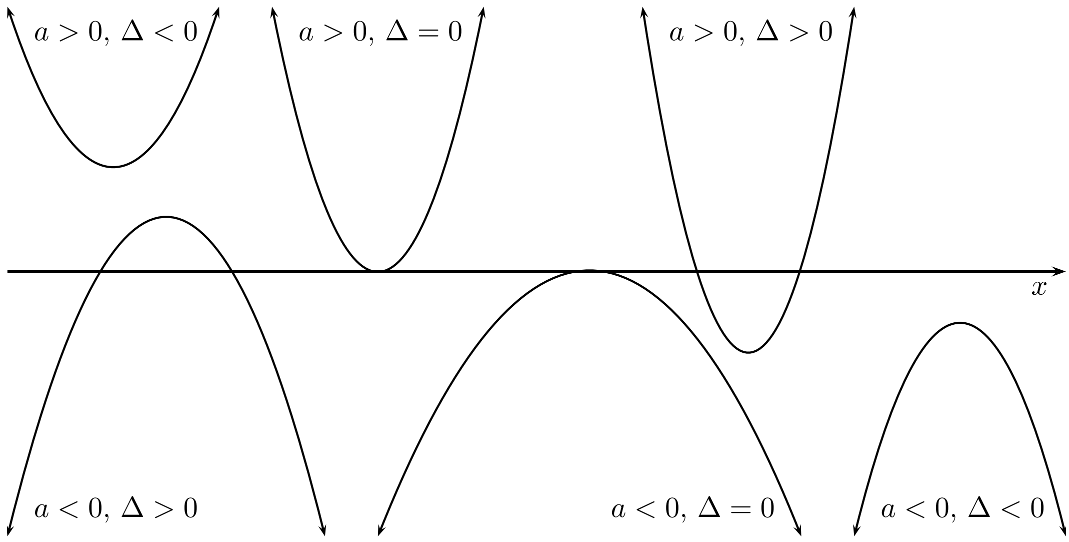


FIGURE 1.1 – Position de $x \to ax^2 + bx + c$ par rapport à Ox en fonction de a et Δ.

Exemple.

Considérons l'équation (E) : $4x^2 - 4x - 15 = 0$.

Ici $a = 4$, $b = -4$ et $c = -15$. Par conséquent, $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15) = 16 + 16 \cdot 15 = 16 \cdot (15 + 1) = 16^2 > 0$ et (E) admet deux racines réelles

$$r_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{16^2}}{2 \cdot 4} = \frac{4 - 16}{8} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{16^2}}{2 \cdot 4} = \frac{4 + 16}{8} = \frac{5}{2}$$

Entre les racines, le trinôme est du signe de $-a = -4$: négatif. On peut retrouver son signe en se rappelant que les branches de la parabole $x \to 4x^2 - 4x - 15$ sont dirigées vers le haut (ceci correspond au cas $a > 0$ et $\Delta > 0$ de la Figure 1.1).

La factorisation du trinôme est $4x^2 - 4x - 15 = 4\,(x - r_1)\,(x - r_2) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

Remarquons que nous pouvons déterminer les racines de (E) en complétant le carré (c'est la technique utilisée dans la démonstration de la proposition).
Ecrivons $4x^2 - 4x - 15$ sous la forme $4(x + \gamma)^2 + \delta$, on obtient

$$4x^2 - 4x - 15 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 16$$

(nous verrons au Ch. 2 comment tracer le graphe de la parabole à l'aide de cette expression).
On retrouve ainsi les racines de l'équation :

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{1}{2} = \pm 2 \;\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm 2$$

1.4 Valeur absolue

1.4.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.4.1 La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre, noté $|a|$, défini par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Exemples.
On a $|3| = 3$, car $3 \geq 0$. D'autre part, $|-7| = -(-7) = 7$, car $-7 \leq 0$.

Voici quelques propriétés qu'on peut montrer facilement en discutant sur le signe des réels a et b de façon a déterminer les valeurs absolues :

✘ **Proposition 1.4.2** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :*

1) $|a| = |-a|$ *2)* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3) $a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0$ *4)* $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ *ou* $a = -b$
5) $|a| = \sqrt{a^2}$ *6)* $|a|^2 = a^2$
7) $|ab| = |a||b|$ *8)* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $(b \neq 0)$

1.4.2 Distance et valeur absolue

Définition 1.4.3 On définit la distance entre les nombres réels a et b (notée $d(a, b)$) par

$$d(a, b) = |a - b|$$

Exemples, remarques.
$d(3, 5) = |3 - 5| = |-2| = 2$
$d(-1, -4) = |-1 - (-4)| = |-1 + 4| = 3$
$d(3, -1) = |3 - (-1)| = |3 + 1| = 4$
Ces exemples suffiront pour se convaincre que

✘ *Géométriquement, $d(a, b)$ est la longueur du segment de la droite numérique déterminé par les points d'abscisses a et b.*

On a $d(a, 0) = |a|$ et $d(a, b) = d(b, a)$.

1.4.3 Intervalles et valeur absolue

A partir de l'interprétation géométrique de la distance, on peut traduire facilement en termes d'intervalles des inégalités portant sur la valeur absolue :

✘ **Proposition 1.4.4** *Soit a un réel positif. On a*

1. $|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; d(x,0) \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a \;\Leftrightarrow\; x \in [-a,a]$
2. $|x| \geq a \;\Leftrightarrow\; d(x,0) \geq a \;\Leftrightarrow\; x \leq -a$ *ou* $x \geq a \;\Leftrightarrow\; x \in]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$

Plus généralement :

✘ **Proposition 1.4.5** *Soient $c, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. On a*

$$|x-c| \leq r \;\Leftrightarrow\; d(x,c) \leq r \;\Leftrightarrow\; x \in [c-r, c+r]$$

Notons que c est le centre de l'intervalle $[c-r, c+r]$ et r son rayon ou demi-longueur. Puisque tout intervalle $[a,b]$ peut s'écrire sous la forme $[c-r, c+r]$ (avec $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2}$) il vient :

Corollaire 1.4.6 *Soient $a \leq b$ deux réels. Alors*

$$x \in [a,b] \;\Leftrightarrow\; d(x, \frac{a+b}{2}) \leq \frac{b-a}{2} \;\Leftrightarrow\; |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$$

Exemples.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|4t-3| \leq 5 \qquad (I)$$

Le domaine de validité de (I) est $\mathbb{R}$. D'après la Prop. 1.4.4 (partie 1.) on a

$$|4t-3| \leq 5 \;\Leftrightarrow\; -5 \leq 4t-3 \leq 5$$

et il suffit de remarquer que

$$-5 \leq 4t-3 \leq 5 \;\Leftrightarrow\; -2 \leq 4t \leq 8 \;\Leftrightarrow\; -\frac{2}{4} \leq t \leq \frac{8}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est l'intervalle $[\,-1/2,\ 2\,]$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|5-3t| \geq 2 \qquad (J)$$

Le domaine de validité de (J) est $\mathbb{R}$. La partie 2. de la Prop. 1.4.4 donne

$$|5-3t| \geq 2 \;\Leftrightarrow\; 5-3t \leq -2 \;\text{ ou }\; 5-3t \geq 2$$

Or, $5-3t \;\leq\; -2 \;\Leftrightarrow\; 7 \leq 3t \;\Leftrightarrow\; \dfrac{7}{3} \leq t$, et $5-3t \geq 2 \;\Leftrightarrow\; 3 \geq 3t \;\Leftrightarrow\; 1 \geq t$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (J) est

$$]-\infty,\ 1\,] \cup [\,7/3, +\infty\,[$$

1.4.4 Les inégalités triangulaires *(Compléments)*

Voici le lien entre $|a+b|$ et $|a|$, $|b|$:

Théorème 1.4.7 *Pour tous nombres réels a et b on a*

1. $$|a+b| \leq |a| + |b|$$

   avec égalité si et seulement si « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » ou « $x \leq 0$ et $y \leq 0$ ».

2. $$|\ |a| - |b|\ | \leq |a+b|$$

   avec égalité si et seulement si « $x \geq 0$ et $y \leq 0$ » ou « $x \leq 0$ et $y \geq 0$ ».

Remarques.

1. On peut donc écrire
$$|\ |a| - |b|\ | \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$
En posant $b = -c$ on obtient
$$|\ |a| - |c|\ | \leq |a-c| \leq |a| + |c|$$
pour tous $a, c \in \mathbb{R}$.

2. Soient x_1, x_2 et x_3 trois réels. Appliquons deux fois l'inégalité $|a+b| \leq |a| + |b|$:
$$|x_1 + x_2 + x_3| = |x_1 + (x_2 + x_3)| \leq |x_1| + |x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$$
Résultat qu'on peut généraliser pour un nombre quelconque de réels :
$$|x_1 + x_2 + \ \cdots\ + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ \cdots\ + |x_n|$$

Exemples.

1. Sachant que $|x| \leq 2$, donner une majoration de $|5x^3 - 3x + 1|$.

On a

$|5x^3-3x+1| \leq |5x^3|+|-3x|+|1| = |5||x^3|+|-3||x|+1 = 5|x|^3+3|x|+1 \leq 5\cdot 8+3\cdot 2+1 = 47$

puisque $|x| \leq 2 \ \Rightarrow\ |x|^3 \leq 2^3$ (d'après la propriété M.3)

2. Sachant que $1 \leq |x| \leq 2$ et que $3 \leq |y| \leq 4$, donner un encadrement de $|x+y|$.

La majoration est immédiate :
$$|x+y| \leq |x| + |y| \leq 2 + 4 = 6$$

Pour minorer $|x+y|$, nous partons de l'inégalité $|x+y| \geq ||x| - |y||$.

Encadrons ensuite $|x| - |y|$: les inégalités $1 \leq |x| \leq 2$ et $-4 \leq -|y| \leq -3$ impliquent $-3 \leq |x| - |y| \leq -1$, ce qui donne la minoration $||x| - |y|| \geq 1$.

Ainsi $|x+y| \geq ||x| - |y|| \geq 1$ et finalement
$$1 \leq |x+y| \leq 6$$

PCSO
COURS D'ANALYSE
Chapitre 2: Généralités sur les fonctions

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

2.1 Définitions

2.1.1 La notion de fonction

Définition 2.1.1 Soit $E \subset \mathbb{R}$.

1. Une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ (on note $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$) est un procédé permettant d'associer à chaque élément x de E un et un seul élément y de $\mathbb{R}$ (on note $y = f(x)$).
2. L'ensemble E s'appelle ensemble de départ ou de définition de f. On notera souvent $E = D_f$.
3. L'élément $y = f(x)$ s'appelle l'image de x par f. On dit que x est un antécédent de y par f.

Remarques.

La locution « Soit $f : [1, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$ » désignera la fonction f qui associe à chaque élément x de $[1, 2[$ le réel $y = f(x) = x^3$. Ici $D_f = [1, 2[$.

Très souvent, une fonction est définie par une formule et l'ensemble de départ n'est pas précisé. Dans ce cas, il est tacitement admis que l'ensemble de définition est la plus grande partie de $\mathbb{R}$ où la formule qui définit la fonction a un sens. Par exemple, l'expression

$$\text{« Soit la fonction } g : x \longrightarrow \frac{1}{x} \text{ »}$$

désigne précisément la fonction $g : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemple.
Considérons la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2$. L'image de $x = 5$ par h est $h(5) = 5^2 = 25$. Les antécédents de $y = 16$ par h sont les réels 4 et -4 (les solutions de l'équation $h(x) = 16$).

2.1.2 Graphe

Définition 2.1.2 Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Le graphe ou courbe représentative de f, qu'on notera Γ_f, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ dont les éléments sont les couples $(x, f(x))$, lorsque x décrit l'ensemble de départ E :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

Remarques.

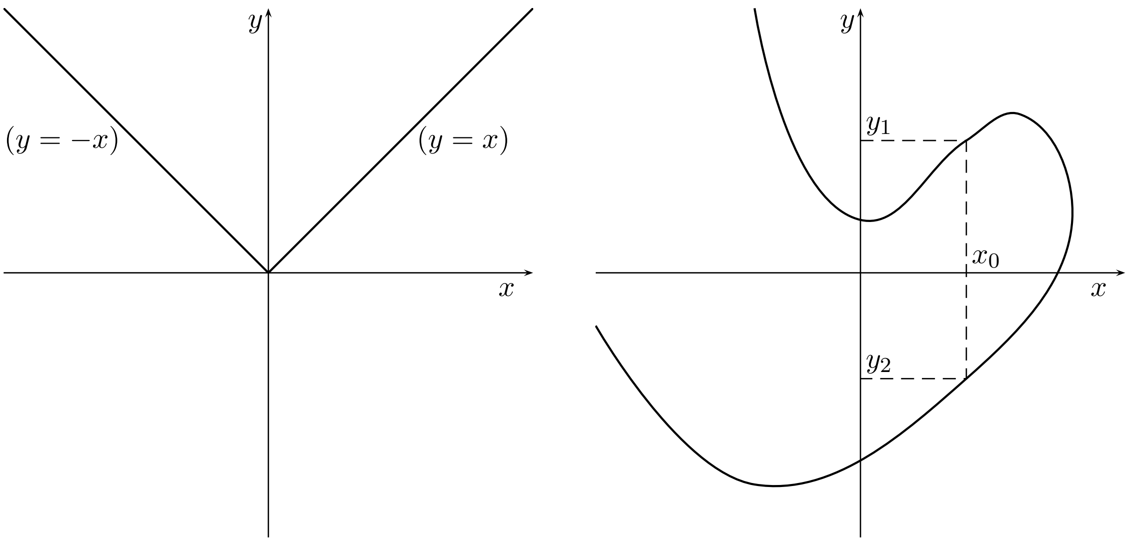
Munissons le plan affine euclidien $\mathbb{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Tout point $M \in \mathbb{P}$ est déterminé par ses coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

Nous parlerons du repère cartésien Oxy pour designer l'origine O et les axes Ox, Oy, c'est à dire, les droites passant par O dont les vecteurs directeurs sont, respectivement, $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.

Le plan $\mathbb{P}$ sera ainsi identifié au produit cartésien $\mathbb{R}^2$, le point M étant représenté par le couple (x, y). Souvent, on supposera implicitement qu'une telle identification a été faite et l'on écrira $M = (x, y)$.

Dans ce contexte, Γ_f est une courbe du plan. Elle a la propriété fondamentale suivante : chaque droite parallèle à l'axe Oy rencontre Γ_f en au plus un point.



(a) Le graphe de la fonction $x \to |x|$ (fonction valeur absolue).

(b) $f(x_0) = y_1$? $f(x_0) = y_2$?

Figure 2.1 – Une courbe qui est le graphe d'une fonction et une qui ne l'est pas

2.1.3 Image directe d'une partie

Définition 2.1.3 Soit $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $A \subset E$.
On appelle image directe de A par f et on note $f(A)$, l'ensemble dont les éléments sont les images $f(x)$ des $x \in A$:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Exemple.
A partir du graphe de la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ on peut voir que

$$f(\,]2,3]\,) =]4,9] \qquad f(\,]-4,-1]\,) = [1,16[\qquad f(\,[-1,2]\,) = [0,4]$$

2.1.4 Périodicité. Monotonie

Définition 2.1.4 Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $T > 0$.
On dit que f est périodique de période T si, pour tout $x \in E$, on a $x + T \in E$ et

$$f(x+T) = f(x)$$

Définition 2.1.5 Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit I un intervalle contenu dans E. On dit que

1. f est croissante sur I si pour tous x_1 et x_2 dans I, on a

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. f est strictement croissante sur I si pour tous x_1 et x_2 dans I, on a

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

3. f est décroissante sur I si pour tous x_1 et x_2 dans I, on a

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$$

4. f est strictement décroissante sur I si pour tous x_1 et x_2 dans I, on a

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$

2.1.5 Parité

Définition 2.1.6 Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que, pour tout $x \in E$, alors $-x \in E$.

1. On dit que f est paire si $f(-x) = f(x)$, pour tout $x \in E$.
2. On dit que f est impaire si $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in E$.

Exemples.

Les fonctions $x \to |x|$, $x \to x^2$ et $x \to \dfrac{1}{x^4}$ sont paires. Les fonctions $x \to x^3$ et $x \to \dfrac{1}{x}$ sont impaires.

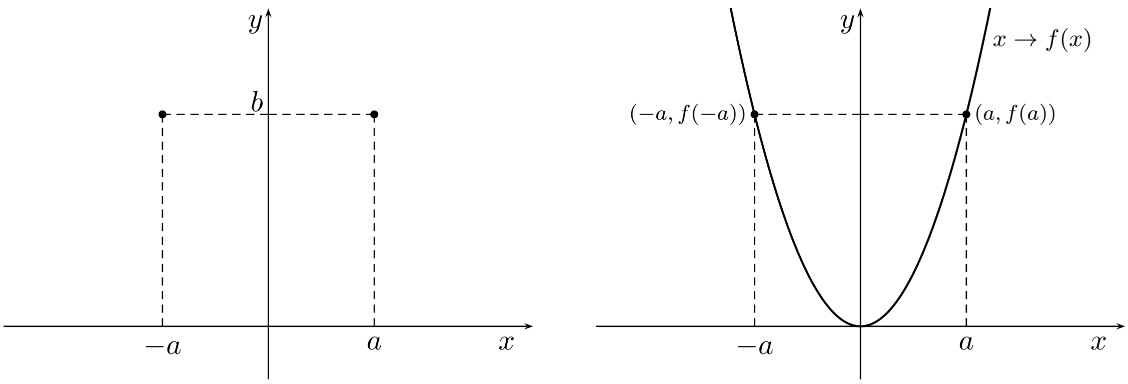
✘ **Proposition 2.1.7**

1. *Le graphe d'une fonction paire admet Oy comme axe de symétrie.*
2. *Le graphe d'une fonction impaire admet O comme centre de symétrie.*

Démonstration :

1. Rappelons d'abord que les points (a, b) et $(-a, b)$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy (voir Figure 2.2 (a)).

Soit maintenant f une fonction paire et (a, b) un point de son graphe : on a donc $b = f(a)$. Son symétrique par rapport à Oy est le point $(-a, b) = (-a, f(a))$, or $(-a, f(a)) = (-a, f(-a))$ appartient bien au graphe de f.
Ainsi le graphe de f admet Oy comme axe de symétrie (voir Figure 2.2 (b)).



(a) Les points (a, b) et $(-a, b)$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy

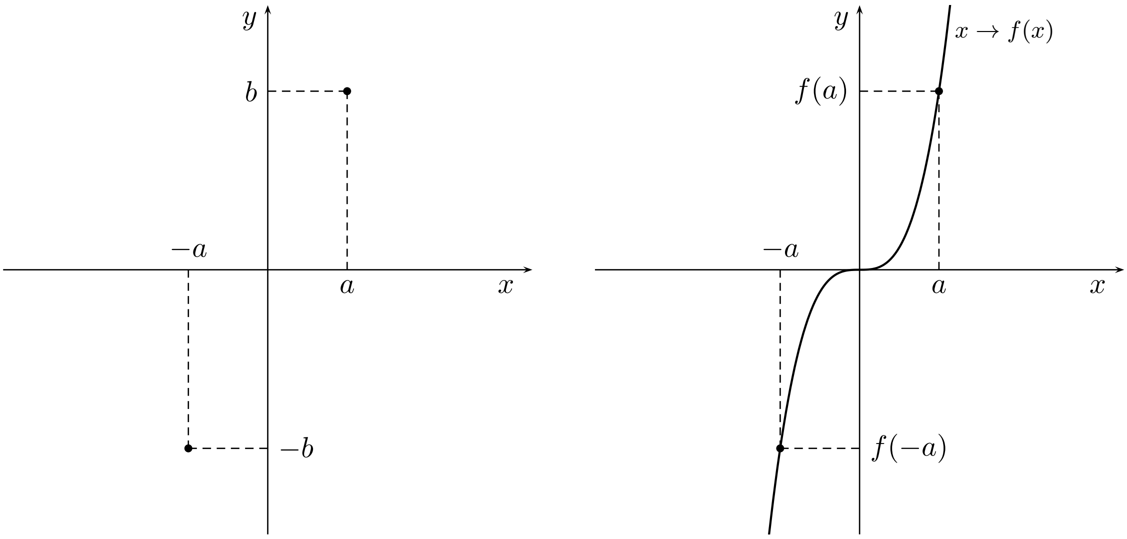
(b) La fonction f est paire : $f(a) = f(-a)$

FIGURE 2.2 – Le graphe d'une fonction paire admet Oy comme axe de symétrie

2. Les points (a, b) et $(-a, -b)$ sont symétriques par rapport à O (voir figure 2.3 (a)).

Par conséquent, si f est une fonction impaire et $(a, b) = (a, f(a))$ est un point de son graphe, le point symétrique par rapport à O de (a, b) est $(-a, -b) = (-a, -f(a)) = (-a, f(-a))$, qui

appartient au graphe de f.
Ainsi, le graphe d'une fonction impaire admet O comme centre de symétrie (voir Figure 2.3 (b)). □



(a) Les points (a, b) et $(-a, -b)$ sont symétriques par rapport à O

(b) La fonction f est impaire : $f(-a) = -f(a)$

FIGURE 2.3 – Le graphe d'une fonction impaire admet O comme centre de symétrie

Voici encore deux résultats concernant graphes et symétries :

Proposition 2.1.8 *Soit f une fonction quelconque.*

1. *Les graphes de $x \to f(x)$ et $x \to f(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy.*
2. *Les graphes de $x \to f(x)$ et $x \to -f(x)$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox.*

2.1.6 Composition de fonctions

Définition 2.1.9 Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Supposons que $f(E) \subset E'$.
On appelle fonction composée de f et g (on note $g \circ f$: « g rond f ») la fonction

$$g \circ f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(ceci a un sens car $f(x) \in E'$ pour tout $x \in E$ et $g(f(x))$ est bien définie).

Exemple.
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 3$. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies sur $\mathbb{R}$, on a : $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ et $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$.

Remarques.

Comme le montre l'exemple précédent :

En général, la composition de fonctions n'est pas commutative : $f \circ g \neq g \circ f$

La composition s'applique aussi à trois fonctions ou d'avantage. Si, dans les notations et hypothèses de la définition, on se donne une troisième fonction $h : E'' \longrightarrow \mathbb{R}$ et que $g(E') \subset E''$, alors $h(g(f(x)))$ est bien défini pour tout $x \in E$ et nous pouvons considérer la fonction composée

$$h \circ g \circ f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } (h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

On remarquera que la composition de fonctions est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

On relâche d'habitude les conditions de la définition : étant données deux fonctions f et g, qui ne vérifient pas forcement $f(D_f) \subset D_g$, on peut déterminer les réels $x \in D_f$ tels que $f(x) \in D_g$ et définir sur ce domaine la fonction composée $g \circ f$.

2.2 Les fonctions usuelles

2.2.1 Les fonctions affines

Définition 2.2.1 Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ s'appelle fonction affine.

Remarques.

Le graphe d'une fonction affine est une droite non verticale. A partir des propriétés des inégalités on montre facilement que :

1. *Si $m > 0$ la fonction $x \to mx + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si $m < 0$ la fonction $x \to mx + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*

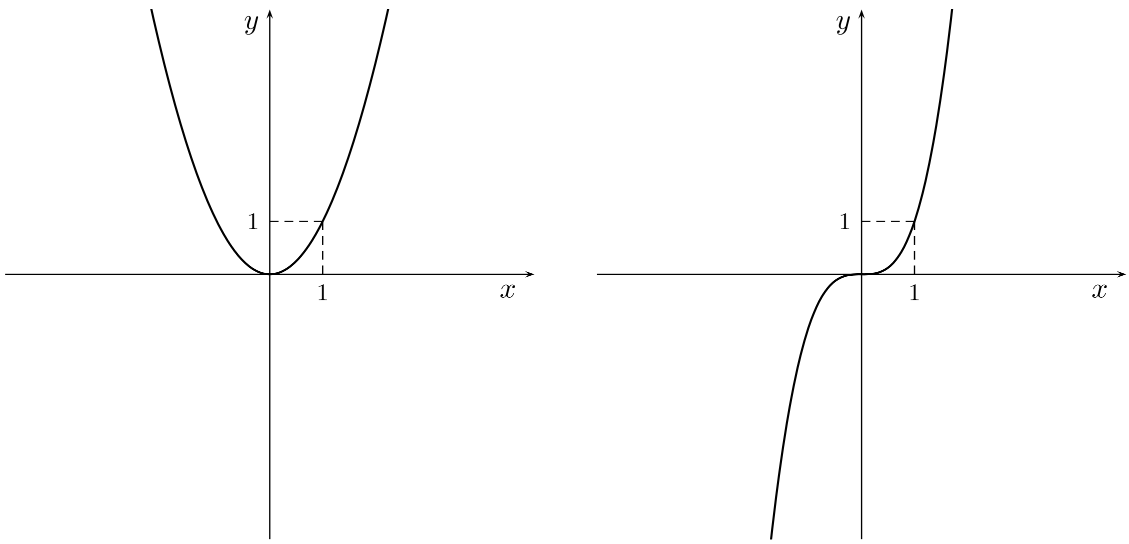
2.2.2 Les fonctions $x \to x^2$, $x \to x^3$, $x \to x^n$

La parité et monotonie des fonctions $x \to x^n$ changent selon que n est un naturel pair ou impair (voir Figure 2.4). La monotonie de ces fonctions peut être étudiée directement à l'aide des propriétés des inégalités.

Proposition 2.2.2

✘

1. *La fonction $x \to x^2$ est paire.*
   Elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
   Il en est de même pour les fonctions $x \to x^n$ si $n \in \mathbb{N}$, n pair.
2. *La fonction $x \to x^3$ est impaire.*
   Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Mêmes caractéristiques pour les fonctions $x \to x^n$ si $n \in \mathbb{N}$, n impair.



(a) Le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ (b) Le graphe de la fonction $x \mapsto x^3$

FIGURE 2.4

Remarques.

Soit $0 < x < 1$. En multipliant les membres de cette inégalité par le réel positif x, on a $0 < x^2 < x$; multiplions cette inégalité par x, on obtient $0 < x^3 < x^2$. Finalement on a $0 < x^3 < x^2 < x < 1$. On peut appliquer le même raisonnement à l'inégalité $1 < x$ pour déduire $1 < x < x^2 < x^3$ (voir Figure 2.5).

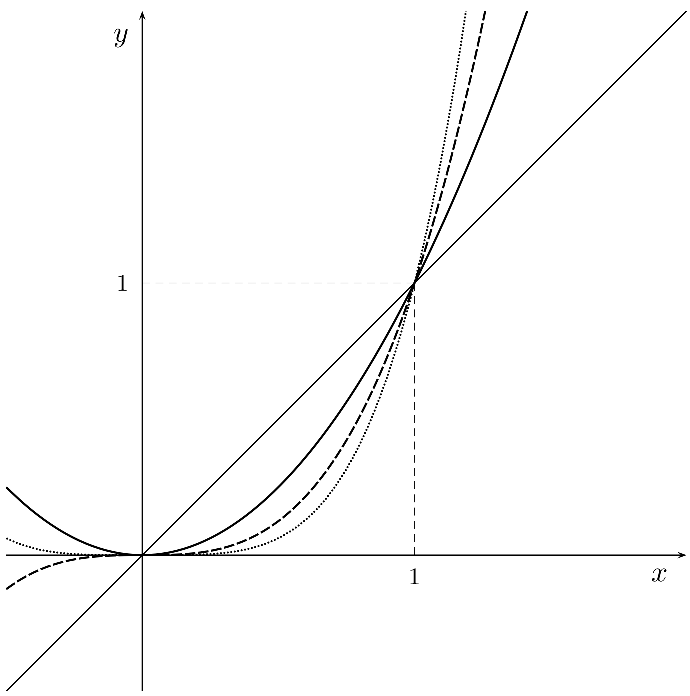


FIGURE 2.5 – Comparaison des graphes des fonctions $x \to x$, $x \to x^2$ (gras), $x \to x^3$ (tireté) et $x \to x^4$ (pointillé)

Plus généralement :

✘

1. *Pour tout* $0 < x < 1$ *on a*
$$0 < \cdots < x^{n+1} < x^n < \cdots < x^3 < x^2 < x < 1$$
2. *Pour tout* $1 < x$ *on a*
$$1 < x < x^2 < x^3 < \cdots < x^n < x^{n+1} < \cdots$$

2.2.3 Les fonctions $x \to \sqrt{x}$, $x \to \sqrt[3]{x}$, $x \to \sqrt[n]{x}$

Définition 2.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $b \in \mathbb{R}$.
Toute solution réelle de l'équation
$$x^n = b$$
s'appelle racine réelle d'ordre n (ou racine n-ième) du nombre b

✘

Proposition 2.2.4

1. *Si n est pair, tout nombre réel positif b possède deux racines réelles d'ordre n, qui sont opposées. La racine n-ième positive de b se note $\sqrt[n]{b}$. On notera $\sqrt[n]{0} = 0$.*
2. *Si n est impair, tout nombre réel b possède exactement une racine réelle d'ordre n, qui est du même signe que lui et qui se note $\sqrt[n]{b}$.*

Remarques.

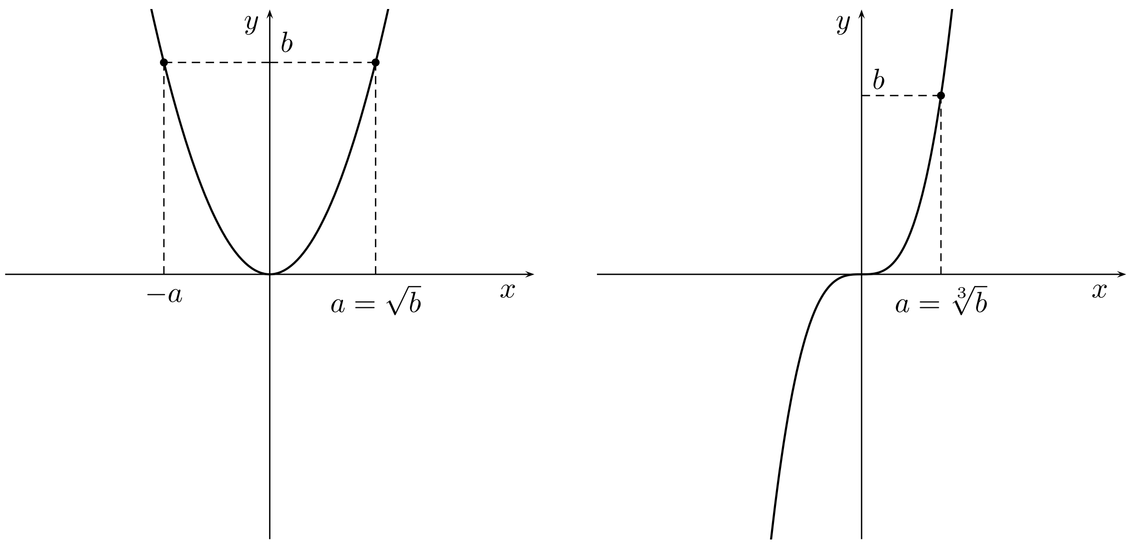
1. Le réel positif 16 possède deux racines d'ordre 4 : 2 et -2 , on notera $\sqrt[4]{16} = 2$. D'autre part, -32 possède une unique racine d'ordre 5 : $\sqrt[5]{-32} = -2$.

2. On peut se convaincre intuitivement du bien fondé de la proposition en considérant les graphes des fonctions $x \to x^n$ (voir Figure 2.6) :

1. Si n est pair, tout nombre réel positif b possède deux antécédents par $x \to x^n$: $a > 0$ et $-a$. Ce sont les deux racines n-ièmes de b , et $a = \sqrt[n]{b}$. La Figure 2.6 (a) illustre le cas $n = 2$.
2. Si n est impair, tout nombre réel b possède exactement un antécédent par $x \to x^n$: a, qui est du même signe que b . Il est la seule racine n-ième de b : $a = \sqrt[n]{b}$. La Figure 2.6 (b) illustre la cas $n = 3$.

Définition 2.2.5 Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ s'appelle fonction racine n-ième. D'après la Proposition précédente :

1. Si n est pair, la fonction racine n-ième est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Si n est impair, elle est définie sur $\mathbb{R}$.



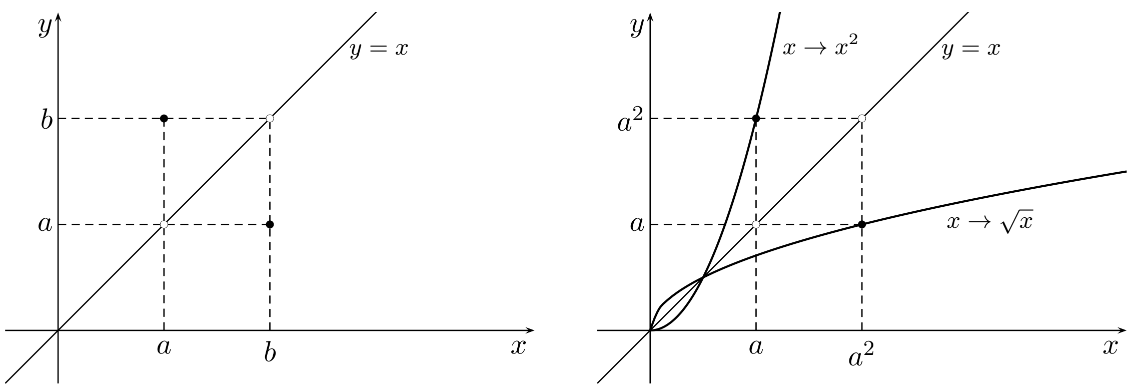
(a) Les deux antécédents de b par $x \to x^2$ (b) L'unique antécédent de b par $x \to x^3$

Figure 2.6 – Existence des racines carrées et cubique de b

Proposition 2.2.6 *Les graphes de* $x \to \sqrt[n]{x}$ *et de* $x \to x^n$ *(considérée définie sur* $[0, +\infty[$ *si* n *est pair) sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Démonstration : Rappelons d'abord que les points (a, b) *et* (b, a) *sont symétriques par rapport à* $y = x$*. En effet, il suffit de considérer (voir Figure 2.7 (a)) le carré déterminé par les points* (a, a)*,* (b, a)*,* (b, b) *et* (a, b)*.*

Illustrons maintenant la démonstration pour le cas $n = 2$ *(voir Figure 2.7 (b)) :*
Soit $a \geq 0$ *fixé. Le point* $(a, b) = (a, a^2)$ *est dans le graphe de* $x \to x^2$*.*
Son symétrique par rapport à $y = x$ *est le point* $(b, a) = (a^2, a)$*, qui appartient au graphe de* $x \to \sqrt{x}$ *puisque* $\sqrt{a^2} = a$*.* □



(a) Les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (b) Les graphes de $x \to x^2$ et de $x \to \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

Figure 2.7

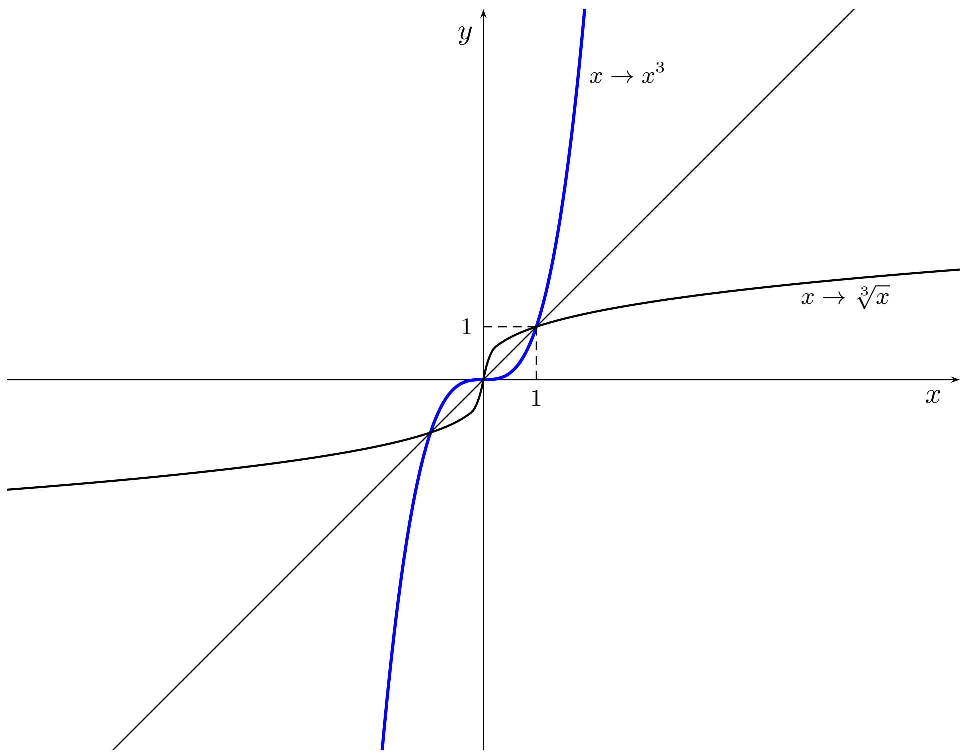


FIGURE 2.8 – Symétrie des graphes de $x \to x^3$ et $x \to \sqrt[3]{x}$ par rapport à $y = x$

Proposition 2.2.7 *La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur son domaine de définition.*

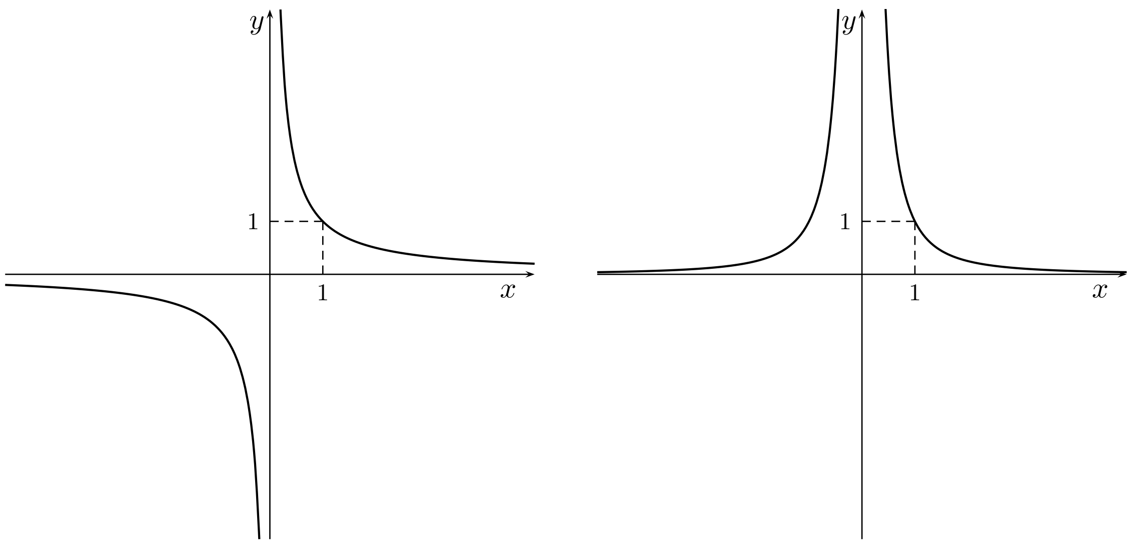
Démonstration : Traitons par exemple le cas n impair.
Soient $x_1 < x_2$ deux réels, montrons que $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$.
Par l'absurde : supposons donc que $\sqrt[n]{x_1} \geq \sqrt[n]{x_2}$. Puisque la fonction $f : x \to x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}$, il vient $f(\sqrt[n]{x_1}) \geq f(\sqrt[n]{x_2})$, c'est à dire $x_1 \geq x_2$, contre l'hypothèse. □

2.2.4 Les fonctions $x \to 1/x$, $x \to 1/x^2$

Pour étudier $x \to 1/x^n$ nous devons distinguer les cas n pair et n impair. Comme précédemment, les propriétés des inégalités nous permettent d'établir directement la monotonie de ces fonctions (voir Figure 2.9) :

✘ **Proposition 2.2.8**

1. *La fonction $x \to 1/x$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.*
   Elle est impaire, strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
   Il en est de même pour les fonctions $x \to 1/x^n$ si n impair.
2. *La fonction $x \to 1/x^2$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.*
   Elle est paire, strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
   Mêmes caractéristiques pour les fonctions $x \to 1/x^n$ si n pair.



(a) Le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$ (b) Le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x^2$

FIGURE 2.9

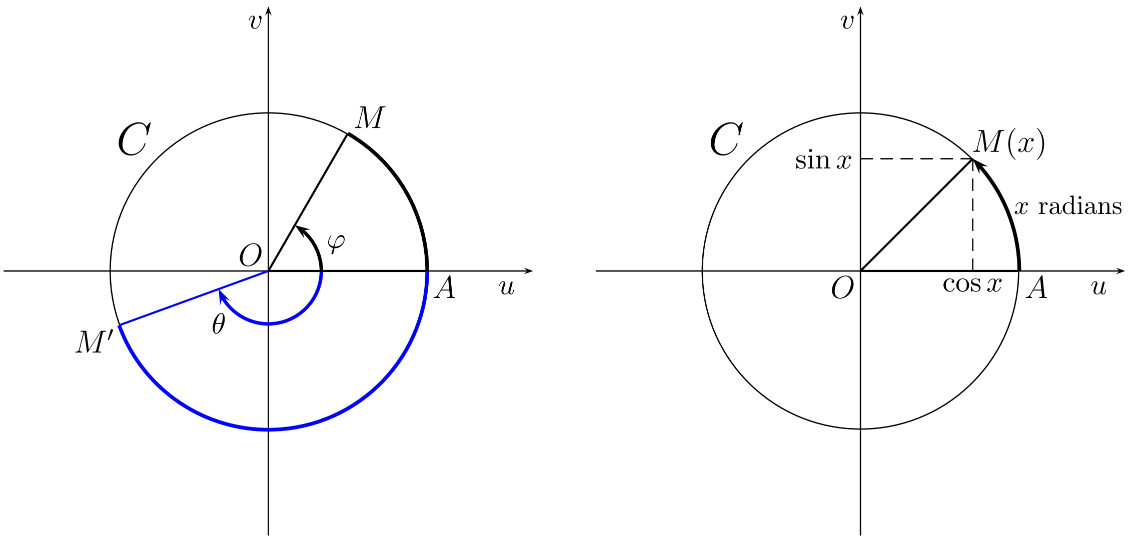
2.2.5 Les fonctions sinus et cosinus

Soit C le cercle trigonométrique (cercle de centre O et rayon 1) sur le repère cartésien Ouv du plan. Soit $A = (1, 0)$.

Considérons les angles de sommet O et de côté initial OA. On va mesurer ces angles en radians, voici deux exemples pour rappeler la méthode (voir Figure 2.10 (a)) :

1. Le côté final OM de l'angle φ de $\pi/3$ radians sera obtenu en faisant tourner le côté initial OA dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de façon à décrire sur le cercle C un arc de longueur $\pi/3$. Même processus pour tout angle de x radians avec $x > 0$.
2. On obtiendra le côté final OM' de l'angle θ de $-8\pi/9$ radians par une rotation de son côté initial OA dans le sens des aiguilles d'une montre, en parcourant sur le cercle C un arc de longueur $8\pi/9$. Méthode analogue pour tout angle de x radians avec $x < 0$.

Définition 2.2.9 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $M(x)$ le point sur le cercle trigonométrique C tel que $OM(x)$ est le côté final de l'angle de x radians de côté initial OA (voir Fig 2.10 (b)). Par définition, $\cos x$ et $\sin x$ sont, respectivement, l'abscisse et l'ordonnée du point $M(x)$ dans le repère Ouv : $M(x) = (\cos x, \sin x)$.



(a) L'angle φ mesure $\pi/3$ radians (ou 60 degrés). L'angle θ mesure $-8\pi/9$ radians (ou -160 degrés).

(b) La définition de $\sin x$ et $\cos x$.

FIGURE 2.10

Comme $\sin x$ et $\cos x$ sont bien définis pour tour réel x, nous pouvons donc définir sur $\mathbb{R}$ les fonctions

$$x \to \sin x \text{ et } x \to \cos x$$

qu'on appellera respectivement les fonctions sinus et cosinus.

✘ *A partir de la définition on montre facilement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

L'égalité $M(x + 2\pi) = M(x)$, pour tout réel x, donne

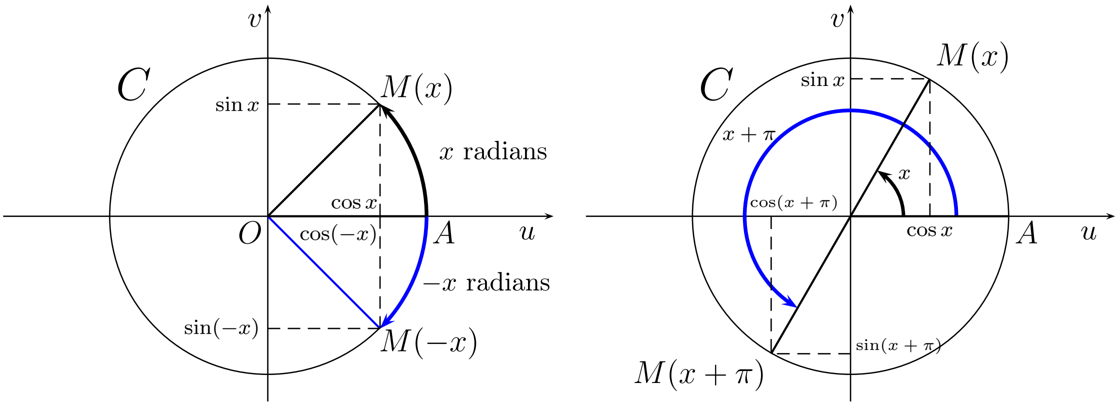
Les fonctions sinus et cosinus sont 2π - périodiques.

✘ *Puisque les points $M(x)$ et $M(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe Ou, on a*

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.
Les points $M(x)$ et $M(x + \pi)$ sont symétriques par rapport à l'origine O, donc

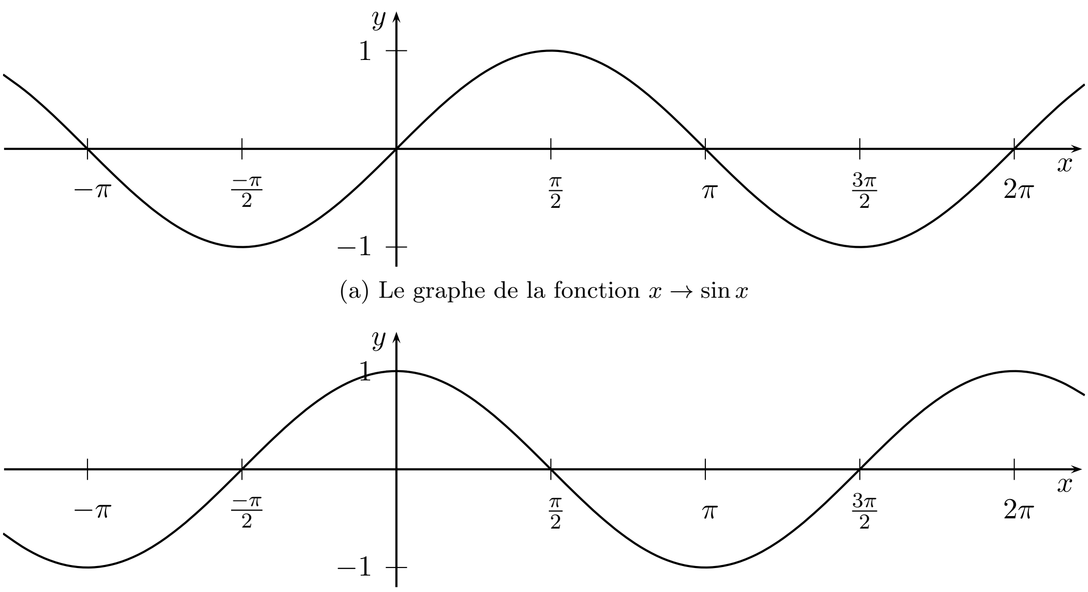
$$\cos(x + \pi) = -\cos x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x$$



(a) Les points $M(x)$ et $M(-x)$. (b) Les points $M(x)$ et $M(x + \pi)$.

FIGURE 2.11

La monotonie des fonctions sinus et cosinus est facile à voir intuitivement, voici leurs graphes :



(a) Le graphe de la fonction $x \to \sin x$

(b) Le graphe de la fonction $x \to \cos x$

FIGURE 2.12

2.3 Le changement de coordonnées $x' = x - a\ ,\ \ y' = y - b$

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé sur le plan affine euclidien $\mathbb{P}$. Soit Oxy le repère cartésien associé. Tout point $M \in \mathbb{P}$ est déterminé par ses coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

Nous identifierons $\mathbb{P}$ et $\mathbb{R}^2$ et écrirons $M = (x, y)$ (voir Figure 2.13 (a)).

Soient a, b deux réels fixés et $O' = (a, b) \in \mathbb{P}$:

$$\overrightarrow{OO'} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$$

Considérons maintenant le repère orthonormé $(O', \vec{e_1}, \vec{e_2})$: le repère cartésien associé $O'x'y'$ résulte d'appliquer une translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ au repère Oxy.

Soient (x', y') les coordonnées de M dans $O'x'y'$: $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}$. Afin d'éviter toute confusion avec les coordonnées (x, y), on se gardera d'écrire « $M = (x', y')$ ». Pour déterminer le lien entre (x', y') et (x, y) il suffit de remarquer que

$$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}$$

d'où $x = a + x'$ et $y = b + y'$, ou bien

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

On retiendra que :

✘ *Si a, b sont deux réels fixés, le changement de coordonnées*

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

définit un nouveau repère cartésien $O'x'y'$.
L'origine O' du nouveau repère est le point $O' = (a, b)$ (remarquer que $x = a \Rightarrow x' = 0$ et $y = b \Rightarrow y' = 0$).
Le repère $O'x'y'$ résulte d'appliquer à Oxy une translation de vecteur $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{(a, b)}$.

Voyons un exemple d'application au tracé de graphes (voir Figure 2.13 (b)) :

Exemple.

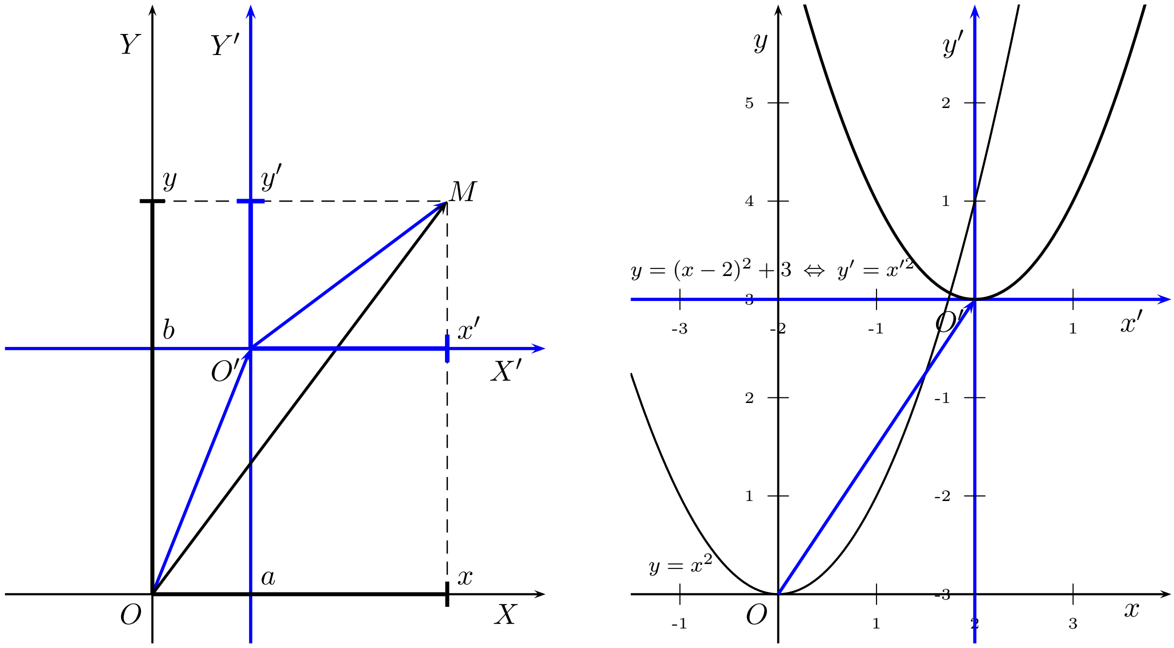
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

En complétant le carré, on trouve $f(x) = (x - 2)^2 + 3$. Remarquons que

$$y = (x - 2)^2 + 3 \ \Leftrightarrow\ y - 3 = (x - 2)^2$$

Considérons alors le changement de coordonnées $x' = x - 2,\ \ y' = y - 3$.

Le point $O' = (2,3)$ est l'origine du nouveau repère $O'x'y'$, qui résulte d'appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{(2,3)}$ au repère Oxy.



(a) Les coordonnées de M dans les deux repères (on a noté les axes en majuscules).

(b) Le graphe de $y = (x-2)^2 + 3$ et son lien géométrique avec le graphe de $y = x^2$ mis en évidence par un changement de coordonnées

FIGURE 2.13

Ecrivons l'équation de la courbe $y = f(x)$ dans les nouvelles coordonnées :

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = (x-2)^2 + 3 \;\Leftrightarrow\; y - 3 = (x-2)^2 \;\Leftrightarrow\; y' = x'^{\,2}$$

A partir du lien géométrique entre les repères $O'x'y'$ et Oxy, nous pouvons affirmer que la courbe $y' = x'^{\,2}$ résulte d'appliquer à la parabole $y = x^2$ une translation de vecteur $\overrightarrow{(2,3)}$.

Par conséquent le graphe de $f : x \to (x-2)^2 + 3$ est l'image du graphe de $x \to x^2$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{(2,3)}$ et le changement de coordonnées nous aide à donner l'allure du graphe de f.

Cet exemple illustre une situation plus générale :

> *Soit g une fonction donnée et considérons la fonction $f(x) = g(x-a) + b$.*
>
> *On a*
> $$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = g(x-a) + b \;\Leftrightarrow\; y - b = g(x-a) \;\Leftrightarrow\; y' = g(x')$$
> *où l'on a posé $x' = x - a$ et $y' = y - b$.*
>
> *Ce changement de coordonnées nous aide à tracer la courbe $y = f(x)$: elle est l'image de la courbe $y = g(x)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{(a,b)}$.*

Dans notre exemple, $f(x) = (x-2)^2 + 3 = g(x-2) + 3$, avec $g(x) = x^2$.

2.4 Les exposants fractionnaires

Le but de cette section est de définir les puissances rationnelles d'un réel positif et d'en préciser les règles de calcul à partir des propriétés des racines n-ièmes.

2.4.1 Puissances entières d'un nombre

Définition 2.4.1 Si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit a^n comme le produit de n facteurs égaux à a .

Par exemple : $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

Proposition 2.4.2 *On a alors les propriétés fondamentales suivantes*

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm} \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad \frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{si } n > m \\ \dfrac{1}{a^{m-n}} & \text{si } n < m \end{cases}$$

pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$ *et* $m,\ n$ *entiers positifs (*$a \neq 0$ *pour la dernière).*

Illustrons la dernière propriété : $\dfrac{a^5}{a^3} = a^2$, $\dfrac{a^2}{a^7} = \dfrac{1}{a^5}$.

Définition 2.4.3 On peut étendre la définition de a^n au cas $n \in \mathbb{Z}$ en posant $a^0 = 1$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$) et, pour m entier positif, $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ (si $a \neq 0$).

Ainsi, par définition, $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$.

Les propriétés de la Proposition 2.4.2 restent valides pour tous $n,\ m \in \mathbb{Z}$ (c'est la raison d'être de la nouvelle définition). La dernière s'écrit

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

Par exemple : $\dfrac{a^2}{a^7} = a^{-5} = \dfrac{1}{a^5}$, $\dfrac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^2 = \dfrac{1}{a^{-2}}$.

2.4.2 Exposants fractionnaires

Rappelons d'abord les règles de calcul avec les racines :

Proposition 2.4.4 *Pour tour réels $x,\ y \geq 0$ et pour tous entiers $n,\ m \geq 2$ on a*

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \text{ (ici, } y > 0 \text{)}$$

Les formules restent vraies pour des réels négatifs si les racines ont un sens : ordre impair.

On peut définir a^q si $a > 0$ et $q \in \mathbb{Q}$ de façon à conserver les propriétés des exposants entiers :

Définition 2.4.5 Pour tous $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on définit $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$ et on pose ensuite $a^{-(n/m)} = \dfrac{1}{a^{m/n}}$.

Par exemple : $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$, $a^{5/2} = (\sqrt[2]{a})^5$ et $a^{-(3/4)} = \dfrac{1}{a^{3/4}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{a})^3}$.

✘ **Proposition 2.4.6** *Pour tous réels $a,\ b > 0$ et pour tous $p,\ q \in \mathbb{Q}$ on a*

$$a^p a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad (ab)^p = a^p b^p \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = \frac{1}{a^{q-p}}$$

Remarques.

L'emploi des exposants fractionnaires est réservé aux réels positifs. Des définitions pour des réels négatifs conservant les propriétés de la Proposition précédente n'existent pas, comme le montrent les exemples suivants.

On pourrait écrire

$$(-8)^{5/3} = \left((-8)^{1/3}\right)^5 = (-2)^5 = -32$$

mais tout aussi légitimement

$$(-8)^{5/3} = (-8)^{10/6} = \left((-8)^{10}\right)^{1/6} = \left(2^{30}\right)^{1/6} = 2^5 = 32$$

ou encore

$$(-8)^{5/3} = (-8)^{10/6} = \left((-8)^{1/6}\right)^{10}$$

or $(-8)^{1/6}$ n'existe pas !

✘ *Des manipulations qui respectent les règles de la Proposition 2.4.6 effectuées sur des réels négatifs conduisent donc à des résultats contradictoires ou absurdes. On se gardera donc d'écrire et de manipuler, par exemple, $(-2)^{1/3}$, mais on pourra travailler avec $\sqrt[3]{-2}$ selon les règles de la Proposition 2.4.4*

2.4.3 Exposants réels

La définition de a^s si $a > 0$ et $s \notin \mathbb{Q}$ (par exemple $s = \sqrt{2}$ ou $s = \pi$) reste hors d'atteinte de l'approche précédent.

A l'aide des fonctions exponentielle et logarithme, nous définirons au second semestre

$$a^s = \exp(s \ln a)$$

cette définition coïncide avec les précédentes si $s \in \mathbb{Q}$ et les règles de calcul de la Proposition 2.4.6 restent vraies pour des exposants réels quelconques.

PCSO
COURS D'ANALYSE
Chapitre 3: Limites, continuité

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 3

Limites, continuité

Le concept de limite (d'une fonction en un point, d'une suite numérique) est omniprésent en analyse : nous le trouverons au cœur des notions de continuité, dérivée, développement limité et intégrale, ou encore dans la définition et recherche d'asymptotes...
Nous ne donnerons pas ici la définition mathématique de limite, on se bornera à une approche intuitive. Ceci nous interdit la démonstration des théorèmes basiques, mais ces résultats sont très faciles à appréhender et à partir d'eux on pourra travailler rigoureusement.

3.1 Vocabulaire

3.1.1 Limite de f en x_0

Définition 3.1.1 Soit x_0 un réel fixé.
Un voisinage de x_0 est un intervalle ouvert $]a, b[$ qui contient x_0.
Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. Nous écrivons $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (lire : « la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est l ») si nous pouvons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de l en prenant x suffisamment proche de x_0, mais non égal à x_0.

2. La notation $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (« la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est $+\infty$ ») signifie que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement grandes à condition de prendre x suffisamment proche de x_0 (mais non égal à x_0).

3. De même, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, signifie que les valeurs de $f(x)$ sont négatives et aussi grandes que l'on veut en valeur absolue lorsque x est suffisamment proche de x_0, mais non égal à x_0.

4. Dans tout autre cas, on dira que la limite de f en x_0 n'existe pas.

Exemples.
Nous donnerons dans les Sections 3.2, 3.3 et 3.5 des règles précises pour le calcul de limites. Néanmoins, il est utile de se confronter à quelques cas simples en se servant de nos « définitions » intuitives. Nous le ferons tout au long de cette première partie.

1. A partir du graphe de $f(x) = x^2$ ou d'une table de valeurs numériques de $f(x)$ pour x proche de $x_0 = 3$ on peut voir intuitivement que : $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

2. On a $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ car, en prenant x suffisamment proche de 0 ($x \neq 0$) les valeurs de x^2 sont arbitrairement petites et POSITIVES. Plus généralement, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair.

3. De même, $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ puisque $\lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$ et $(x-2)^2 > 0$ si $x \neq 2$ (voir Figure 3.2 (a)).

Remarque.
Dans les notations de la Définition 3.1.1, soulignons que

> – *Il n'est pas nécessaire que f soit définie en x_0.*
> – *Si f est définie en ce point, la valeur de $f(x_0)$ n'a aucune influence sur la valeur de $\lim_{x\to x_0} f(x)$ car x tend vers x_0 tout en restant distinct de x_0.*

La Figure 3.1 montre les graphes des fonctions

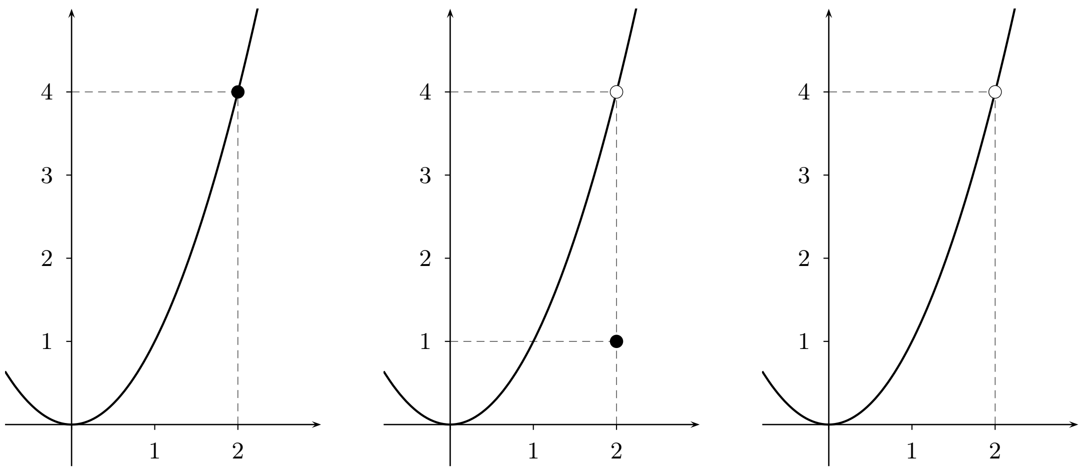
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ si $x \neq 2$ et $g(2) = 1$.

$h : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2$.

dans les trois cas, indépendamment de ce qui se passe en $x_0 = 2$, on a

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = 4$$



(a) Le graphe de f : $f(2) = 4$. (b) Le graphe de g : $g(2) = 1$. (c) h n'est pas définie en 2.

FIGURE 3.1

3.1.2 Limite à droite, à gauche, de f en x_0

Définition 3.1.2 (Limite à droite de f en x_0)
Soit x_0 un réel fixé et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, b[$ (avec $b > x_0$).

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. La notation $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (lire « la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par la droite est l ») signifie que nous pouvons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de l à condition de prendre x suffisamment proche de x_0 et strictement supérieur à x_0.

2. On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.
3. Dans tout autre cas, on dira que la limite à droite de f en x_0 n'existe pas.

Remarque.
Cette Définition ne diffère de la Définition 3.1.1 que pour ce qui est d'exiger que $x > x_0$. De même, si f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, x_0[$ (avec $a < x_0$) et si nous exigeons que $x < x_0$, on arrive aux définitions analogues de limite à gauche de f en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ n'existe pas.

La comparaison des définitions de limite en x_0 avec celles des limites en x_0^+ et x_0^- nous conduit au résultat suivant

✘ **Proposition 3.1.3** *Soit x_0 un réel fixé et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0). Alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

(l'équivalence est vraie aussi si l'on remplace le réel l par $+\infty$ ou $-\infty$). En particulier :

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemples.

1. Comme $|x| = x$ si $x > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$. De même, $|x| = -x$ si $x < 0$ implique $\lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ d'après la proposition.

2. On montre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas en considérant les limites à droite et à gauche :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

3. A partir de $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ n'existe pas.

On retiendra que

✘
- *Si n est pair,* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
- *Si n est impair,* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n}$ *n'existe pas.*

4. Montrons que $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{x+3}$ n'existe pas (voir Figure 3.2 (b)).

Notons que : $x \to -3^+ \Leftrightarrow x \to -3$ et $x > -3 \Leftrightarrow x+3 \to 0$ et $x+3 > 0 \Leftrightarrow x+3 \to 0^+$. Par conséquent

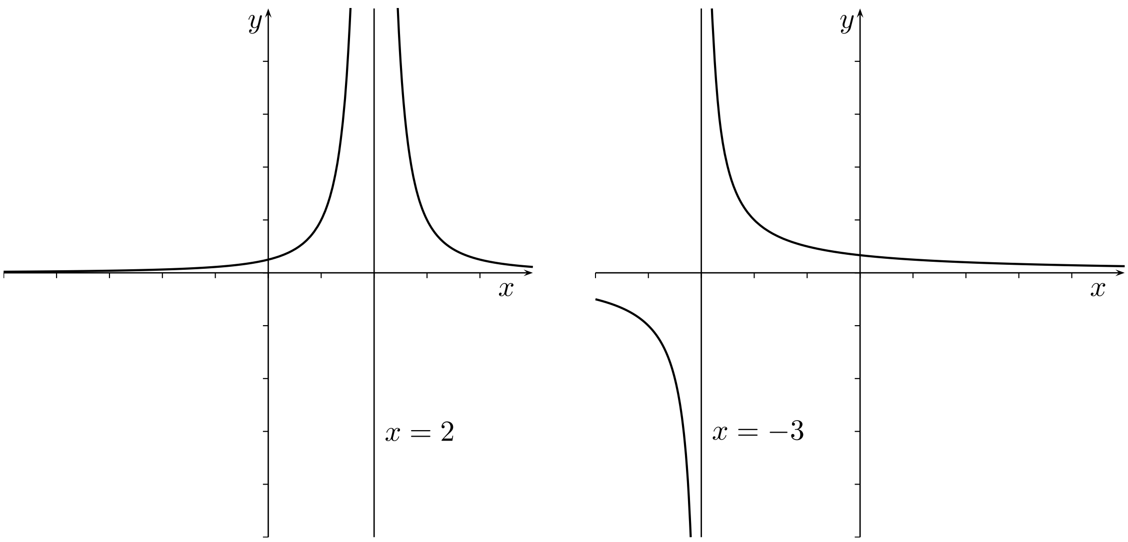
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

D'autre part, $x \to -3^- \Leftrightarrow x \to -3$ et $x < -3 \Leftrightarrow x+3 \to 0$ et $x+3 < 0 \Leftrightarrow x+3 \to 0^-$ et

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$$

d'où le résultat. Plus généralement :

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.
- *Si n est pair,* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$.
- *Si n est impair,* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^n}$ *n'existe pas.*



(a) Le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ (b) Le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$

FIGURE 3.2 – Deux exemples pour illustrer l'allure des fonctions de la forme $x \to \frac{1}{(x-a)^n}$ et leurs limites au point a

3.1.3 Limite de f à l'infini

Définition 3.1.4 (Voisinages de l'infini)

Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $]a, +\infty[$.

Un voisinage de $-\infty$ est un intervalle de la forme $]-\infty, b[$.

Définition 3.1.5 (Limite de f en $+\infty$)
Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (lire « la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est l ») signifie que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de l à condition de prendre x suffisamment grand.

2. De même, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement grandes à condition de prendre x suffisamment grand.

3. On définit de façon analogue $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
4. Dans tout autre cas, on dira que la limite de f en $+\infty$ n'existe pas.

Remarque.
Si f est une fonction définie sur un voisinage de $-\infty$ et si nous considérons x négatif et suffisamment grand en valeur absolue, on formule de façon analogue les définitions de limite de f en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ n'existe pas.

Exemples

1. On pourra justifier sans peine à partir de la définition que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. On a $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. En effet, nous pouvons rendre les valeurs de $\sqrt{x}$ arbitrairement grandes (par exemple plus grandes qu'un naturel donné N) à condition de prendre x suffisamment grand ($x > N^2$). De même, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

3. Montrons que $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas : lorsque x croît indéfiniment, les valeurs de $\cos x$ oscillent sans cesse entre -1 et 1 et ne s'approchent d'aucun réel fixé. Plus précisément, il suffit de considérer les suites $a_n = 2n\pi$ et $b_n = \pi + 2n\pi$: elles tendent vers $+\infty$ et $\cos a_n = 1$, $\cos b_n = -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Limites et opérations

Nous résumons dans les tableaux qui suivent les principaux résultats concernant la limite de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions.

3.2.1 Limites d'une somme et d'un produit

✘ **Proposition 3.2.1** *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. On a les résultats suivants :*

SI		*ALORS*	
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$l \in \mathbb{R}$	$l' \in \mathbb{R}$	$l + l'$	ll'
$+\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l' > 0 \\ -\infty & \text{si } l' < 0 \\ \textbf{F.I.} \text{ « } (+\infty)0 \text{ »} & \text{si } l' = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	***F.I.*** « $(+\infty) + (-\infty)$ »	$-\infty$
$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } l' > 0 \\ +\infty & \text{si } l' < 0 \\ \textbf{F.I.} \text{ « } (-\infty)0 \text{ »} & \text{si } l' = 0 \end{cases}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dans le tableau :
- *« **F.I** » signifie « forme indéterminée » : il n'y a pas de résultat général possible et il faut voir au cas par cas.*
- *Nous avons ici trois formes indéterminées : « $(+\infty)0$ », « $(-\infty)0$ » et « $(+\infty)+(-\infty)$ » (qu'on pourra trouver sous les formes « $(+\infty) - (+\infty)$ » ou « $(-\infty) - (-\infty)$ »).*
- *On a des résultats analogues si l'on remplace x_0 par x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.*

Si les limites sont finies, la limite d'une somme est égale à la somme des limites et la limite d'un produit est égale au produit des limites. Grâce à ces propriétés et à partir de $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (pour $c \in \mathbb{R}$, c note aussi la fonction constante égale à c) on montre que

✘ **Corollaire 3.2.2** *Si P est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.*

3.2.2 Limites d'un quotient

Par souci d'exhaustivité, nous donnons les résultats portant sur les limites du quotient $\frac{f}{g}$. Remarquez cependant qu'en écrivant $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$, il suffirait d'étudier le cas $\frac{1}{g}$ et d'utiliser ensuite les règles pour la limite d'un produit.

Proposition 3.2.3 *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. On a les résultats suivants :*

✘

SI		*ALORS*
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$l \in \mathbb{R}$	$l' \in \mathbb{R},\ l' \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$
$l \in \mathbb{R}$	0	***F.I.*** « $\dfrac{l}{0}$ »
$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$l' \in \mathbb{R},\ l' \neq 0$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l' > 0 \\ -\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$
$-\infty$	$l' \in \mathbb{R},\ l' \neq 0$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } l' > 0 \\ +\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$
$\pm\infty$	0	***F.I.*** « $\dfrac{\pm\infty}{0}$ »
$\pm\infty$	$\pm\infty$	***F.I.*** « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ »

- *Dans « $\dfrac{l}{0}$ », on doit distinguer les formes indéterminées « $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{l}{0}$ » avec $l \neq 0$.*
- *On a des résultats analogues si l'on remplace x_0 par x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.*

Si les limites sont finies, la limite d'un quotient est le quotient des limites lorsque la limite du dénominateur est non nulle. En particulier, à l'aide du Corollaire 3.2.2, on a

Corollaire 3.2.4 *Soient P et Q deux polynômes, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, pour tout réel x_0 tel que $Q(x_0) \neq 0$.*

Remarque.

Nous pouvons lever l'indétermination dans les formes « $\dfrac{l}{0}$ » (avec $l \neq 0$) et « $\dfrac{\pm\infty}{0}$ » si le dénominateur garde un signe constant :

Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ et que $g(x) > 0$ dans un voisinage de x_0, privé de x_0 (on note de façon un peu abusive $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0^+$). Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty$.

De même, si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ et $g(x) < 0$ dans un voisinage de x_0, privé de x_0 (on note $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0^-$), alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = -\infty$. En écrivant $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$, nous obtenons :

✘

SI		*ALORS*
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$l \in \mathbb{R}\ l \neq 0$	0^+	$\begin{cases} +\infty & \textit{si } l > 0 \\ -\infty & \textit{si } l < 0 \end{cases}$
$l \in \mathbb{R}\ l \neq 0$	0^-	$\begin{cases} -\infty & \textit{si } l > 0 \\ +\infty & \textit{si } l < 0 \end{cases}$
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$

3.2.3 Exemples de calcul

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - 3x^2)$. Il s'agit d'une forme indéterminée « $(+\infty) - (+\infty)$ ».

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - 3x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^5(1 - \dfrac{3}{x^3}) = +\infty$ (limite de la forme « $(+\infty)1$ »).

2. Calculer les limites en $+\infty$ et en 0 de la fonction $x \to \dfrac{x^5 - 3x^2}{2x^5 + x^4}$.

La limite en $+\infty$ se présente sous la forme « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ». Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 3x^2}{2x^5 + x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5\left(1 - \frac{3}{x^3}\right)}{x^5\left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^3}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

La limite en 0 est une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ». On obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5-3x^2}{2x^5+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(x^3-3\right)}{x^4\left(2x+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\,\frac{x^3-3}{2x+1} = -\infty$$

(forme « $(+\infty)(-3)$ »)

3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\,-2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$. Il s'agit d'une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

Ceci indique que -2 est racine du numérateur et du dénominateur : factorisons alors les deux trinômes pour tenter de lever l'indétermination. On a

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+1}{x+2}$$

pour tout $x \neq -2$. Remarquons que la limite

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x+2}$$

est encore une forme indéterminée, maintenant du type « $\dfrac{-1}{0}$ ».

Considérons les cas $x \to -2^-$ et $x \to -2^+$:

i) On a : $x \to -2^- \Leftrightarrow x \to -2$ et $x < -2 \Leftrightarrow x+2 \to 0$ et $x+2 < 0 \Leftrightarrow x+2 \to 0^-$, ce qui donne
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to -2^-} = \frac{x+1}{x+2} = +\infty$$
(limite de la forme « $\dfrac{-1}{0^-}$ »)

ii) De même, $x \to -2^+ \Leftrightarrow x \to -2$ et $x > -2 \Leftrightarrow x+2 \to 0$ et $x+2 > 0 \Leftrightarrow x+2 \to 0^+$, d'où
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to -2^+} = \frac{x+1}{x+2} = -\infty$$
(limite de la forme « $\dfrac{-1}{0^+}$ »)

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to\,-2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$ n'existe pas puisque les limites à gauche et à droite sont différentes.

3.3 Limites et inégalités

3.3.1 Introduction

Considérons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$: nous ne pouvons pas nous ramener au tableau sur la limite d'un quotient (Prop. 3.2.3) car la limite en $+\infty$ de la fonction cosinus n'existe pas.

De la même façon, dans le calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+\sin x)$, nous ne pouvons pas appliquer les résultats de la section précédente sur la limite d'une somme (Prop. 3.2.1).

Cependant, il est intuitivement évident que x « l'emporte » dans les deux cas :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} (x + \sin x) = +\infty$$

car les fonctions $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$ sont bornées.

Comme nous allons voir tout de suite, les limites $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existent pas. Ainsi, dans le calcul de $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$, nous ne pouvons pas utiliser le tableau sur la limite d'un produit (Prop. 3.2.1.) alors qu'on peut conjecturer que

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

puisque x, qui tend vers 0, l'emporte sur la fonction bornée $x \to \sin(1/x)$.

Nous donnerons dans cette section les outils pour traiter rigoureusement ce type de limites, mais voyons avant cela des exemples de fonctions bornées qui présentent une infinité d'oscillations entre -1 et 1 dans tout voisinage, si petit soit-il, de 0 (voir Figure 3.3) :

> *Soit λ un réel non nul fixé.*
> *Considérons les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $x \to \sin \frac{\lambda}{x}$ et $x \to \cos \frac{\lambda}{x}$:*
>
> – *Elles sont bornées sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (minorées par -1, majorées par 1)*
>
> – *Leurs limites à droite et à gauche en 0 n'existent pas.*

En effet, soit $\lambda = \pi$. Etudions les limites à droite et à gauche en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.

Comme $-1 \leq \sin \frac{\pi}{x} \leq 1$ les limites de f en 0^+ et 0^- ne sont pas infinies. Remarquons que

$$\sin \frac{\pi}{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad \text{, pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{\pi}{x} = -1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \quad \text{, pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

En particulier, si nous considérons les suites numériques $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$a_n = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \frac{2}{1+4n} \qquad\qquad b_n = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} = \frac{2}{3+4n}$$

on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ avec $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $f(a_n) = 1$, $f(b_n) = -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci montre que les valeurs de $f(x)$ oscillent indéfiniment entre -1 et 1 lorsque x s'approche de 0 par des valeurs supérieures à 0. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$ n'existe pas.

Un argument analogue montre que $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin \frac{\pi}{x}$ n'existe pas (la fonction f est impaire : il suffit de considérer les suites $(-a_n)_{n\geq 0}$ et $(-b_n)_{n\geq 0}$).

Le même raisonnement s'applique au cas général (on a choisi $\lambda = \pi$ pour rendre plus simple l'écriture des suites (a_n) et (b_n)).

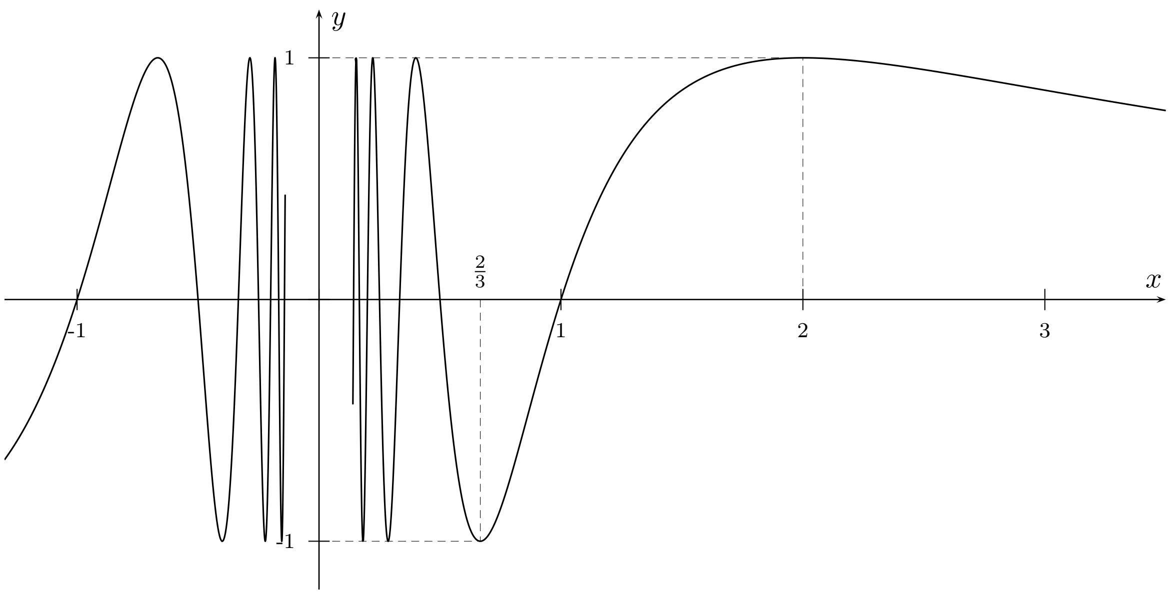


FIGURE 3.3 – Le graphe de $f : x \to \sin \dfrac{\pi}{x}$. Près de 0 les oscillations se tassent et le tracé est impossible. Remarquons que $b_0 = \frac{2}{3}$ et $a_0 = 2$. La fonction f est strictement décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ (exercice), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (voir l'exemple 1 de la Section 3.5).

3.3.2 Passage à la limite dans des inégalités

✘ **Proposition 3.3.1** *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *sont finies et si*

$$f(x) \geq g(x)$$

pour tout x *dans un voisinage de* x_0 $(x \neq x_0)$*, alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

On a des résultats analogues si l'on remplace x_0 *par* x_0^+, x_0^-, $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Remarque.
Les inégalités strictes ne sont pas conservées, en général, par passage à la limite :

- Si $-1 < x < 1$ et $x \neq 0$, on a $0 < x^4 < x^2$.
  Ces inégalités strictes dans un voisinage de 0 (privé de 0) ne sont pas conservées si l'on considère la limite en 0 : $0 = \lim\limits_{x \to 0} 0 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = \lim\limits_{x \to 0} x^4$
- Si $x > 1$ on a $x < x^2$ d'où (réels positifs) : $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$.
  A nouveau, cette inégalité stricte dans un voisinage de $+\infty$ n'est pas conservée par passage à la limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
- Pour tout réel x on a $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 1$, cependant $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$.

3.3.3 Limites infinies et inégalités

✘ **Proposition 3.3.2** *Supposons que*

$$f(x) \geq g(x)$$

dans un voisinage de x_0, privé de x_0.

1. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$.

On a des résultats analogues si l'on remplace x_0 par x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple.
Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin x)$. Remarquons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin x$ n'existent pas : nous ne pouvons pas appliquer les résultats sur la limite d'une somme.

– Puisque $x + \sin x \geq x - 1$ pour tout réel x (en particulier dans un voisinage de $+\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$ (d'après la partie 1. de la Proposition).

– De même, $x + 1 \geq x + \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en particulier sur un voisinage de $-\infty$). Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin x) = -\infty$ (appliquer 2.).

3.3.4 Le Théorème des gendarmes

✘ **Théorème 3.3.3** ***(Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »)***
Si

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

pour tout x dans un voisinage de x_0, privé de x_0, et si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

On a des résultats analogues si l'on remplace x_0 par x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque.

Dire que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ signifie que nous pouvons rendre

$$d(f(x), 0) = |f(x) - 0| = |f(x)|$$

(la distance entre $f(x)$ et 0) arbitrairement petite à condition de prendre x suffisamment proche de x_0, mais non égal à x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} d(f(x), 0) = \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

et par conséquent

> *On a*
> $$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$$
> *Cette équivalence est exploitée souvent dans le cadre d'application du Th. des gendarmes.*
>
> *Plus généralement, si $l \in \mathbb{R}$, on dispose des équivalences*
> $$\lim_{x\to x_0} g(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} (g(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |g(x) - l| = 0$$

Exemples.

1. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Nous ne pouvons pas nous ramener au tableau sur la limite d'un quotient car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ n'existe pas.

Soit $x > 0$, en multipliant $-1 \leq \sin x \leq 1$ par le réel positif $\dfrac{1}{x}$ on a $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, le Th. d'encadrement implique $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

On aurait pu écrire aussi $0 \leq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et appliquer le Th. pour montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 0$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ (voir Figure 3.4).

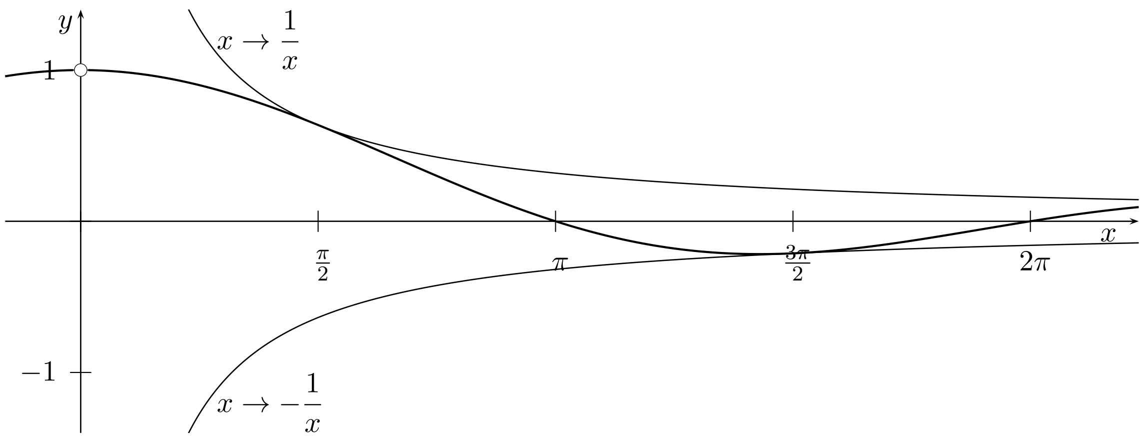


FIGURE 3.4 – Les graphes de $x \to -\frac{1}{x}$, $x \to \frac{\sin x}{x}$ et $x \to \frac{1}{x}$ pour $x > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
Nous montrerons dans la Section 3.6 que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$.

Notons que $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ n'existe pas : on ne peut pas appliquer les résultats sur la limite d'un produit.

Soit $x \neq 0$. A partir de l'inégalité $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$, on obtient $-x^2 \leq x^2 \sin\dfrac{1}{x} \leq x^2$ (produit par le réel positif x^2). Puisque $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, il vient $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

On aurait pu conclure aussi à partir de l'inégalité $0 \leq \left| x^2 \sin\dfrac{1}{x} \right| \leq x^2$.

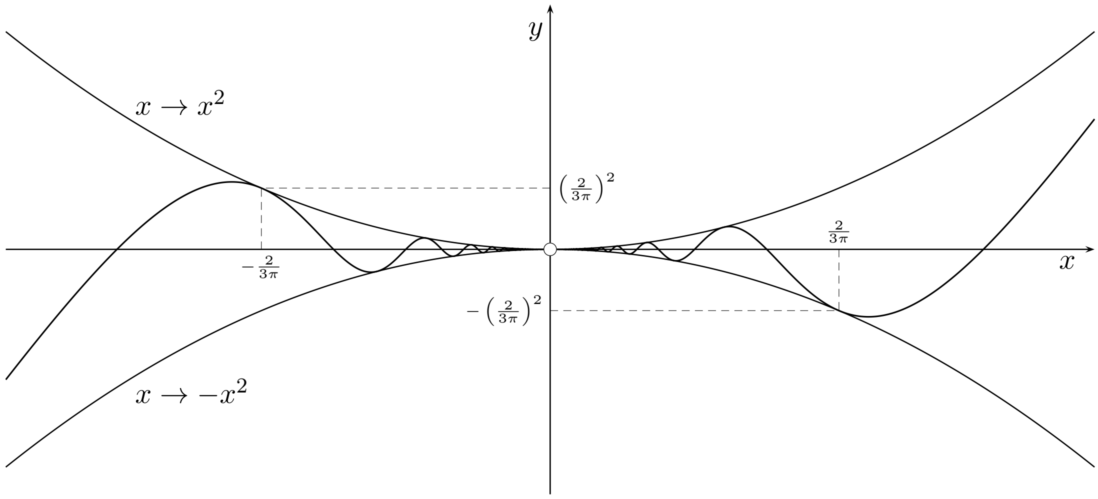


FIGURE 3.5 – Les graphes de $x \to -x^2$, $x \to x^2 \sin\frac{1}{x}$ et $x \to x^2$ au voisinage de 0. Les abscisses des points de contact entre la sinusoïdale et les paraboles sont les solutions de $\sin\frac{1}{x} = \pm 1$.

Corollaire 3.3.4 *S'il existe une constante $M \geq 0$ telle que*

$$|f(x)| \leq M$$

pour tout x dans un voisinage de x_0 ($x \neq x_0$) et si g est une fonction vérifiant

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$$

On a des résultats analogues si l'on remplace x_0 par x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration : Il suffit d'écrire $0 \leq |f(x)g(x)| \leq M\,|g(x)|$. L'hypothèse sur g implique $\lim\limits_{x\to x_0} M\,|g(x)| = 0$ et le Th. d'encadrement donne $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)g(x)| = 0$, ce qui équivaut à la conclusion du corollaire □

Exemple.
On a $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ car $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$ dans un voisinage de 0 privé de 0 (en fait dans $\mathbb{R} - \{0\}$) et $\lim_{x\to 0} x = 0$.

On peut appliquer directement le Th d'encadrement à partir de l'inégalité $0 \leq \left|x\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ pour déduire $\lim_{x\to 0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right| = 0$ et donc $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$.

3.4 Continuité

3.4.1 Définitions

Définition 3.4.1 (Fonction continue en x_0)
Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. Si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

on dit que f est continue en x_0.

D'un point de vue géométrique et intuitif, la continuité d'une fonction en TOUS les points d'un intervalle signifie que sa courbe représentative ne présente aucune interruption : le graphe peut être tracé sans jamais lever le crayon du papier. Nous formulerons au second semestre cette propriété très agréable rigoureusement (Th. des valeurs intermédiaires).

On verra tout au long de l'année que les fonctions continues sur un intervalle présentent aussi d'autres propriétés importantes : elles admettent des primitives et sont intégrables sur tout segment, l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle...

Définition 3.4.2 (Continuité à droite, à gauche, en x_0)

1. Si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0, b[$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, alors on dit que f est continue à droite en x_0.
2. Si f est définie sur un intervalle de la forme $]a, x_0]$ et $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, alors on dit que f est continue à gauche en x_0.

A partir de la Proposition 3.1.3, on a

Proposition 3.4.3 *f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.*

3.4.2 Continuité des fonctions usuelles

Le Corollaire 3.2.2 s'écrit

> *Si P est un polynôme, la fonction $x \to P(x)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$*

Grâce au Corollaire 3.2.4 on a

> *Soient P et Q deux polynômes. La fonction $x \to \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue en tout point x_0 de son ensemble de définition ($Q(x_0) \neq 0$)*
> *Les fonctions de cette forme s'appellent « fractions rationnelles ».*

Nous avons déjà vu que $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$. Calculons les limites de la fonction valeur absolue en tout autre point x_0 :

– Soit $x_0 > 0$ fixé, pour tout x dans un voisinage de x_0 on a $|x| = x$. Par conséquent $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = |x_0|$ et la fonction est continue en x_0.

– Si maintenant on fixe $x_0 < 0$, on a $|x| = -x$ dans un voisinage de ce point et $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = \lim\limits_{x \to x_0} -x = -x_0 = |x_0|$.

Ainsi, confirmant l'intuition à partir du graphe, nous avons montré que

> *La fonction valeur absolue est continue en tout point de $\mathbb{R}$*

La continuité des fonctions polynômes $x \to x^n$ signifie que leurs graphes ne présentent pas de coupures ; par symétrie (voir Section 2.2.3), il en est de même pour les graphes des fonctions racines et nous pouvons accepter intuitivement la continuité de ces fonctions :

> 1. *Si n est pair, la fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est continue à droite en 0, et continue en tout point $x_0 > 0$.*
> 2. *Si n est impair la fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$*

La continuité des fonctions sinus et cosinus est claire du point de vue géométrique. Dans les notations de la Section 2.2.5, si x (mesure en radians d'un angle) tend vers x_0, alors le point $M(x) = (\cos x, \sin x)$ sur le cercle trigonométrique se rapproche du point $M(x_0)$, d'où $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$:

> *Les fonctions $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.*

A partir des résultats sur les limites d'une somme, d'un produit et d'un quotient on a

> **Proposition 3.4.4** *Soient f et g deux fonctions continues en x_0 et λ un réel. Alors*
> 1. *Les fonctions $f + g$, fg et λf sont continues en x_0.*
> 2. *Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0*

3.5 Limites et composition de fonctions

> **Proposition 3.5.1** *Soient l et l' deux réels. Si*
>
> $$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to l} g(x) = l'$$
>
> *alors*
>
> $$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l'$$
>
> *On a des résultats analogues en mettant l^+ ou l^- à la place de l, ou encore si l'on remplace l ou l' par $\pm\infty$. Enfin, on peut considérer à la place de x_0 : x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.*

Pour nous aider à appliquer la proposition dans des calculs concrets, nous disposons du

✘

> Formalisme du changement de variable dans une limite :
> *Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to l} g(x) = l'$.*
> *Le formalisme consiste à introduire une nouvelle variable $u = f(x)$, l'hypothèse sur la limite de f s'écrit :*
>
> $$\textit{si} \quad x \to x_0 \quad \textit{alors} \quad u \to l$$
>
> *et donc*
>
> $$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{u\to l} g(u) = l'$$
>
> *où la dernière égalité utilise l'hypothèse sur la limite de g.*

Exemples.

1. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x}$.

Soit $u = u(x) = \frac{1}{x}$: si $x \to +\infty$, alors $u \to 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = \lim\limits_{u\to 0^+} \cos u = \cos 0 = 1$, grâce à la continuité de la fonction cosinus en 0.
La même technique permet de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$.

2. Pour calculer $\lim\limits_{x\to-1} \sqrt{3x^2-2x+1}$, on considère la nouvelle variable $u = u(x) = 3x^2-2x+1$. D'après la continuité de la fonction polynôme u en $x = -1$, si $x \to -1$, alors $u \to u(-1) = 6$. La continuité de la fonction racine carrée au point $u = 6$ nous permet de conclure :

$$\lim_{x\to-1} \sqrt{3x^2-2x+1} = \lim_{u\to 6} \sqrt{u} = \sqrt{6}$$

cet exemple illustre un cas général :

> **Corollaire 3.5.2** *Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0*

Démonstration : Par hypothèse $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to f(x_0)} g(x) = g(f(x_0))$. La proposition permet de conclure : $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$ □

3.6 Deux limites remarquables

Nous allons déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Il s'agit de deux formes indéterminées du type « $\frac{0}{0}$ ».

Les démonstrations qui suivent illustrent bien de notions introduites jusqu'à présent : définition géométrique du sinus et cosinus, manipulations des inégalités, parité, Th. d'encadrement, continuité, changement de variable dans une limite... De ce fait, leur lecture sera du plus grand intérêt.

✘ **Théorème 3.6.1**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration : Soit $x \in]\,0,\ \frac{\pi}{2}\,[$ *fixé.*

Considérons le cercle trigonométrique (cercle de centre O *et rayon* 1*) sur le repère* Ouv *(voir Figure 3.6).*

Soit $\angle\ AOM$ *l'angle de* x *radians :* x *est la longueur de l'arc* AM *sur le cercle et* $M = (\cos x,\ \sin x)$.

Soit P *la projection de* M *sur l'axe* Ou *:* $P = (\cos x,\ 0)$.

Soit T *l'intersection de la droite* OM *avec la droite tangente au cercle au point* $A = (1,\ 0)$.
On a

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT}$$

puisque $\overline{OA} = 1$.

Remarquons que $x =$ *longueur de l'arc* $AM < \overline{AT}$.
En effet, rappelons d'abord que l'aire d'un secteur circulaire déterminé par un angle de α *radians sur un cercle de rayon* r *est* $\frac{\alpha}{2}r^2$*. En particulier, l'aire du secteur circulaire* OAM *est* $\frac{x}{2}$*. Or cet aire est inférieure à celle du triangle* OAT *qui est* $\frac{1}{2}\overline{AT}$ *d'où le résultat.*

Nous avons ainsi

$$\overline{PM} < \overline{AM} < \textit{longueur de l'arc } AM < \overline{AT}$$

et par conséquent

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

pour tout $x \in]\,0,\ \frac{\pi}{2}\,[$.

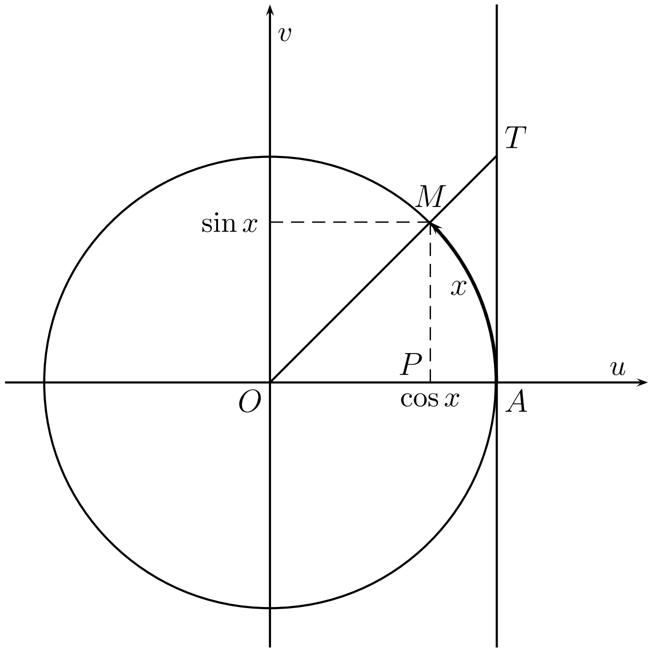


Figure 3.6

En multipliant par $\dfrac{1}{x}$ *(positif) les membres de l'inégalité* $\sin x < x$, *on obtient*

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

Multiplions $x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *par le réel positif* $\dfrac{\cos x}{x}$, *il vient*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}$$

Ainsi, nous avons l'encadrement

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

pour tout $x \in]\,0,\ \frac{\pi}{2}\,[$.

Les fonctions $x \to \cos x$ *et* $x \to \frac{\sin x}{x}$ *sont paires : l'encadrement est vrai aussi sur* $]-\frac{\pi}{2},\ 0\,[$ *et donc pour tout* x *dans* $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\,[-\{0\}$.

En résumé, on a

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

pour tout x *dans un voisinage de* 0 $(x \neq 0)$ *et nous pouvons appliquer le Th. d'encadrement pour conclure car* $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ *(continuité de la fonction cosinus en* 0*).*

On a bien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□

Corollaire 3.6.2
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Démonstration : A partir de l'identité $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$, *en posant* $t = \frac{x}{2}$, *on obtient* $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ *et, pour tout* $x \neq 0$, *on a*

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 x/2}{x^2} = \frac{\sin^2\ x/2}{x^2/2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\ x/2}{x^2/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\ x/2}{x/2}\right)^2$$

Il suffira de montrer que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ x/2}{x/2} = 1$$

En posant $u = u(x) = \frac{x}{2}$, *on a* $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$, *d'où (changement de variable dans une limite)*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ x/2}{x/2} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin\ u}{u} = 1$$

d'après le Théorème. □

3.7 Prolongement par continuité

Introduisons cette notion à l'aide d'un exemple :

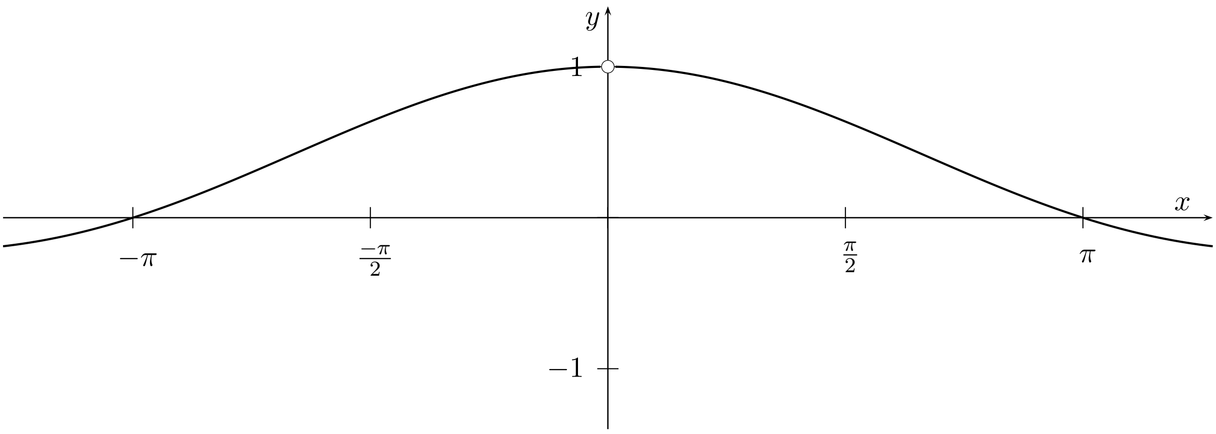


FIGURE 3.7 – Le graphe de $x \to \frac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0

Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R} - \{0\}$.

La fonction f n'est pas définie en 0 : on ne peut pas parler de la continuité de f en 0.

Cependant, on sait (Th. 3.6.1) que
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Considérons alors la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La nouvelle fonction F coïncide avec f sur $\mathbb{R} - \{0\}$. En plus, elle est continue en 0 :

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = F(0)$$

On dit que F est le prolongement par continuité de f en 0. Plus généralement :

Proposition 3.7.1 *Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf en x_0. Soit D_f l'ensemble de définition de f.*
Supposons que

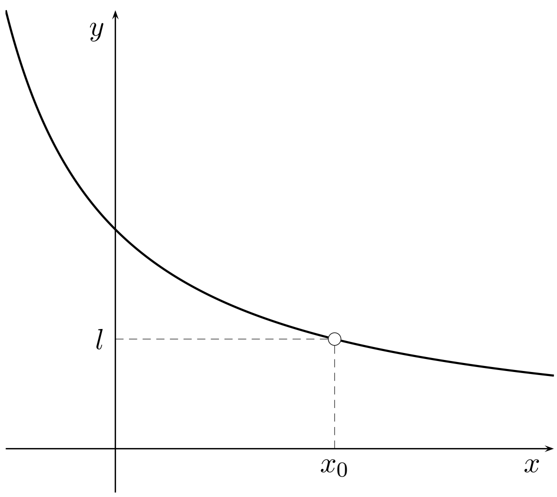
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

et définissons alors la fonction $F : D_f \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

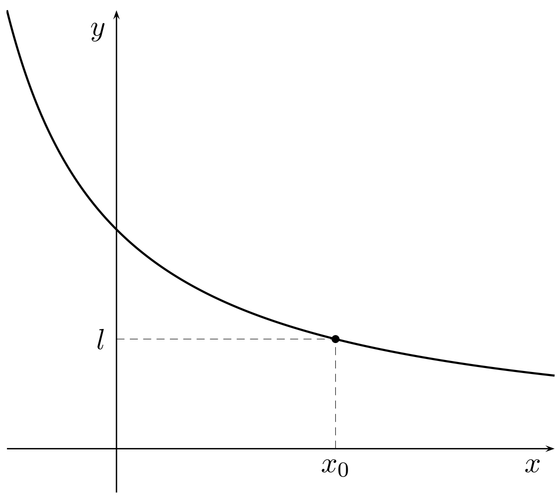
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in D_f \\ l & \textit{si } x = x_0 \end{cases}$$

Alors la fonction F qui, par définition, coïncide avec f sur D_f, est définie et continue en x_0.
La fonction F s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0

Démonstration : Comme $F(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$, on a $\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l = F(x_0)$ d'où la continuité de F en x_0. □



(a) Le graphe de f : la fonction n'est pas définie en x_0 mais sa limite en ce point est finie (l)



(b) Le graphe de F : la fonction est continue en x_0 et coïncide avec f si $x \neq x_0$.

FIGURE 3.8 – Une fonction (f) et son prolongement par continuité en x_0 (F)

Remarque.

Par abus de langage, le prolongement par continuité (F) se note souvent comme la fonction initiale (f).

Remarque.

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition.

Si f n'est pas définie en x_0 mais sa limite à droite en ce point est finie ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$), alors la fonction $\Phi : D_f \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

coïncide avec f sur D_f, est définie en x_0 et continue à droite en ce point.

La fonction Φ s'appelle le **prolongement par continuité à droite** de f en x_0. On définit de façon analogue le **prolongement par continuité à gauche**.

Exemples.

1. Notons que la fonction $f : x \to \dfrac{|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ est donnée par

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas prolongeable par continuité en 0 car sa limite en 0 n'existe pas, mais

- La fonction Φ définie par $\Phi(0) = 1$ et $\Phi(x) = f(x)$, pour tout $x \neq 0$, est le prolongement par continuité à droite de f en 0.

- La fonction Ψ définie par $\Psi(0) = -1$ et $\Psi(x) = f(x)$, si $x \neq 0$, est le prolongement par continuité à gauche de f en 0.

2. Les fonctions $x \to \frac{1}{x^2}$, $x \to \frac{1}{x}$ et $x \to \sin\frac{1}{x}$, qui ne sont pas prolongeables par continuité en 0, ne le sont pas non plus ni à droite ni à gauche.

PCSO
COURS D'ANALYSE
Chapitre 4: Dérivées

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 4

Dérivées

4.1 Introduction

La dérivée est un outil très important pour étudier une fonction.

Le calcul de $f'(x_0)$, la dérivée de la fonction f en x_0, permet de déterminer la droite tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 : comme nous verrons dans ce chapitre, cette droite est la fonction affine qui approche le mieux f au voisinage de x_0.

Si la dérivée rend possible une étude locale de la fonction, elle donne aussi des informations de nature globale : si f' garde un signe constant sur un intervalle, alors on peut déterminer la monotonie de f sur cet intervalle. Le signe de f'' nous renseignera sur la concavité et la convexité de f.

Signalons que la modélisation mathématique des phénomènes du monde réel dans toutes les disciplines scientifiques passe presque toujours par l'écriture d'une équation différentielle, c'est-à-dire une relation entre une fonction (inconnue) et ses dérivées.

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1 (Taux d'accroissement, dérivée de f en x_0)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0.
On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.
Dans ce cas, sa valeur s'appelle dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.
Le quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle taux d'accroissement de f entre x et x_0.

Remarque.
Le changement de variable $x = x_0 + h$ permet d'écrire

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Exemple.
Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ au point $x_0 = 3$ à l'aide de la définition.

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

et par conséquent $f'(3) = 6$.

Comme vous savez, on dispose de formules qui nous éviteront dans la plupart des cas l'utilisation directe de la définition (voir Section 4.3). Ici $f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$, d'où $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Cependant, il est nécessaire de se familiariser avec la définition de dérivée : c'est à partir d'elle qu'on montre tous les résultats. Par ailleurs, les formules ne s'appliqueront pas toujours et un calcul direct sera parfois nécessaire.

Définition 4.1.2 (Dérivée à droite, à gauche)

1. Si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0, b[$, on définit la dérivée à droite de f en x_0 par
$$f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
si cette limite existe et est finie.
2. Si f est définie sur un intervalle de la forme $]a, x_0]$, on définit la dérivée à gauche de f en x_0 par
$$f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
si cette limite existe et est finie.

Remarque.
A partir du lien entre la limite en x_0 et les limites à droite et à gauche en ce point, on a

$$f'(x_0) = m \;\Leftrightarrow\; f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = m$$

en particulier, si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors $f'(x_0)$ n'existe pas.

Exemple.
Calculons les dérivées à droite et à gauche en 0 de la fonction $f(x) = |x|$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

d'où $f'_d(0) = 1$. De même

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

et $f'_g(0) = -1$.

Ainsi, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Comme nous verrons dans la Section 4.2, ceci correspond géométriquement au fait que le graphe de $x \to |x|$ n'admet pas de tangente en 0 (voir Figure 2.1 (a)). Les dérivées à droite et à gauche en 0 donnent la pente des demi-tangentes en ce point : $y = x$ et $y = -x$.

Précisons sans plus tarder le lien entre dérivabilité et continuité :

| **Théorème 4.1.3** *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Démonstration : Pour tout x dans un voisinage de x_0 ($x \neq x_0$) on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

or, grâce à l'hypothèse

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Remarques.

1. Le Th peut s'énoncer aussi :

Si f n'est pas continue en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0

2. La continuité d'une fonction en x_0 n'implique pas sa dérivabilité en x_0 : la fonction valeur absolue est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en ce point.

4.1.2 Significations du taux d'accroissement

Nous verrons dans la section suivante que

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

(le taux d'accroissement de f entre x_0 et x_1) est la pente de la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. On en déduira la relation entre $f'(x_0)$ et la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0.

On précisera ici un autre aspect mathématique intéressant du taux d'accroissement (son lien avec la monotonie). Nous donnerons aussi quelques exemples simples pour illustrer comment cette notion apparait en sciences.

Signe du taux d'accroissement et monotonie.
Si f est une fonction définie sur un intervalle I, on voit facilement que

1. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si

   $$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \geq 0 \quad (\text{resp. } \leq 0)$$

   quels que soient $x_0,\ x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$.
2. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si

   $$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} > 0 \quad (\text{resp. } < 0)$$

   quels que soient $x_0,\ x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$.

A partir de ces faits, nous ferons le lien au Chapitre 5 entre le signe de la dérivée de f sur I et sa monotonie sur cet intervalle.

Vitesse instantanée.
Considérons une particule qui se déplace sur un axe et dont l'abscisse à l'instant t est $s(t)$. Le rapport $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ représente la vitesse moyenne de la particule entre les instants t_0 et t. Nous définirons la vitesse instantanée $v(t_0)$ de la particule à l'instant t_0 comme la limite de ces vitesses moyennes lorsque t tend vers t_0 :

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

Souvent, si f est une grandeur qui dépend du temps t, son taux d'accroissement sera interprété comme la « vitesse moyenne » de variation de f et sa limite $f'(t_0)$ comme la « vitesse instantanée » de variation de la grandeur f à l'instant t_0.

Par exemple, si la fonction dérivable $t \to f(t)$ donne une approximation de l'effectif d'une population animale ou végétale en fonction du temps, sa dérivée $t \to f'(t)$ sera interprétée comme la vitesse de croissance de la population.

Si la fonction $[C](t)$ est la concentration à l'instant t d'une substance C engagée dans une réaction, on s'intéressera en cinétique chimique à sa dérivée $[C]'(t)$, qu'on interprétera comme la vitesse de réaction de C.

Intensité du courant électrique.
Si $q(t)$ est la charge électrique qui traverse une section plane S donnée d'un fil électrique pendant l'intervalle de temps $[0, t]$, alors l'intensité moyenne du courant entre les instants t_0 et t_1 est définie par

$$\frac{q(t_1) - q(t_0)}{t_1 - t_0}$$

qu'on peut interpréter comme le débit moyen de charge qui traverse la surface S. La limite si t_1 tend vers t_0 de ce taux d'accroissement est $I(t_0)$, l'intensité du courant à l'instant t_0. Ainsi $I(t_0) = q'(t_0)$ et l'intensité est le débit instantané de charge électrique qui franchit la section S.

Densité linéaire.
Supposons que l'intervalle $[0, a]$ représente une tige de longueur a. Si $m(x)$ est la masse de la tige entre 0 et x, alors la densité moyenne de la portion d'extrémités x_0 et x_1 vaut

$$\frac{m(x_1) - m(x_0)}{x_1 - x_0}$$

et sa limite si x_1 tend vers x_0 est $\mu(x_0)$, la densité linéaire en x_0 :

$$\mu(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{m(x_1) - m(x_0)}{x_1 - x_0} = m'(x_0)$$

La fonction $x \to \mu(x)$ est la densité linéaire de la tige.

On définit de façon analogue en électrostatique la densité linéaire de charge électrique d'un objet unidimensionnel qu'on représentera par un segment : si $Q(x)$ mesure la quantité de charge électrique sur $[0, x]$, alors le taux d'accroissement de Q entre x_0 et x_1 est la densité moyenne de charge sur la portion d'extrémités x_0 et x_1. Sa limite si $x_1 \to x_0$ est $Q'(x_0) = \rho(x_0)$, la densité de charge en x_0.

4.2 Interprétation géométrique de la dérivée

4.2.1 Rappels sur la notion de pente d'une droite

Soit $p = (x_0, y_0)$ un point du plan et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. La droite D passant par le point p et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points du plan de la forme

$$(x, y) = p + \mu\vec{u} = (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Si la droite D est non verticale, alors $\alpha \neq 0$ et le nombre $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$ ne dépend pas du vecteur directeur $\vec{u}$ choisi (tous les vecteurs directeurs de D sont colinéaires). Le réel m ainsi déterminé s'appelle la pente de la droite D.

Remarquons que $\vec{u} = (\alpha, \beta) = \alpha(1, \dfrac{\beta}{\alpha}) = \alpha(1, m)$, D est donc dirigée par le vecteur $\vec{v} = (1, m)$ et la pente m est une mesure de la « raideur » de la droite (voir Figure 4.1).

La droite D est donnée par

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(1, m) = (x_0 + \lambda,\ y_0 + \lambda m), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Un système d'équations paramétriques de D est

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + \lambda m \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda = x - x_0$, une équation cartésienne de D est

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

ou encore $y - y_0 = m(x - x_0)$, qu'on appelle la forme « point-pente » de l'équation de la droite, pour souligner que D est déterminée par un de ses points et par sa pente.

Remarquons que si (x_1, y_1) est un point de D distinct de (x_0, y_0) (d'où $x_0 \neq x_1$, car D est non verticale), alors $y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$ et

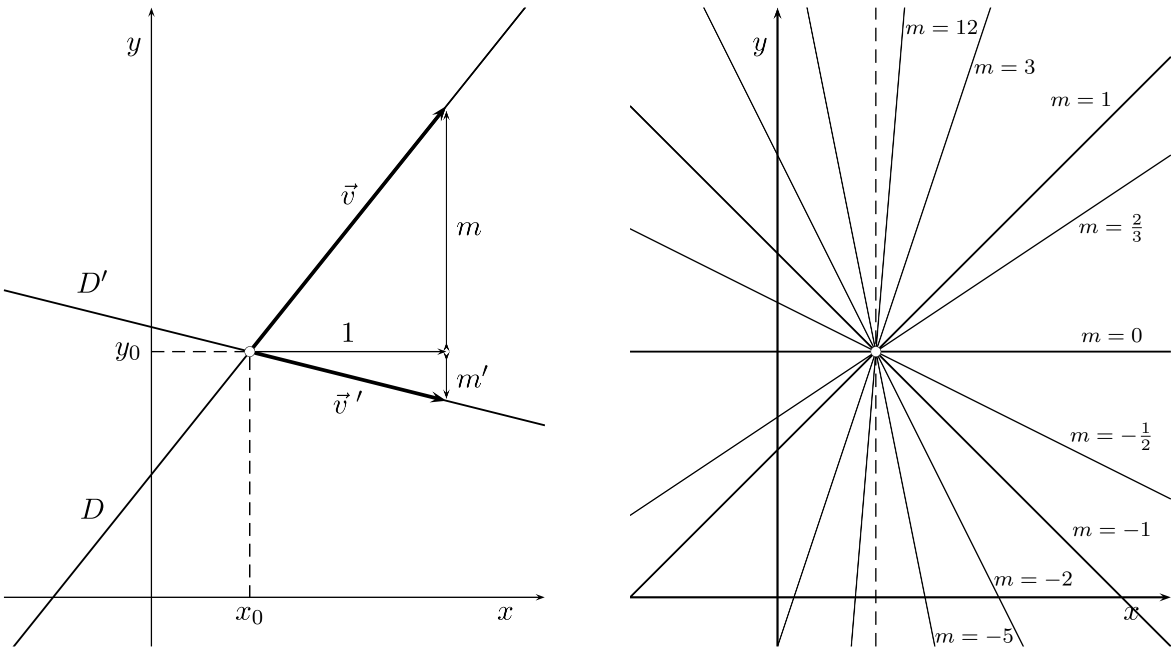
$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Si la droite D rencontre l'axe Oy au point $(0, b)$, le raisonnement précédent appliqué au point $(x_0, y_0) = (0, b)$ nous conduit à l'équation cartésienne

$$y = mx + b$$

qui s'appelle la forme « pente-ordonnée à l'origine » de l'équation de D.

Si D' une autre droite non verticale de pente m', alors $\vec{v'} = (1, m')$ est un vecteur directeur de D'. Les droites D et D' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si $m = m'$.



(a) D est la droite passant par (x_0, y_0) de pente m positive, son vecteur directeur est $\vec{v} = (1, m)$. La droite D' passe par (x_0, y_0) et sa pente m' est négative, elle est dirigée par $\vec{v}\,' = (1, m')$.

(b) Quelques droites passant par un même point marquées de leur pente. Si $m \to +\infty$ ou $m \to -\infty$, les droites tendent vers la verticale (en tireté).

FIGURE 4.1

4.2.2 Tangente à une courbe

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé et f une fonction définie sur un voisinage V de x_0.

Pour tout $x_1 \in V$, $x_1 \neq x_0$, soit D_{x_1} la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ (voir Figure 4.2). Ainsi, D_{x_1} est une sécante au graphe de f. On a

$$\text{Pente de } \; D_{x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Voici l'approche géométrique de la notion de tangente :

✘ *S'il existe une droite T qui occupe la position limite des sécantes D_{x_1} lorsque x_1 tend vers x_0, alors T s'appelle la droite tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$*

Les sécantes D_{x_1} passent toutes par $(x_0, f(x_0))$, leur seul degré de liberté est donné par leur pente. On peut montrer qu'elles admettent une position limite T, quand x_1 tend vers x_0, si et seulement si $\lim\limits_{x_1 \to x_0}$ (Pente de D_{x_1}) existe, plus précisément :

✘

1. *Supposons que f soit dérivable en x_0 :* $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$.
   Alors la droite tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est la droite de pente $f'(x_0)$ passant par ce point :
   $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
2. *Si* $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ *est infinie, alors la droite tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est la droite verticale qui passe par ce point :*
   $$x = x_0$$

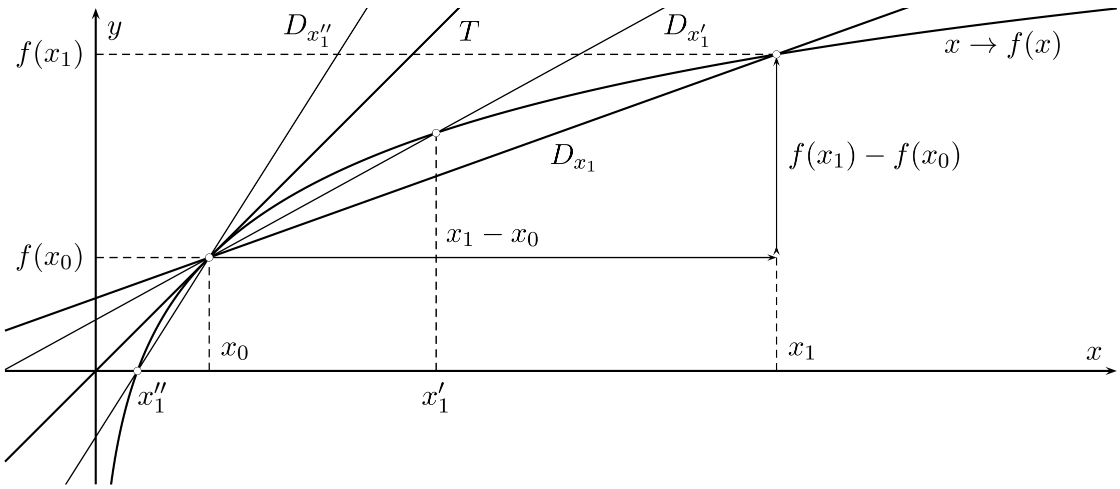


FIGURE 4.2 – D_{x_1}, $D_{x_1'}$ et $D_{x_1''}$ sont trois sécantes au graphe de f par $(x_0, f(x_0))$. Elles passent respectivement par les points d'abscisses x_1, x_1' et x_1'' qui se rapprochent de x_0. La droite T est la tangente au graphe en ce point.

Le premier cas nous dit que la pente de la droite tangente T est la limite des pentes des sécantes, si cette limite est finie. Le second signifie que les pentes des sécantes D_{x_1} tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x_1 s'approche de x_0 : leur position limite est alors une droite verticale (voir Figure 4.1 (b)).

La définition géométrique de la tangente semble indiquer que cette droite est celle qui colle le mieux au graphe de f au voisinage du point de tangence. Nous préciserons cette intuition dans la Section 4.4.

On parlera de **demi-tangente à droite** au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ pour désigner la position limite des sécantes D_{x_1} lorsque $x_1 \to x_0^+$:

– Si $f'_d(x_0)$ existe, son équation est $y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x - x_0)$.

– Elle est verticale si $\displaystyle\lim_{x_1 \to x_0^+} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est infinie.

On introduit de façon analogue la **demi-tangente à gauche**. Ces notions n'ont d'intérêt que si la tangente n'existe pas.

Exemples.

1. Soit $f(x) = x^2$. Nous avons montré que $f'(3) = 6$.
La tangente au graphe de f au point d'abscisse $x_0 = 3$ est la droite de pente 6 passant par le point $(x_0, f(x_0)) = (3, 9)$.
Son équation est $y - 9 = 3(x - 3)$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Comme

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = +\infty$$

la fonction g n'est pas dérivable en 0, mais son graphe présente une tangente verticale en ce point.

Ceci n'est pas une surprise : les graphes de $f : x \to x^3$ et de $g : x \to \sqrt[3]{x}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (voir Figure 2.8), ce qui implique en particulier que leurs tangentes en 0 le sont aussi, or f admet une tangente horizontale en 0 car $f'(0) = 0$ (calcul direct ou formules de dérivation : $\left(x^3\right)' = 3x^2$).

3. Soit la fonction $h(x) = \sin|x|$. Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et $h(x) = \sin x$ d'où

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et $h'_d(0) = 1$. D'autre part, si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$ et $h(x) = \sin(-x) = -\sin x$, donc

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

et $h'_g(0) = -1$. La fonction h n'est pas dérivable en 0 car $h'_d(0) \neq h'_g(0)$. Les demi-tangentes à droite et à gauche au graphe de g en 0 sont, respectivement, $y = x$ et $y = -x$ (voir Figure 4.3).

4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x} = 0$ (voir Section 3.3). Etudions sa dérivabilité en 0. Remarquons que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cos \frac{1}{x} - 0}{x} = \cos \frac{1}{x}$$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^-} \cos \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos \dfrac{1}{x}$ n'existent pas : f n'est pas dérivable en 0, elle n'est pas dérivable à droite ou à gauche en ce point et son graphe n'admet pas de tangente ou de demi-tangente en 0.

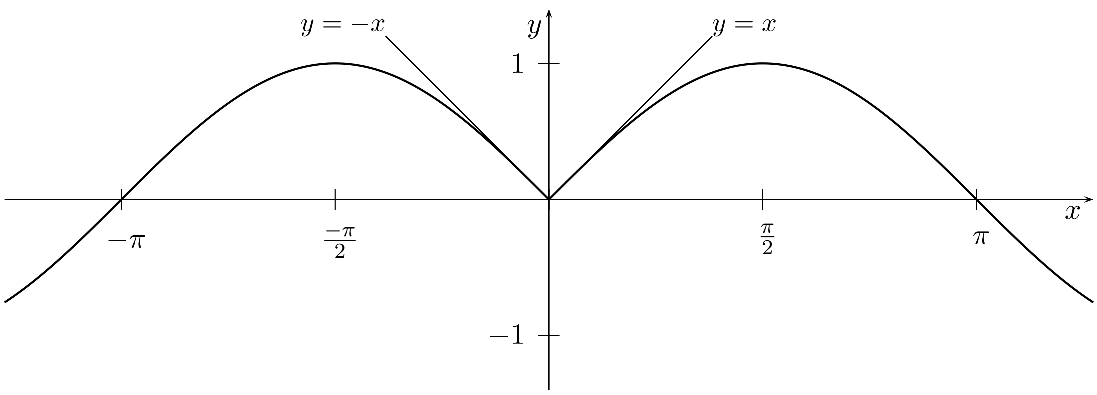


FIGURE 4.3 – Exemple 3. Les graphe de $h : x \to \sin |x|$ et ses demi-tangentes en 0.

4.3 Formules de dérivation

4.3.1 Dérivées des fonctions usuelles

✘ **Proposition 4.3.1** *(Dérivée d'une fonction constante)*
Si f est une fonction constante sur un voisinage de x_0, alors $f'(x_0) = 0$

Démonstration : Comme $f(x) = f(x_0)$ pour tout x dans un voisinage de x_0 on a

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

□

✘ **Proposition 4.3.2** *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ fixé. La fonction $f : x \to x^n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et*

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Démonstration : Illustrons par exemple le cas $n = 5$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixe. En remarquant que

$$x^5 - x_0^5 = (x - x_0)\left(x^4 + x^3x_0 + x^2x_0^2 + xx_0^3 + x_0^4\right) \tag{1}$$

(développer le second membre pour vérifier l'égalité) on obtient

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^5 - x_0^5}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(x^4 + x^3x_0 + x^2x_0^2 + xx_0^3 + x_0^4\right) = 5x_0^4$$

La démonstration pour n quelconque utilise la généralisation de (1) :

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ \cdots \ + x^2x_0^{n-3} + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)$$

□

Exemple.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left(x^7\right)' = 7x^6$.

✘ **Proposition 4.3.3** *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ fixé. La fonction $f : x \to x^{-n}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{0\}$ et*

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -nx^{-n-1}$$

Démonstration : Soit $x_0 \neq 0$ fixé :

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0^n - x^n}{x^n x_0^n}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(-\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}\right) \frac{1}{x^n x_0^n} = -\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^n x_0^n} \\
&= -nx_0^{n-1} \frac{1}{(x_0^n)^2} = -nx_0^{n-1-2n} = -nx_0^{-n-1}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition précédente : $\lim_{x\to x_0} \dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = nx_0^{n-1}$ □

Exemple.

Pour tout $x \neq 0$, on a $\left(\dfrac{1}{x^7}\right)' = \left(x^{-7}\right)' = -7x^{-8} = -7 \cdot \dfrac{1}{x^8}$.

✘ **Proposition 4.3.4** *(Dérivée de la fonction racine carrée)*

1. *Pour tout* $x > 0$ *on a* $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. *La fonction* $x \to \sqrt{x}$ *n'est pas dérivable à droite en* 0*, mais son graphe admet en ce point une demi-tangente à droite verticale.*

Démonstration : Fixons $x_0 > 0$*, en utilisant l'expression conjuguée on a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Calculons maintenant la limite à droite en 0 *du taux d'accroissement :*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

ce qui montre 2. □

Si $s \in \mathbb{R}$, nous définirons au second semestre la fonction $x \to x^s = \exp(s \ln x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on verra que cette définition coïncide avec celle que nous connaissons pour $s \in \mathbb{Q}$ (voir Section 2.4). Nous montrerons alors facilement que $(x^s)' = sx^{s-1}$ pour tout $x > 0$, enonçons pour l'instant ce résultat si l'exposant est rationnel :

✘ **Proposition 4.3.5** *Soit* $q \in \mathbb{Q}$ *fixé, la fonction* $x \to x^q$ *est dérivable pour tout* $x > 0$ *et*

$$(x^q)' = qx^{q-1}$$

Remarques.

1. Cette proposition généralise les propositions 4.3.2 et 4.3.3 (attention cependant aux domaines de définition des fonctions, différents dans les trois enoncés).

2. Si, par exemple, $q = \frac{1}{2}$, on a

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

pour tout $x > 0$ et l'on retrouve aussi la formule de la Proposition 4.3.4.

3. On obtient les dérivées des racines n-ièmes (sur $]0, +\infty[$) en prenant $q = \frac{1}{n}$:

Pour tout $x > 0$ on a

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

Au chapitre consacré aux bijections, nous montrerons que la formule $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ est vraie aussi pour $x < 0$ si n est impair.

✘ **Proposition 4.3.6** ***(Dérivées des fonctions sinus et cosinus)***
Les fonctions $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$ sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ et
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. En utilisant la formule

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

nous pouvons exprimer le taux d'accroissement sous la forme

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}\ \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 1 quand x tend vers x_0 : on applique $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$ et le changement de variable $u = u(x) = \dfrac{x-x_0}{2}$.

Le second tend vers $\cos x_0$, ce qui donne le résultat.

Pour le calcul de la dérivée du cosinus, utiliser

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

□

4.3.2 Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

Précisons que si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 et si λ est un réel fixé, les fonctions $f+g$, λf et fg sont définies au voisinage de x_0 par

$$f+g : x \longrightarrow f(x)+g(x) \qquad \lambda f : x \longrightarrow \lambda f(x) \qquad fg : x \longrightarrow f(x)g(x)$$

De plus, si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on définira la fonction $\dfrac{f}{g}$ par

$$\frac{f}{g} : x \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

✘ **Proposition 4.3.7** ***(Dérivée d'une somme)***
Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, alors la fonction $f+g$ est dérivable en x_0 et

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Démonstration : On a

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

or, par hypothèse, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$, *d'où le résultat.* □

✘ **Proposition 4.3.8** *Si f est une fonction dérivable en x_0 et λ est un réel fixé, alors la fonction λf est dérivable en x_0 et*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

Démonstration : Il suffit d'écrire

$$\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-x_0} = \frac{\lambda f(x)-\lambda f(x_0)}{x-x_0} = \lambda \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

qui tend vers $\lambda f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. □

Exemple.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left(x^7 - 2x^3 + 5\right)' = \left(x^7\right)' - 2\left(x^3\right)' + (5)' = 7x^6 - 6x^2$.

On aura compris que

Si P est un polynôme, la fonction $x \to P(x)$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$

✘ **Proposition 4.3.9** ***(Dérivée d'un produit)***
Soient f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, alors la fonction fg l'est aussi et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Démonstration : Le taux d'accroissement de fg s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)+f(x)g(x_0)-f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f(x)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{(1)} + g(x_0)\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{(2)}\end{aligned}$$

Comme f est dérivable en x_0, elle est continue en ce point : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. *D'autre part, si x tend vers x_0, les quotients (1) et (2) tendent respectivement vers $g'(x_0)$ et $f'(x_0)$.* □

Exemple.
Pour tout $x > 0$ on a

$$\left(\sqrt{x}\sin x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'\sin x + \sqrt{x}\,(\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$$

Proposition 4.3.10 ***(dérivée d'un quotient)***
Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, et si $g(x_0) \neq 0$, alors

1. *La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

2. *La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Démonstration :
Comme g est continue en x_0 (elle est dérivable en ce point) on a $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, puisque la valeur de la limite est non nulle (par hypothèse), la fonction g ne s'annule pas sur un certain voisinage de x_0 et les quotients $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ sont bien définis.

Pour établir la première formule, écrivons le taux d'accroissement de $\frac{1}{g}$:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{(1)}\ \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{(2)}$$

Par hypothèse, g est dérivable en x_0 : le quotient (1) tend vers $g'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. La continuité de g en x_0 donne $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$ et (2) tend vers $\frac{1}{g(x_0)^2}$ si x tend vers x_0.

Pour montrer 2, il suffit d'appliquer le règle de dérivation du produit à $f\frac{1}{g}$ et d'utiliser 1. □

Exemple.
Pour tout $x \neq -2$ on a

$$\left(\frac{x^2 - x}{x^3 + 8}\right)' = \frac{\left(x^2 - x\right)'\left(x^3 + 8\right) - \left(x^2 - x\right)\left(x^3 + 8\right)'}{\left(x^3 + 8\right)^2} = \frac{(2x - 1)\left(x^3 + 8\right) - \left(x^2 - x\right)3x^2}{\left(x^3 + 8\right)^2}$$

On retiendra que

Si P et Q sont deux polynômes, la fraction rationnelle $x \to \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est dérivable en tout point x_0 de son ensemble de définition ($Q(x_0) \neq 0$)

4.3.3 Dérivée d'une fonction composée

✘ **Proposition 4.3.11** *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et l'on a*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\ f'(x_0)$$

Démonstration :
Nous établirons la formule dans un cas particulier simple, à savoir : si $f(x) \neq f(x_0)$ pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage de x_0, car on peut écrire alors le taux d'accroissement de $g \circ f$ comme suit

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{(1)}\ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{(2)}$$

Comme f est dérivable en x_0, son taux d'accroissement (2) tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.

Utilisons un changement de variable pour calculer la limite de (1) : si $x \to x_0$, alors la nouvelle variable $u = f(x) \to f(x_0)$, car f est continue x_0, d'où

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{u \to f(x_0)} \frac{g(u) - g(f(x_0))}{u - f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

puisque g est dérivable en $f(x_0)$. □

Exemples.

1. Calculons la dérivée de la fonction $h : x \to \sin\left(x^5\right)$.

On a $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $f(x) = x^5$ et $g(u) = \sin u$.

Les hypothèses de la proposition sont vérifiées en tout point x_0 de $\mathbb{R}$: f est dérivable en x_0 (f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$) et g est dérivable en $f(x_0)$ (elle l'est en tout point $u \in \mathbb{R}$: $g'(u) = \cos u$).

Par conséquent h est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos\left(x^5\right) \cdot 5x^4$$

2. Considérons la fonction $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$.

Elle est définie si et seulement si $0 \leq x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$, c'est à dire sur l'intervalle $[-2, +\infty[$.

Ecrivons $h = g \circ f$ avec
$f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2x^2$ et

$g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $g(u) = \sqrt{u}$

Précisons maintenant les points x_0 où la Proposition 4.3.11 s'applique. On sait que la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0 : il faut éviter les x_0 tels que $f(x_0) = 0$, car g ne sera pas dérivable en $f(x_0)$. Remarquons que $f(x) = x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$ s'annule en -2 et 0.

Soit alors $x_0 > -2$ et $x_0 \neq 0$: la fonction f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ car $f(x_0) > 0$. La Proposition garantit alors la dérivabilité de h en x_0 et nous permet de calculer $h'(x_0)$.

Pour tout $x \in]-2, 0[\cup]0, +\infty[$ on obtient

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+2x^2}} \cdot \left(3x^2 + 4x\right)$$

Si $x_0 = -2$ ou $x_0 = 0$, il faut utiliser la définition de dérivée. D'une part

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{h(x) - h(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{x^2(x+2)}}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x+2}}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+2}} = +\infty$$

(limite de la forme « $\frac{2}{0^+}$ »). La fonction h n'est pas dérivable à droite en -2, mais son graphe admet une demi-tangente à droite verticale en ce point.

Pour l'étude en $x_0 = 0$ écrivons le taux d'accroissement

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^2(x+2)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x+2}}{x} = \frac{|x|\sqrt{x+2}}{x} = \begin{cases} -\sqrt{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ainsi, $h'_g(0) = -\sqrt{2}$ et $h'_d(0) = \sqrt{2}$. La Figure 4.4 montre le graphe de h.

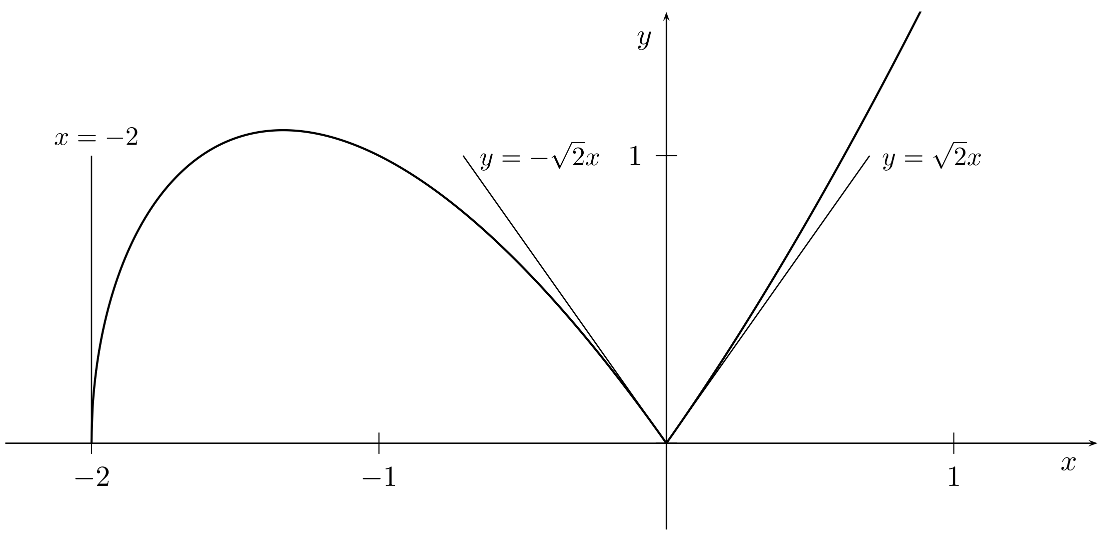


FIGURE 4.4 – Le graphe de $h : x \to \sqrt{x^3 + 2x^2}$ et ses demi-tangentes en -2 et 0.

4.3.4 Fonction dérivée. Dérivées successives

Soit I un intervalle ouvert et f une fonction définie sur I.

Si f est dérivable en tout point de I, on définit la fonction dérivée de f (notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$) sur cet intervalle en associant à tout point $x \in I$ le nombre réel $f'(x)$:

$$f' : x \longrightarrow f'(x)$$

Si la fonction f' est dérivable en tout point de I, la fonction dérivée de f' est alors définie sur I et s'appelle la fonction dérivée seconde de f (on note f'', $f^{(2)}$ ou encore $\dfrac{d^2x}{dx^2}$). Ainsi $f'' = (f')'$.

On définit de même $f''' = f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)'$ et plus généralement $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ (fonction dérivée d'ordre n de f).

Exemples.

1. Considérons la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $P(x) = x^4$. Elle admet des fonctions dérivées de tous ordres définies sur $\mathbb{R}$:

$$P'(x) = 4x^3 \qquad P''(x) = \left(4x^3\right)' = 4 \cdot 3x^2 \qquad P^{(3)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2x \qquad P^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

et $P^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 5$.

2. La fonction sinus est indéfiniment dérivable sur R :

$$(\sin)'(x) = \cos x \qquad \sin^{(2)}(x) = (\cos x)' = -\sin x \qquad \sin^{(3)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

enfin, $\sin^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$.

Par conséquent $\sin^{(5)} = \sin^{(1)}$ et $\sin^{(n)} = \sin^{(n-4)}$, pour tout $n \geq 5$.

4.4 Le développement limité à l'ordre 1

Le développement limité est l'outil le plus puissant pour le calcul de limites. Nous travaillerons seulement « à l'ordre 1 », quelques remarques à la fin de cette section seront consacrées à la notion générale de développement limité à l'ordre n, qui est une conséquence de la formule de Taylor-Lagrange.

✘ **Proposition 4.4.1** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage V de x_0. Si f est dérivable en x_0, alors*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \tag{1}$$

pour tout $x \in V$, où $\varphi : V \to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

L'expression (1) s'appelle le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0.

Démonstration : Soit $\varphi : V \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

pour $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = 0$ (valeur arbitraire, n'importe quelle valeur convient)

Si $x = x_0$, l'égalité (1) s'écrit $f(x_0) = f(x_0)$: elle est vraie en ce point.
Si $x \neq x_0$, $x \in V$, la définition de φ implique que (1) est vraie.

Il ne reste à prouver que $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. Or

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

□

Remarques.

1. D'après (1), la fonction f s'écrit comme somme d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 1 : $x \to f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ (d'où la désignation « à l'ordre 1 ») et d'un « reste » : $x \to (x - x_0)\varphi(x)$.
Bien que cette écriture soit vraie pour tout x dans l'ensemble de définition de f (suivre la démonstration), le développement limité (1) ne sera exploitable que dans un voisinage de x_0 car la seule information dont on dispose sur φ est $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

2. Les termes du développement limité (1) figurent par ordre de grandeur décroissante :

- Le premier à apparaitre est la constante $f(x_0)$.
- Le terme suivant, $(x - x_0)f'(x_0)$, est plus « petit » (sauf si le premier est nul) car il tend vers 0 si $x \to x_0$.

– Le dernier terme est encore plus « petit » (si le précédent est non nul) car il tend plus vite vers 0 que $x - x_0$ lorsque x tend vers x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\varphi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

3. La fonction affine $x \to f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ qui apparait dans (1) est la droite tangente à f au point d'abscisse x_0. L'intuition selon laquelle cette droite est celle qui approche le mieux la courbe f au voisinage de x_0 se précise :

✘ *La différence $f(x) - (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)) = (x - x_0)\varphi(x)$ tend plus vite vers 0 que $x - x_0$ quand x tend vers x_0 et (voir la proposition ci-dessous) la tangente est la seule fonction affine vérifiant cette propriété.*

En effet :

✘ **Proposition 4.4.2** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage V de x_0. S'il existe des réels a et b tels que*

$$f(x) = a + (x - x_0)b + (x - x_0)\eta(x) \tag{2}$$

pour tout $x \in V$, où $\eta : V \to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie

$$\lim_{x \to x_0} \eta(x) = 0 \tag{3}$$

alors f est dérivable en x_0 et $f(x_0) = a$, $f'(x_0) = b$

Démonstration : Si $x = x_0$, (2) s'écrit $f(x_0) = a$. Par conséquent, si $x \in V$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)b + (x - x_0)\eta(x)$$

et pour $x \neq x_0$ on peut écrire

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b + \eta(x)$$

or, comme $\lim_{x \to x_0} \eta(x) = 0$, il vient $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$, c'est-à-dire que f est dérivable en x_0 et $b = f'(x_0)$ □

Remarque.
A partir des deux propositions précédentes, on peut affirmer que

f est dérivable en x_0 si et seulement si f vérifie les conditions (2) et (3)

On utilisera souvent des développements limités à l'ordre 1 au voisinage de $x_0 = 0$. Suivant l'usage, la fonction φ de (1) se note alors ϵ. Ecrivons la Proposition 4.4.1 dans ce cas :

✘ *Soit f une fonction définie sur un voisinage V de 0.*
Si f est dérivable en 0, alors

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\epsilon(x) \tag{4}$$

pour tout $x \in V$, où $\epsilon : V \to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie

$$\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$$

Exemples.

1. Une simple application de (4) aux fonctions sinus et cosinus donne

$$\sin x = x + x\epsilon(x) \qquad\qquad \cos x = 1 + x\epsilon(x)$$

Bien entendu, la fonction ϵ n'est pas la même dans les deux développements limités : ϵ est ici une notation « générique » pour designer toute fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

2. Soit $q \in \mathbb{Q}$ un rationnel fixé et considérons la fonction $f : x \to (1+x)^q$. Elle est définie si $x > -1$: en particulier sur un voisinage de 0. Dans tout son domaine de définition, $f'(x) = q(1+x)^{q-1}$. Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = q$, la formule (4) implique

$$(1+x)^q = 1 + qx + x\epsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. En particulier, pour $q = 20$, $q = -13$, $q = \dfrac{1}{2}$ et $q = \dfrac{1}{5}$, on obtient respectivement

$$(1+x)^{20} = 1 + 20x + x\epsilon(x) \qquad\qquad \frac{1}{(1+x)^{13}} = 1 - 13x + x\epsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\epsilon(x) \qquad\qquad \sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{1}{5}x + x\epsilon(x)$$

3. Voici un exemple d'utilisation des développements limités (par souci de précision, la notation distingue les fonctions ϵ). La limite se présente sous la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ » :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{1+x} - (1+x)^{20}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + x\epsilon_1(x)}{1 + \frac{1}{5}x + x\epsilon_2(x) - (1 + 20x + x\epsilon_3(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x + x\epsilon_1(x)}{\left(\frac{1}{5} - 20\right)x + x\left(\epsilon_2(x) - \epsilon_3(x)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 + \epsilon_1(x)\right)}{x\left(-\frac{99}{5} + \epsilon_4(x)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \epsilon_1(x)}{-\frac{99}{5} + \epsilon_4(x)} \\
&= \frac{1}{-\frac{99}{5}} = -\frac{5}{99}
\end{aligned}$$

Nous avons noté $\epsilon_4(x) = \epsilon_2(x) - \epsilon_3(x)$. La dernière égalité découle de $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \epsilon_4(x) = 0$.

Compléments

Remarques.

1. Un développement limité à l'ordre 1 ne permet pas toujours de lever l'indétermination :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x\epsilon(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\epsilon(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\epsilon(x)}{x^2}$$

qui est toujours une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». Heureusement on dispose du résultat suivant

> *Si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue sur un voisinage V de x_0, on a*
>
> $$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varphi(x)$$
>
> *pour tout $x \in V$, où $\varphi : V \to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie*
>
> $$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$
>
> *Cette expression s'appelle le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0.*

En particulier, pour $f(x) = \sin x$, le développement limité à l'ordre 3 en 0 s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$$

où $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, ce qui nous permet de calculer notre limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3!} + \epsilon(x)\right) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

2. L'écriture du reste $(x-x_0)^n\varphi(x)$ d'un développement limité est adéquate pour le calcul de limites, mais elle ne nous permet pas d'estimer l'erreur de l'approximation de $f(x)$ par la partie polynômiale du développement.

0n a juste une idée de la « vitesse » à laquelle la différence

$$f(x) - \left(f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right) = (x-x_0)^n \varphi(x)$$

tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 : plus rapidement que $(x-x_0)^n$.

Le lecteur intéressé par ces questions fera des recherches sur la Formule de Taylor-Lagrange, qui fournit plus d'informations sur le reste.

PCSO

COURS D'ANALYSE

Chapitre 5: Etude de fonctions

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 5

Etude de fonctions

5.1 Asymptotes

5.1.1 Asymptote verticale

Définition 5.1.1 Soit a un nombre réel et f une fonction.
Si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$ sont infinies, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à f.

Exemples.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in N$, $n > 0$. La fonction $x \to \dfrac{1}{(x-a)^n}$ présente une asymptote verticale en $x = a$ (voir Section 3.1 et Figure 3.2 pour l'étude de la limite en a et l'allure des graphes).

2. La fonction $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$. La droite $x = 1$ est asymptote verticale à f car

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

(limite de la forme « $\dfrac{1}{0^+}$ »).

3. Soit la fonction $g : x \to \dfrac{1}{\sin x}$. Les droites $x = k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, sont asymptotes verticales à g. Plus précisément :

1. Comme $\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0^+$ et $\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0^-$, on a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

   et, par 2π-périodicité, on obtient des résultats analogues en tout point de la forme $0 + 2k\pi$: $\lim_{x \to 2k\pi^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 2k\pi^-} g(x) = -\infty$

2. Puisque $\lim\limits_{x\to\pi^+} \sin x = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-} \sin x = 0^+$, il vient

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{1}{\sin x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$$

et plus généralement $\lim\limits_{x\to\pi+2k\pi^+} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi+2k\pi^-} g(x) = +\infty$

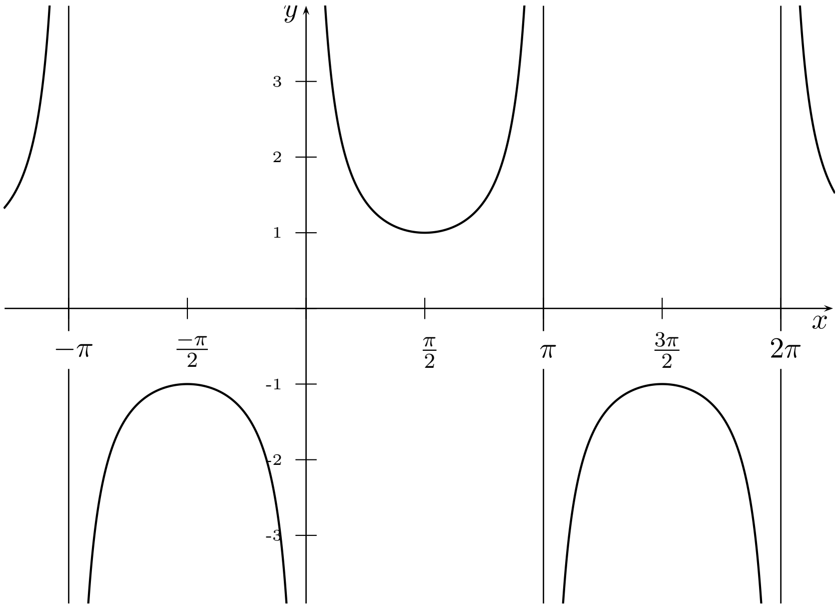


FIGURE 5.1 – Le graphe de la fonction $g : x \to \dfrac{1}{\sin x}$ et ses asymptotes.

5.1.2 Asymptote en $+\infty$, en $-\infty$

Définition 5.1.2 Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.
On dit que f a une branche infinie quand x tend vers $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est infinie.

Définition 5.1.3 Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

L'asymptote est dite horizontale si $a = 0$ et oblique si $a \neq 0$.

Il est immédiat à partir de la définition que

✘ *La droite $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si, dans un voisinage de $+\infty$, on a*

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

où φ est une fonction vérifiant $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

En effet, il suffit de remarquer que $\varphi(x) = f(x) - (ax + b)$.

On définit de même les notions de branche infinie et d'asymptote à f quand x tend vers $-\infty$ (et les remarques suivantes s'énoncent de façon analogue en $-\infty$).

Remarques.

1. La condition $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ signifie que la distance entre les points du plan $C_x = (x, f(x))$ et $D_x = (x, ax + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (voir Figure 5.2 (a)).

A partir de là, il est géométriquement évident que

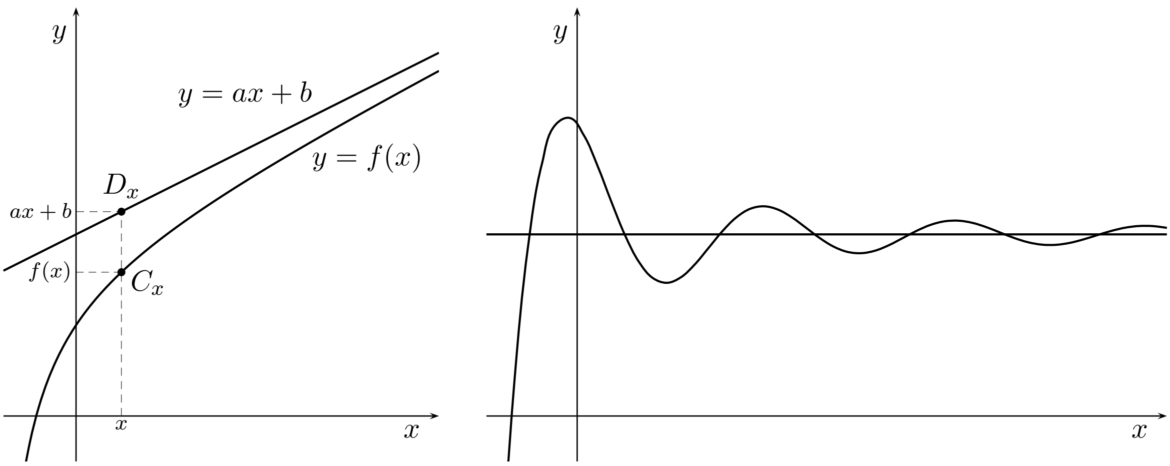
Si la fonction f admet une asymptote en $+\infty$, alors elle est unique.

Voici la démonstration rigoureuse : supposons que $y = ax+b$ et $y = a'x+b'$ soient asymptotes à f en $+\infty$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \big((a'x + b') - (ax + b)\big) &= \lim_{x\to+\infty} \big((a'x + b') - f(x) + f(x) - (ax + b)\big)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \big((a'x + b') - f(x)\big) + \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b))\\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

et il suffit de remarquer que

$$\lim_{x\to+\infty} \big((a'x + b') - (ax + b)\big) = \lim_{x\to+\infty} \big((a' - a)x + (b' - b)\big) = 0 \ \Leftrightarrow\ a = a' \text{ et } b = b'$$



(a) Définition d'asymptote en $+\infty$: distance $(C_x, D_x) \to 0$ si $x \to +\infty$.

(b) Exemple d'asymptote horizontale en $+\infty$

FIGURE 5.2

2. La position du graphe de f par rapport à son asymptote $y = ax + b$ est déterminée par le signe de $f(x) - (ax + b)$.

3. L'existence d'asymptote horizontale ($a = 0$) est donnée par $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - b) = 0$, qui s'écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$. Par conséquent

✘ *La fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ si et seulement si sa limite en $+\infty$ est finie.*
Dans ce cas, l'équation de l'asymptote est $y = b$ où $b = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

.

4. Supposons que f ait une asymptote oblique $y = ax + b$ en $+\infty$. On a

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

dans un voisinage de $+\infty$, avec $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$. En remarquant que

$$\lim_{x \to +\infty} (ax + b) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

on déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ est infinie. Précisons ce résultat, géométriquement évident :

Si f admet une asymptote oblique en $+\infty$, alors elle a une branche infinie en $+\infty$.

Notons cependant qu'une fonction peut présenter une branche infinie sans posséder d'asymptote : la fonction $x \to x^2$ a une branche infinie en $+\infty$ mais pas d'asymptote car, pour tous $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ fixées, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - (\alpha x + \beta)\right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \alpha \frac{1}{x} - \beta \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

(limite de la forme « $(+\infty) \cdot 1$ »).

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -x + 2 + \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$. Comme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} = 0$$

(appliquer le Th. d'encadrement) la droite $y = -x + 2$ est asymptote à f en $+\infty$. Un argument analogue montre qu'elle l'est aussi en $-\infty$.

La différence $f(x) - (-x + 2)$ a le signe de $\cos x$ (car $1 + x^2 > 0$) donc change de signe une infinité de fois quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) : le graphe de f oscille de part et d'autre de l'asymptote. Plus précisément :

1. Graphe au dessus de l'asymptote :

$$f(x) > -x + 2 \iff f(x) - (-x + 2) > 0 \iff \cos x > 0 \iff x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2. Graphe en dessous de l'asymptote :

$$f(x) < -x+2 \Leftrightarrow f(x)-(-x+2) < 0 \Leftrightarrow \cos x < 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi[$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$. Déterminons a, b et c tels que

$$x^2+3x+1 = (x+1)(ax+b)+c$$

Comme $(x+1)(ax+b)+c = ax^2+(a+b)x+(b+c)$, on obtient $a=1$, $a+b=3$ (d'où $b=2$) et $b+c=1$ (ce qui donne $c=-1$). Ainsi $x^2+3x+1 = (x+1)(x+2)-1$ et, pour tout $x \neq -1$, on a

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x+2)-1}{x+1} = x+2-\frac{1}{x+1}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, la droite $y=x+2$ est asymptote à f en $-\infty$ et en $+\infty$.

La position du graphe par rapport à cette asymptote oblique dépend du signe de $-\dfrac{1}{x+1}$:

1. Si $x < -1$, alors $-\dfrac{1}{x+1} > 0$ d'où $f(x)-(x+2) > 0$ et $f(x) > x+2$: le graphe de f est au-dessus de l'asymptote sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.
2. Si $x > -1$, alors $-\dfrac{1}{x+1} < 0$ et $f(x) < x+2$: le graphe de f est en dessous de son asymptote sur l'intervalle $]-1, +\infty[$

On peut généraliser cette méthode au quotient quelconque d'un polynôme de degré 2 par un polynôme de degré 1.

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}$. Etudions si f admet une asymptote en $+\infty$. Pour tout $x \neq 0$ nous avons

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} = \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$$

Soit $t = \dfrac{1}{x}$. Remarquons que si $x \to +\infty$, alors $t \to 0^+$ et rappelons que

$$\sqrt[3]{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}t+t\epsilon(t)$$

avec $\lim\limits_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$, si bien que

$$f(x) = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}\sqrt[3]{1+t} = \frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{3}t+t\epsilon(t)\right) = \frac{1}{t}+\frac{1}{3}+\epsilon(t) = x+\frac{1}{3}+\epsilon(\frac{1}{x})$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \epsilon(\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0^+} \epsilon(t) = 0$, la droite $y = x+\frac{1}{3}$ est asymptote à f en $+\infty$. Le même argument montre qu'elle l'est aussi en $-\infty$.

La proposition suivante donne une méthode générale pour déterminer si une fonction admet une asymptote en $+\infty$ et, dans ce cas, trouver son équation (on dispose de l'énoncé analogue en $-\infty$).

✘ **Proposition 5.1.4** *Soient a et b des nombres réels.*
La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si (« $\Leftrightarrow$ »)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$

Démonstration : Nous devons prouver une équivalence, il faut d'abord montrer une implication (« $\Rightarrow$ »), puis sa réciproque (« $\Leftarrow$ »).

« $\Rightarrow$ » : Supposons que la droite $y = ax + b$ est asymptote à f en $+\infty$. Alors

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Par conséquent

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x}\varphi(x)$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\varphi(x) = 0 \cdot 0 = 0$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

*et **1.** est prouvé.*

*Puisque $f(x) - ax = \varphi(x) + b$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$ et nous avons montré **2.***

*« $\Leftarrow$ » : Réciproquement, supposons qu'on a les conditions **1.** et **2.***
Cette dernière s'écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ et la droite $y = ax + b$ est asymptote à f en $+\infty$. □

Remarque.
Dans les notations de la proposition, si l'une des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ est infinie ou n'existe pas, alors f n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Exemple.
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \cos \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Utilisons la proposition pour déterminer l'éventuelle asymptote à f en $+\infty$. On a

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0^+} \cos u = \cos 0 = 1$$

grâce au changement de variable $u = u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Déterminons b :

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - x \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \\
&= \lim_{u\to0^+}\frac{\cos u - 1}{u^2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé encore le changement de variable $u = u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et la limite remarquable $\displaystyle\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$ (voir Section 3.6.).

D'après la proposition, la droite $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote à f en $+\infty$.

5.1.3 Branches paraboliques

Définition 5.1.5 Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

(i) Si les limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ sont infinies, alors on dit que la branche infinie de f est une branche parabolique de direction Oy.

(ii) Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est infinie et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, on dira que la branche infinie de f est une branche parabolique de direction Ox.

Remarques.

1. Dans les deux cas contemplés par la Définition, la fonction f n'admet pas d'asymptote en $+\infty$. En effet (notations de la Proposition 5.1.4) : au cas (i), a n'existe pas car $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ est infinie ; au cas (ii), $a = 0$ mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ est infinie et b n'existe pas.

2. La fonction $x \to x^2$ (dont le graphe est une parabole d'axe Oy) vérifie les conditions du cas **(i)**. La fonction $x \to \sqrt{x}$ (dont le graphe est une branche de la parabole d'axe Ox d'équation $x = y^2$) vérifie **(ii)**. Ces exemples justifient les noms employés dans la Définition.

3. Si une fonction présente une branche parabolique de direction Oy quand x tend vers $+\infty$, son graphe au voisinage de $+\infty$ « ressemble » au graphe de $x \to x^2$ ou à celui de $x \to -x^2$. Ressemblance toute relative car, par exemple, toute fonction de la forme $x \to \lambda x^n$ (avec λ réel non nul et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) a une branche parabolique de direction Oy.

4. De même, on peut dire que le graphe d'une fonction qui admet une branche parabolique de direction Ox en $+\infty$ présente, au voisinage de $+\infty$, une certaine ressemblance avec les graphes de $x \to \sqrt{x}$ ou $x \to -\sqrt{x}$. Remarquons que toute fonction de la forme $x \to \lambda\sqrt[n]{x}$ (avec λ réel non nul) présente une branche parabolique de direction Ox en $+\infty$.

5.2 Dérivation et monotonie

Les théorèmes suivants montrent que le signe de f' sur un intervalle I permet de déterminer la monotonie de f sur I. Les démonstrations des implications plus difficiles utilisent le Théorème des accroissements finis, que nous verrons dans la Section 5.5, on donnera alors les démonstrations qui manquent ici.

Les résultats de cette section s'énonceront pour une fonction **continue sur un intervalle** I, dérivable en tout point de **l'intérieur de** I. Précisons d'abord ces notions :

Définition 5.2.1 (Intérieur d'un intervalle)
L'intérieur d'un intervalle I est l'intervalle formé par les points de I qui ne sont pas extrémités de I.

Exemples.

1. L'intérieur de l'intervalle $[0, +\infty[$ est l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. L'intérieur de chacun des intervalles $]0, 1[$, $[0, 1[$, $]0, 1]$ et $[0, 1]$, est l'intervalle $]0, 1[$.

Définition 5.2.2 (Fonction continue sur un intervalle)
Soient $a < b$ deux réels et f une fonction.

1. On dit que f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ si f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$. Définition analogue pour l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.
2. On dira que f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si
   (a) f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$.
   (b) f est continue à droite en a et à gauche en b.
3. Définitions analogues pour la continuité de f sur $[a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, b]$ et $]-\infty, b]$.

Voici des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit monotone sur un intervalle :

Théorème 5.2.3 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I. Alors :*

1. *f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ pour tout x à l'intérieur de I.*
2. *f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ pour tout x à l'intérieur de I.*
3. *f est constante sur I $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$ pour tout x à l'intérieur de I.*

Démonstration :

1. *L'implication « $\Rightarrow$ » est facile à montrer : Soit x_0 fixé à l'intérieur de I. Comme f est croissante sur I, on a*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

quel que soit $x \in I$ ($x \neq x_0$). Par passage à la limite si $x \to x_0$ cette inégalité large est conservée et donne $f'(x_0) \geq 0$.
L'implication « $\Leftarrow$ » sera établie dans la Section 5.5 à l'aide du Th. des accroissements finis.

***2.** La démonstration de « $\Rightarrow$ » est analogue car $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ si f est décroissante.*
Pour « $\Leftarrow$ », voir Sect. 5.5

***3.** Il suffit de remarquer que f est constante sur I si et seulement si f est croissante et décroissante sur I. Grâce aux équivalences précédentes nous avons alors $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout x à l'intérieur de I, d'où le résultat.* □

Remarques.

1. Ces résultats sont faux en général si I n'est pas un intervalle comme le montrent les exemples suivants :

– La fonction $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $f'(x) = 0$, mais f n'est pas constante sur $\mathbb{R} - \{0\}$: elle est constante sur chacun des **intervalles** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

– La fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifie $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ pour tout $x \in R - \{0\}$, mais elle n'est pas décroissante sur son domaine de définition (elle l'est sur chacun des **intervalles** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$).

2. Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, elle est en particulier continue sur I, ce qui nous permet de donner une conséquence du Th. 5.2.3. agréable à énoncer :

✘

Soit I un intervalle.

1. $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in I \Rightarrow f$ *est croissante sur* I.
2. $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in I \Rightarrow f$ *est décroissante sur* I.
3. $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I \Rightarrow f$ *est constante sur* I.

Enonçons maintenant des conditions suffisantes pour la monotonie stricte (voir la preuve dans la Section 5.5) :

Théorème 5.2.4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I. On a :*

1. $f'(x) > 0$ *pour tout x à l'intérieur de I* $\Rightarrow f$ *est strictement croissante sur* I.
2. $f'(x) < 0$ *pour tout x à l'intérieur de I* $\Rightarrow f$ *est strictement décroissante sur* I.

Exemple.
La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pour tout x à l'intérieur de I (c'est à dire sur $]0, +\infty[$), elle est donc strictement croissante sur I.

Remarques.

1. Précisons sans plus tarder une conséquence du Th. 5.2.4 facile à énoncer :

✘

> *Soit I un intervalle.*
>
> 1. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*
> 2. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

2. Les conditions $f' > 0$ ou $f' < 0$ à l'intérieur de I ne sont pas nécessaires pour la monotonie stricte sur I : la fonction $f : x \to x^3$, dérivable en tout point de l'intervalle $\mathbb{R}$, est strictement croissante sur R alors que $f'(0) = 0$.

Affinons donc le théorème précédent pour donner un critère nécessaire et suffisant de monotonie stricte :

> **Proposition 5.2.5** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I. Alors :*
>
> 1. *f est strictement croissante sur I $\Leftrightarrow$*
>   (a) *$f'(x) \geq 0$ pour tout x à l'intérieur de I et*
>   (b) *Il n'existe aucun intervalle $]a, b[\subset I$ (avec $a < b$) tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*
> 2. *f est strictement décroissante sur I $\Leftrightarrow$*
>   (a) *$f'(x) \leq 0$ pour tout x à l'intérieur de I et*
>   (b) *il n'existe aucun intervalle $]a, b[\subset I$ (avec $a < b$) tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*

Démonstration : Montrons 1., la preuve de 2. est analogue.
« $\Rightarrow$ » :
Toute fonction strictement croissante est croissante, d'où (Th. 5.2.3) la condition (a)
Si (b) était fausse, il existerait un couple de réels $a < b$ dans I tels que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et l'on en déduirait, d'après le Th. 5.2.3, que f est constante sur $[a, b]$, ce qui contredit l'hypothèse.
« $\Leftarrow$ » :
D'après (a), la fonction f est croissante sur I (Th. 5.2.3).
Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait un couple de réels $a < b$ dans I, tels que $f(a) = f(b)$, ce qui implique que f est constante sur l'intervalle $[a, b]$ et par conséquent $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ (Th 5.2.3), contre l'hypothèse (b). □

Exemple.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \cos x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

– Condition (a) : On a $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ en tout point de $\mathbb{R}$.

– Condition (b) : On remarque que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Bien que f' s'annule en une infinité de points, il n'existe aucun intervalle $]a, b[$ (avec $a < b$) où f' soit identiquement nulle.

5.3 Extrema d'une fonction

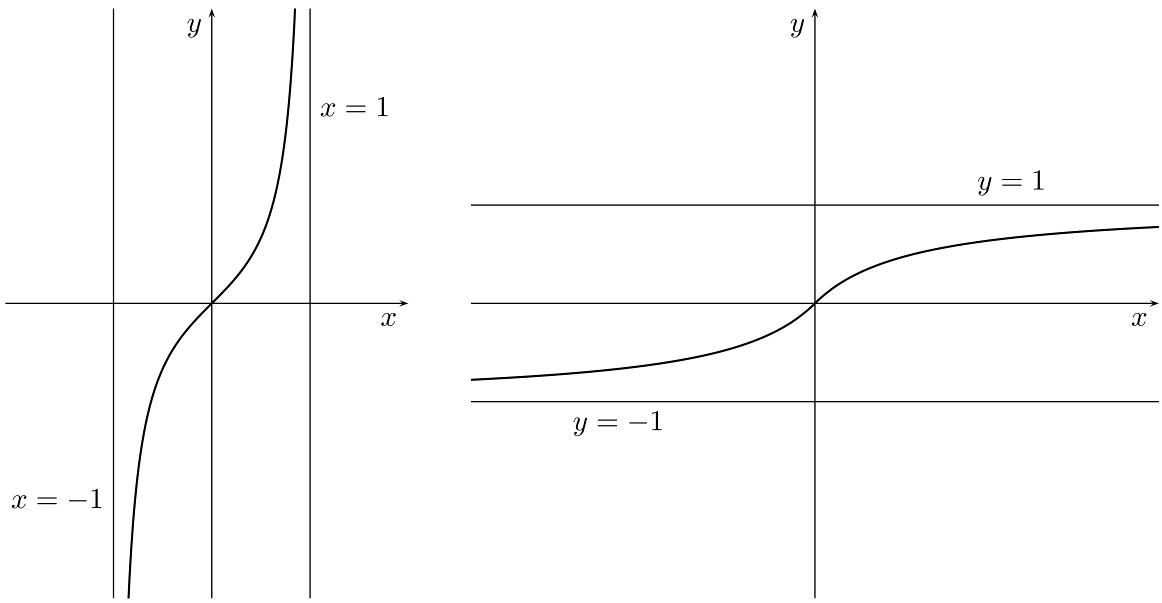
5.3.1 Extremum global *(Compléments)*

Définition 5.3.1 Soit f une fonction et D_f son domaine de définition.

1. On dit que f présente un maximum global (ou absolu) en $c \in D_f$ si $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Le réel $f(c)$ est appelé le maximum global (ou absolu) de f sur D_f.
2. De même, f présente un minimum global (ou absolu) en $c \in D_f$ lorsque $f(c) \leq f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Le réel $f(c)$ est le minimum global (ou absolu)de f sur D_f.

Extremum global ou absolu est le terme générique pour designer un maximum ou un minimum absolus.

Exemples.
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. La valeur $f(0) = 0$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$. Par contre f n'a pas de maximum absolu sur $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
2. La fonction cosinus atteint son maximum absolu 1 en une infinité de points : $\cos 2k\pi = 1$, pour tout entier k. De même, $\cos(\pi + 2k\pi) = -1$ est son minimum absolu.
3. La fonction $x \to x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ n'a ni maximum ni minimum absolu sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
4. La fonction $h :]1, 2[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x$ n'a ni maximum ni minimum absolus sur $]1, 2[$.



(a) Le graphe de $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$. On a $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

(b) Le graphe de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. On a $-1 < g(x) < 1$ pour tout x et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.

FIGURE 5.3 – Deux fonctions qui ne possèdent pas d'extrema absolus.

Voici un résultat général assez intuitif (mais difficile à démontrer) qui donne des conditions pour qu'une fonction ait un maximum et un minimum absolus (voir Figure 5.4) :

> **Théorème 5.3.2** *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. Alors f possède sur cet intervalle un maximum et un minimum absolus.*

Remarques.

1. Un extremum absolu peut être atteint plus d'une fois.

2. Le Théorème est faux si l'une ou l'autre des deux hypothèses requises (continuité, intervalle fermé et borné) fait défaut.

A partir des exemples précédents, on peut exhiber, pour chaque type d'intervalle I différent de $[a, b]$, une fonction continue sur I qui ne vérifie pas la conclusion du Th.

Sans la condition de continuité, on peut construire des contre-exemples au Th. sur tout type d'intervalle (exercice).

3. Le Th. ne nous dit pas comment déterminer les extrema absolus de f. On commencera par chercher les exterma locaux...

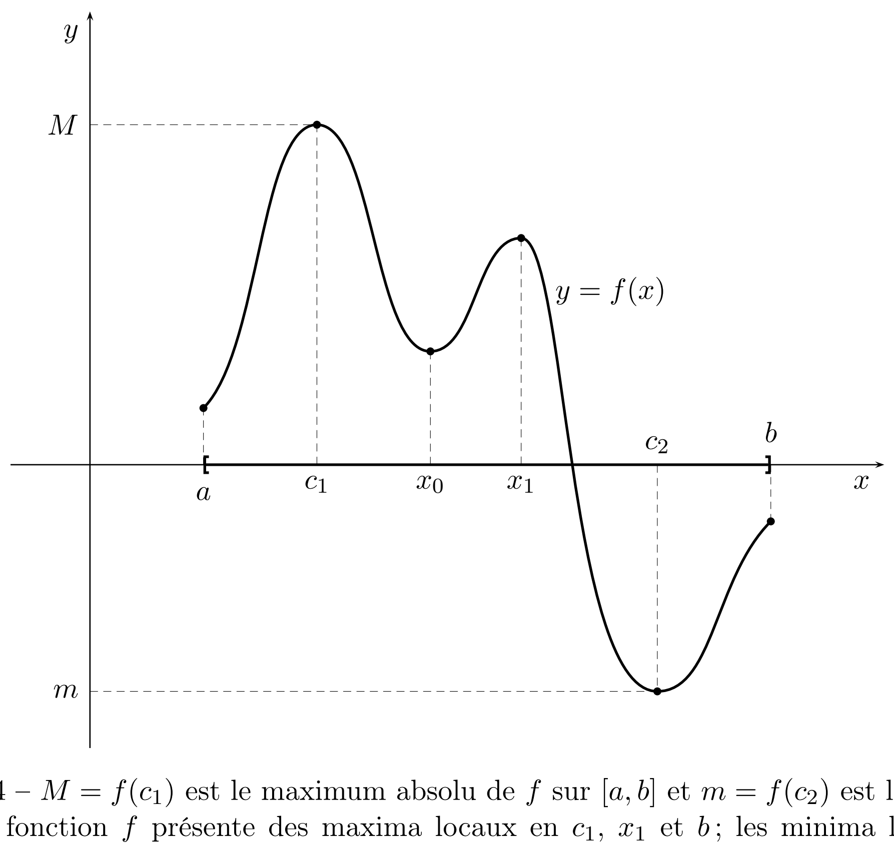


FIGURE 5.4 – $M = f(c_1)$ est le maximum absolu de f sur $[a, b]$ et $m = f(c_2)$ est le minimum absolu. La fonction f présente des maxima locaux en c_1, x_1 et b ; les minima locaux sont atteints en a, x_0 et c_2 (tout extremum global est aussi un extremum local).

5.3.2 Extremum local

Définition 5.3.3 Soit f une fonction et D_f son domaine de définition.

1. On dit que f présente un maximum local (ou relatif) en un point $x_0 \in D_f$ s'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ pour tout } x \in V \cap D_f$$

On dit que le réel $f(x_0)$ est un maximum relatif pour f.

2. De même, la fonction f présente un minimum local (ou relatif) en $x_0 \in D_f$ s'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in V \cap D_f$$

Le réel $f(x_0)$ est un minimum relatif de f.

On dira que f présente un extremum local en x_0 si f présente en ce point soit un maximum local, soit un minimum local.

Remarques, exemples.

1. Tout extremum global est aussi un extremum local.

2. On a à faire à des notions locales : un « petit » voisinage V de x_0 suffit. La condition « pour tout $x \in V \cap D_f$ » signifie « pour tout point x dans D_f suffisamment proche de x_0 ».

3. La Figure 5.4 illustre plusieurs cas d'application de la Définition : les extrema locaux c_1, x_0, x_1 et c_2 sont des points intérieurs à $D_f = [a, b]$. On remarquera que, dans cet exemple, les extrémités de D_f sont aussi des extrema locaux.

Voici un condition suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un voisinage d'un point x_0 présente un extremum local en x_0 :

✘ **Proposition 5.3.4** *Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de x_0.*
Si f' s'annule en changeant de signe au point x_0, alors f présente un extremum local en x_0.

Vous connaissez bien ce résultat qui apparait dans le tableau de variation de f sur un voisinage $]a, b[$ de x_0 sous les formes :

1. Maximum local

$x \in]a, b[$		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

ou

2. Minimum local

$x \in]a, b[$		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Démonstration de la Proposition 5.3.4 : Précisons les deux cas possibles :

1. Si $f'(x_0) = 0$ et s'il existe un intervalle $]a, b[$ (avec $a < b$) contenant x_0 tel que $f'(x) > 0$ dans $]a, x_0[$, puis $f'(x) < 0$ dans $]x_0, b[$, alors le Th. 5.2.4 implique que f est strictement croissante sur $]a, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, b[$, et par conséquent f présente un maximum local en x_0.

2. De même, si $f'(x_0) = 0$ mais, au contraire, on a $f'(x) < 0$ sur $]a, x_0[$, puis $f'(x) > 0$ sur $]x_0, b[$, alors f présente un minimum local en x_0 car, d'après le Th. 5.2.4, f est strictement décroissante sur $]a, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, b[$ □

5.3.3 Extrema locaux et points critiques *(Compléments)*

Définition 5.3.5 On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$ (la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 est horizontale).

Le résultat suivant nous dit que, dans certaines conditions (**1.** et **2.**), les extrema locaux d'une fonction sont à chercher parmi ses points critiques :

Théorème 5.3.6 *Soit f une fonction et $x_0 \in D_f$. Supposons que*

1. *f est définie sur un voisinage de x_0.*
2. *f est dérivable en x_0.*
3. *x_0 est un extremum local de f.*

alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration : Supposons par exemple que x_0 est un minimum local de f.
D'après hypothèse 1., il existe un voisinage de x_0 totalement contenu dans D_f, par conséquent nous pouvons prendre le voisinage V de x_0 de la Déf. 5.3.3 assez petit pour que $V \subset D_f$.
Il existe donc un voisinage V de x_0 tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in V$. Par conséquent,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{est :} \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x < x_0,\ x \in V. \\ \geq 0 & \text{si } x > x_0,\ x \in V. \end{cases}$$

Comme f est dérivable en x_0, il en résulte, par passage à la limite dans ces inégalités, qu'on a à la fois

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

en sorte que $f'(x_0) = 0$ □

Remarques.

1. Ne pas lire dans l'énoncé du Th. plus qu'il ne contient :

> *La condition $f'(x_0) = 0$ n'est ni nécessaire ni suffisante pour que la fonction f présente un extremum local en x_0.*

Elle n'est pas nécessaire : la fonction $f : x \to |x|$ présente un minimum absolu (donc local) en 0, où elle n'est pas dérivable.

Elle n'est pas suffisante : la fonction $f : x \to x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ alors que 0 n'est pas un extremum local de f.

2. Il est essentiel que f soit définie au voisinage de x_0 : la fonction $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ présente un minimum local (et absolu) en $x = 1$ et un maximum local (et absolu) en $x = 2$, alors que $f'_d(1) = f'_g(2) = 1 \neq 0$.

3. Dans les applications pratiques, les points où une fonction f présente un extremum local sont à rechercher parmi :

a) Les valeurs de x tels que $f'(x) = 0$ (ceci sous-entend que f est définie au voisinage du point x).

b) Les points de D_f extrémités des intervalles en lesquels se décompose le domaine de définition de f.

c) Les points où la fonction n'est pas dérivable.

Par exemple la fonction $f : x \to \sqrt{x}$ présente un minimum local (et absolu) en $x = 0$, extrémité de son ensemble de définition (remarquons d'ailleurs que $f'_d(0)$ n'existe pas).

5.4 Exemple d'étude de fonction : la fonction tangente

Définition et interprétation géométrique.

Si x est la mesure en radians d'un angle tel que $\cos x \neq 0$, on définit $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et la fonction $x \to \tan x$ est appelé la fonction tangente.

Considérons le cercle trigonométrique sur le repère Ouv (voir Figure 5.5). Soit $\angle\, AOM$ l'angle de x radians : x est la longueur de l'arc AM sur le cercle et $M = (\cos x, \sin x)$.

Soit P la projection de M sur l'axe Ou : $P = (\cos x,\ 0)$. Soit T l'intersection de la droite OM avec la droite parallèle à Ov qui passe par le point $A = (1, 0)$. Comme $\overline{OA} = 1$ on a

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT}$$

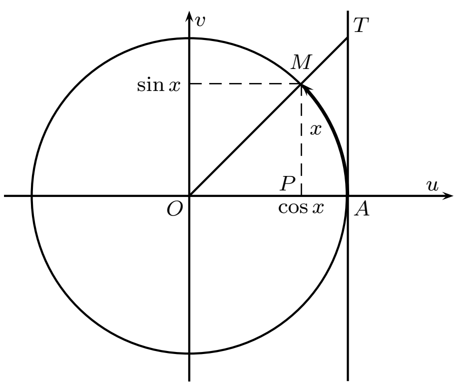


FIGURE 5.5

Ensemble de définition.
Comme $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction tangente est définie sur

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c'est à dire sur tout intervalle $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Parité.
La fonction tangente est impaire :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Périodicité.
La fonction tangente est π-périodique :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Par conséquent, il suffit d'étudier la fonction sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de longueur π. Comme la fonction est impaire, sa courbe représentative présente une symétrie par rapport à l'origine et il suffirait de faire l'étude sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Asymptotes.
Les droites $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sont asymptotes verticales. En effet :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \quad \text{(limite de la forme « } \frac{1}{0^+} \text{ »)}$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \quad \text{(limite de la forme « } \frac{1}{0^-} \text{ »)}$$

et par périodicité on obtient les mêmes résultats en $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^-$ et $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^+$.

Continuité, dérivabilité.
La fonction tangente est dérivable (donc continue) en tout point de son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables (dénominateur non nul) et sa dérivée peut prendre deux formes selon qu'on utilise l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou pas :

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\[2ex] \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

Monotonie.
La dérivée de la fonction tangente est strictement positive en tout point de son ensemble de définition : la fonction est strictement croissante sur tout intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

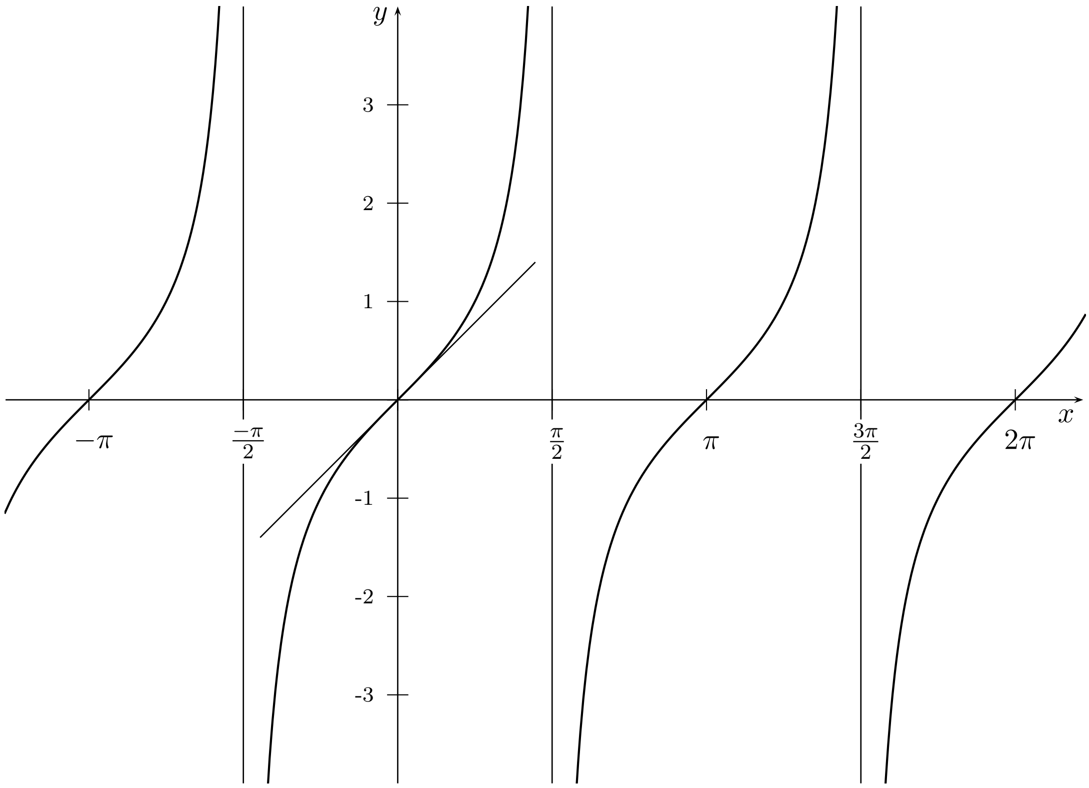


FIGURE 5.6 – Le graphe de la fonction tangente, ses asymptotes et sa tangente en 0 ($y = x$). Remarquer la symétrie du graphe par rapport à l'origine. Comme la fonction est π-périodique, les branches du graphe sont obtenues par des translations de vecteurs $k \cdot \overrightarrow{(\pi, 0)}$, $k \in \mathbb{Z}$, à partir de la branche sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Droite tangente au graphe en $x = 0$. Développement limité au voisinage de 0.
Puisque $\tan 0 = 0$ et la dérivée de la fonction tangente en 0 vaut $1 + \tan^2(0) = 1$, la droite $y = x$ est la tangente au graphe de la fonction $x \to \tan x$ en $x = 0$ et son développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 est

$$\tan x = x + x\epsilon(x)$$

Position du graphe par rapport à sa tangente en 0.
Il s'agit ici de comparer les fonctions $x \to x$ et $x \to \tan x$ au voisinage de 0. Soit

$$f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad f(x) = \tan x - x$$

On a $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$. Ainsi $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$: la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle. Comme $f(0) = 0$, on a

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(0) = 0 \;\Rightarrow \tan x < x$$
$$0 < x < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 0 = f(0) < f(x) \;\Rightarrow \tan x > x$$

et le graphe traverse sa tangente en 0.

Remarque.
Il est assez fréquent de démontrer des inégalités entre fonctions avec les moyens de l'analyse comme on le voit dans le calcul précédent :

✘ *Pour comparer deux fonctions g et h, on peut considérer la fonction auxiliaire $f = g - h$ et dresser son tableau de variation de façon à connaître son signe : si, par exemple, $f(x) < 0$ sur un intervalle I, alors on a $g(x) < h(x)$ pour tout $x \in I$.*

5.5 Le Théorème des accroissements finis *(Compléments)*

Le théorème des accroissements finis est un résultat fondamental en Analyse, au vu du nombre de ses conséquences. Nous l'utiliserons ici « seulement » pour montrer comment le signe de f' détermine la monotonie de f : on complétera ainsi les preuves des théorèmes de la Section 5.2.

Théorème 5.5.1 ***(Th. des accroissements finis)***
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable en tout point de $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat, mais on donnera deux justifications (l'une géométrique, l'autre cinématique) qui le rendront immédiatement acceptable.

Interprétation géométrique : Le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la sécante au graphe de f passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Le Th. affirme qu'il y a (au moins) un point $(c, f(c))$ du graphe de f entre A et B où la tangente au graphe est parallèle à la sécante AB (voir Figure 5.7). □

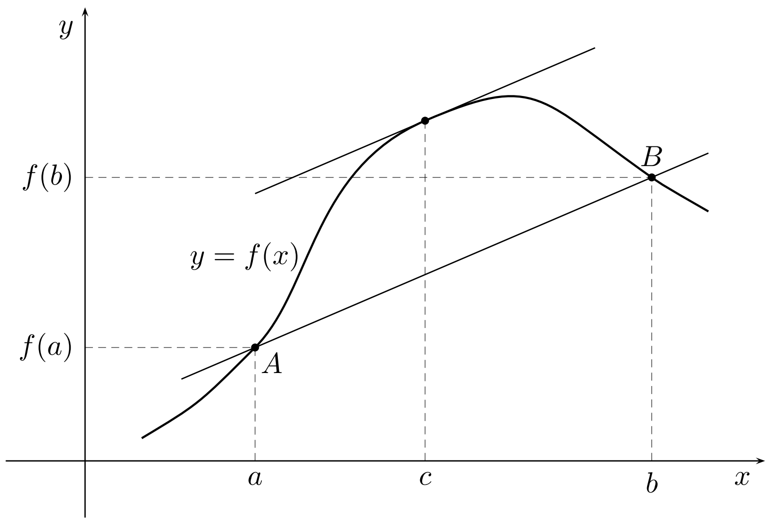


FIGURE 5.7

Interprétation cinématique : Supposons qu'un mobile suit une trajectoire rectiligne et que sa position à tout instant t est donnée par $f(t)$, alors sa vitesse moyenne entre les instants $t = a$ et $t = b$ est égale à

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et $f'(t)$ est la vitesse instantanée à l'instant t. Le Th. dit qu'il existe un instant $t = c$ entre a et b où la vitesse instantanée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne entre a et b : si une voiture parcourt par exemple 180 km en deux heures, l'aiguille du compteur passe au moins une fois sur 90. □

Complétons maintenant la preuve du **Théorème 5.2.3**, on doit établir les implications suivantes :

> *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I. On a :*
> 1. *Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x à l'intérieur de I, alors f est croissante sur I.*
> 2. *Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x à l'intérieur de I, alors f est décroissante sur I.*

Démonstration : Montrons 1. (la preuve de 2. est analogue). Remarquons que

$$f \text{ est croissante sur } I \;\Leftrightarrow\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0, \text{ pour tous } a, b \in I,\; a < b$$

Soient donc $a < b$ fixés dans I. D'après le Th. des accroissements finis appliqué à la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Or, par hypothèse, $f'(c) \geq 0$, d'où $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$. □

Voici enfin la preuve du **Théorème 5.2.4** :

> *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I. On a :*
> 1. *Si $f'(x) > 0$ pour tout x à l'intérieur de I, alors f est strictement croissante sur I.*
> 2. *Si $f'(x) < 0$ pour tout x à l'intérieur de I, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration : Montrons par exemple 2. On a

$$f \text{ est strictement décroissante sur } I \;\Leftrightarrow\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0, \text{ pour tous } a, b \in I,\; a < b$$

Fixons alors $a < b$ dans l'intervalle I. Le Th. des accroissements finis garantit l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Or, par hypothèse, $f'(c) < 0$, d'où $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$. □

PCSO

COURS D'ANALYSE

Chapitre 6: Premiers exemples d'équations différentielles

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 6

Premiers exemples d'équations différentielles

6.1 L'équation différentielle $y' = f$. Primitives de f sur un intervalle

6.1.1 Introduction

Définition 6.1.1 Soit I un intervalle ouvert et f une fonction définie sur I donnée.
On considère l'équation différentielle sur I :

$$y'(x) = f(x) \tag{E}$$

qu'on notera aussi $y' = f$.
Résoudre cette équation différentielle sur I c'est trouver toutes les fonctions dérivables $y : I \to \mathbb{R}$ qui vérifient la relation (E) pour tout $x \in I$.
Toute solution de (E) sur I s'appelle un primitive de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I se note

$$\int f(x)dx$$

Remarques. Exemples.

1. Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ donnée par $y'(x) = x$. La fonction $y_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (dériver !).
Il est clair que toute fonction de la forme $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$ (pour tout $C \in \mathbb{R}$ fixé) est solution de (E) aussi et nous montrerons qu'elles sont les seules (voir Prop. 6.1.2). Ainsi

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{sur l'intervalle } \mathbb{R}$$

2. Soit $s(t)$ la position à l'instant t d'un objet qui se déplace en ligne droite, on sait que $v(t)$, la vitesse instantanée de l'objet, est donnée par $s'(t) = v(t)$. Ainsi, la fonction position est une primitive de la fonction vitesse. Si la fonction v est connue, résoudre l'équation $s' = v$ nous permettra de retrouver la fonction s si l'on connait la position à un instant donné : $s(t_0) = s_0$ (on parle alors d'une « condition initiale », voir Sect. 6.1.3).

3. On peut généraliser la Définition 6.1.1 pour un intervalle I quelconque. Si, par exemple, $I = [a, b]$, on dira qu'une fonction y est une primitive de f sur I (ou une solution de l'équation $y' = f$ sur I) si $y'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \,]a, b[$ et $y'_d(a) = f(a)$, $y'_g(b) = f(b)$.

6.1.2 Description de l'ensemble de solutions. Existence de solutions

✘ **Proposition 6.1.2** *Soit (E) l'équation différentielle $y' = f$ sur l'intervalle I.*
Si la fonction y_1 est une solution particulière de (E) sur I, alors les solutions sur I de cette équation différentielle sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ de la forme

$$y(x) = y_1(x) + C$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Il est évident que toute fonction de la forme $y = y_1 + C$ est solution de (E) : comme y_1 est solution de l'équation on a $y'(x) = y'_1(x) + 0 = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Montrons maintenant que toute solution de (E) est de la forme $y_1 + C$: soit y_2 une solution de l'équation, alors

$$(y_2(x) - y_1(x))' = y'_2(x) - y'_1(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pour tout $x \in I$. La dérivée de la fonction $y_2 - y_1$ est nulle sur l'intervalle I, par conséquent cette fonction est constante sur I : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y_2(x) - y_1(x) = C$ pour tout $x \in I$ d'où $y_2(x) = y_1(x) + C$ sur I. □

Voici la traduction de la Proposition dans le langage des primitives :

✘ *Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors tout autre primitive de f sur cet intervalle est de la forme $x \to F(x) + C$, pour tout $C \in \mathbb{R}$:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \textit{sur l'intervalle } I$$

Exemple.
La fonction $y_1(x) = \sin x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'(x) = \cos x$, il s'ensuit que les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = \sin x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, ce qui s'écrit aussi

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad \text{sur l'intervalle } \mathbb{R}$$

✘ **Proposition 6.1.3** *(Principe de superposition)*
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et λ, μ deux réels fixés. Supposons que

1. *La fonction y_1 est une solution de l'équation $y' = f$ sur I.*
2. *La fonction y_2 est une solution de l'équation $y' = g$ sur I.*

Alors la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution de l'équation $y' = \lambda f + \mu g$ sur I.

Démonstration : $(\lambda y_1 + \mu y_2)' = \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda f + \mu g$ sur I. □

Voici l'énoncé de la Proposition pour les primitives :

✘ *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et λ, μ deux réels fixés. Alors*

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx \quad \text{sur l'intervalle } I$$

Exemple.
Les fonctions $y_1(x) = \frac{x^2}{2}$ et $y_2(x) = \sin x$ sont respectivement solutions sur $\mathbb{R}$ des équations $y'(x) = x$ et $y'(x) = \cos x$.

Une solution de l'équation (E) : $y'(x) = 5x - 7\cos x$ est donc $5y_1(x) - 7y_2(x) = 5\frac{x^2}{2} - 7\sin x$ et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont $y(x) = 5\frac{x^2}{2} - 7\sin x + C$, pour tout $C \in \mathbb{R}$. En termes des primitives :

$$\int (5x - 7\cos x)dx = 5\int x dx - 7\int \cos x dx = 5\frac{x^2}{2} - 7\sin x + C$$

sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

La Proposition 6.1.2 décrit l'ensemble de solutions de l'équation $y' = f$ à partir d'une solution donnée y_1, dont l'existence est postulée en hypothèse. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour garantir l'existence d'une telle solution, c'est à dire d'une primitive de f.

✘ **Théorème 6.1.4** *Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.*

Ce résultat ne pourra être démontré que dans le chapitre consacré au calcul intégral : nous verrons que si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ fixé, la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur I (par conséquent, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + C$, pour tout $C \in \mathbb{R}$).

6.1.3 Le problème des conditions initiales

✘ **Proposition 6.1.5** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés. Le problème*

$$(P) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Démonstration : Le Th. 6.1.4 nous garantit l'existence d'une solution $x \to y_1(x)$ de l'équation (E) : $y' = f$ sur l'intervalle I.
L'ensemble des solutions de (E) est donnée par les fonctions $y(x) = y_1(x) + C$ pour tout $C \in \mathbb{R}$. En particulier

$$y(x_0) = y_0 \;\Leftrightarrow\; y_1(x_0) + C = y_0 \;\Leftrightarrow\; C = y_0 - y_1(x_0)$$

d'où l'unicité de solution du problème (P). □

Exemple.
Déterminons la solution sur $\mathbb{R}$ du problème

$$\begin{cases} y'(x) = \cos x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 3 \end{cases}$$

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'(x) = \cos x$ sont les fonctions $y(x) = \sin x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a

$$y(\frac{\pi}{2}) = 3 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{\pi}{2} + C = 3 \;\Leftrightarrow\; 1 + C = 3 \;\Leftrightarrow\; C = 2$$

et la solution du problème est $y(x) = \sin x + 2$.

6.1.4 Primitives des fonctions usuelles

Soit $K \in \mathbb{R}$, alors

$$\int K dx = Kx + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

En effet, la fonction $x \to Kx$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction constante égale à K et nous savons (Prop. 6.1.2) que tout autre primitive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est alors de la forme $x \to Kx + C$, pour tout $C \in \mathbb{R}$. La démonstration des égalités suivantes est analogue.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, alors

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C, \text{ sur chacun des intervalles }]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$$

Soit $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq -1$, on a

$$\int x^q dx = \frac{x^{q+1}}{q+1} + C, \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[$$

En particulier

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C, \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[$$

et

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[$$

Enfin

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

et, sur chaque intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

6.1.5 Calcul de primitives : la méthode du changement de variable

1. Calculons $\int x \cos x^2 dx$.

On remarque que x est (presque) la dérivée de x^2 (il ne manque qu'un facteur 2 dans l'intégrale). Ceci nous fait penser à la formule de dérivation d'une fonction composée

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$$

Essayons d'écrire la fonction sous le signe $\int$ comme la dérivée d'un fonction composée. On pense immédiatement à

$$\left(\sin x^2\right)' = \left(\cos x^2\right) 2x$$

En ajustant la réponse, on prendra donc

$$\left(\frac{1}{2}\sin x^2\right)' = x \cos x^2$$

Nous avons trouvé une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to x \cos x^2$, par conséquent

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sin x^2 + C \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}$$

Décrivons **le formalisme du changement de variable**, qui va nous aider beaucoup dans ce type de situations. En revenant à notre exemple, on pose

$$u = u(x) = x^2 \quad \text{et, par définition,} \quad du = u'(x)dx = 2xdx$$

ce qui donne $xdx = \frac{1}{2}du$ de sorte que

$$\int x \cos x^2 dx = \int \frac{1}{2}\cos u du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

On notera que dans ce formalisme, u fonctionne :

– Tantôt comme une variable (dans l'égalité $\int \frac{1}{2}\cos u du = \frac{1}{2}\sin u + C$)

– Tantôt comme une fonction de x (lorsque l'on écrit ensuite $\frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$).

2. Déterminons $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Remarquons que $(\sin x)' = \cos x$.

En posant $u = u(x) = \sin x$, il vient $du = u'(x)dx = (\sin x)'dx = \cos x dx$ et on peut écrire

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}$$

3. Calculons $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+1}}dx$.

On remarque que le numérateur est, à un facteur près, la dérivée de $5x^2+1$.

On introduit alors le changement de variable $u = u(x) = 5x^2+1$, qui donne $du = 10xdx$ et $xdx = \frac{1}{10}du$, en sorte que

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+1}}dx = \int \frac{1}{10}\frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{5}\int \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{5}\sqrt{u}+C = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2+1}+C$$

sur $\mathbb{R}$.

Voici la justification générale de la méthode :

> *Soient I et J deux intervalles ouverts.*
> *Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $u(I) \subset J$.*
> *Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur J : $F' = f$ (elle existe d'après le Th. 6.1.4). Alors*
>
> $$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x) \quad \textit{pour tout } x \in I$$
>
> *Ainsi, $F \circ u$ est une primitive de $x \to f(u(x))u'(x)$ sur I et*
>
> $$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C \quad \textit{sur } I$$
>
> *D'autre part, dans le cadre du formalisme du changement de variable, on écrira*
>
> $$\int f(u)du = \int F'(u)du = F(u) + C = F(u(x)) + C$$
>
> *(ici, u fonctionne comme une variable dans les deux premières égalités et comme une fonction de x dans la dernière). En ce sens, on a bien l'égalité*
>
> $$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

6.2 L'équation différentielle $y'' = f$

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On cherche les fonctions $x \to y(x)$ deux fois dérivables sur I vérifiant la relation $y''(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Compte-tenu que $y'' = (y')'$, on est immédiatement ramené à calculer deux primitives successivement. Il suffira de prendre quelques exemples.

Exemples.

1. Considérons l'équation $y'' = 0$ sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\big(y'(x)\big)' = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; y'(x) = C \text{ sur } \mathbb{R}\ (C \in \mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; y(x) = Cx + D \text{ sur } \mathbb{R}\ (C, D \in \mathbb{R})$$

Remarquons que les solutions sont décrites à l'aide de deux familles de constantes réelles C et D. En particulier, il existe une unique solution vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$, elle est déterminée par les constantes $C = \beta$ (puisque $y' = C$) et $D = y(x_0) - Cx_0 = \alpha - Cx_0 = \alpha - \beta x_0$.

2. Soit l'équation $y''(x) = \cos 5x$ définie sur $\mathbb{R}$. A partir de $(y'(x))' = \cos 5x$ on obtient d'abord

$$y'(x) = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C,\ \ (C \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

et de là on tire

$$y(x) = \int (\frac{1}{5}\sin 5x + C)dx = -\frac{1}{25}\cos 5x + Cx + D,\ \ C, D \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Si l'équation est assortie de conditions initiales pour $y(x_0)$ et $y'(x_0)$, on obtient à nouveau une solution unique car, d'après (1), $C = y'(x_0) - \frac{1}{5}\sin 5x_0$ et, à partir de (2), on obtient $D = y(x_0) + \frac{1}{25}\cos 5x_0 - Cx_0$.

On aura compris que ce résultat d'unicité est général. En appliquant deux fois de suite la Prop. 6.1.5, on montre facilement que

✘

Proposition 6.2.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient $x_0 \in I$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixés. Le problème*

$$\begin{cases} y''(x) &= f(x) \\ y(x_0) &= \alpha \\ y'(x_0) &= \beta \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Remarque.
Considérons un mobile qui suit une trajectoire rectiligne. Si sa position est donnée par la fonction $s(t)$, alors l'accélération est $a(t) = s''(t)$. Si la fonction accélération est connue, résoudre l'équation $s'' = a$ nous permet de retrouver la fonction position à partir des conditions initiales $s(t_0)$ et $s'(t_0)$.

6.3 L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

6.3.1 Introduction

Considérons le mouvement d'un objet de masse m suspendu au bout d'un ressort vertical. Si $x(t)$ désigne la position à l'instant t du centre d'inertie de l'objet mesurée à partir de la position d'équilibre et k est la constante de raideur du ressort, alors le mouvement $x(t)$ est décrit par l'équation différentielle

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

On retrouve une équation analogue dans l'étude du pendule : une masse m est suspendue à l'extrémité d'un fil de longueur l dont l'autre extrémité est fixe. L'angle $\theta(t)$ que forme à l'instant t le fil avec la verticale vérifie la relation

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0$$

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, $\sin(\theta(t))$ peut être approximé par $\theta(t)$ et on aboutit à l'équation différentielle

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$

La charge électrique $q(t)$ d'un condensateur dans un « circuit LC » (comportant une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C) vérifie l'équation différentielle

$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

Ces trois équations font intervenir un coefficient *positif* et on peut les écrire sous la forme

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \ (\omega \text{ réel non nul}) \tag{1}$$

Cette équation différentielle s'appelle l'**équation de l'oscillateur harmonique**. Elle est en général assortie de conditions initiales du type $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.

Les équations différentielles de la forme

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \tag{2}$$

(où a, b et f sont trois fonctions données) sont dites **du second ordre** (l'ordre de la plus haute dérivée présente dans l'équation) et **linéaires** (parce qu'elles sont du premier degré en y'', y' et y). Les équations $y'' = f$ et (1) en sont deux exemples.

Si la fonction f est non nulle, l'équation (2) est dite **avec second membre**, si $f = 0$ on parlera d'équation **homogène** ou **sans second membre**.

Après l'étude de (1), nous traiterons l'équation avec second membre

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = f(x)$$

qui apparait souvent dans les applications. Ainsi, si le circuit LC est branché aux bornes d'un générateur de courant et $V(t)$ est la tension existant aux bornes du générateur, on obtient l'équation différentielle

$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{1}{L}V(t)$$

6.3.2 Résolution de l'équation

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant :

✘ **Théorème 6.3.1** *Soit ω un nombre réel non nul fixé.*
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \tag{1}$$

sont les fonctions

$$y(x) = \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x \tag{2}$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
En particulier, si α et β sont deux réels fixés, le problème

$$\begin{cases} y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \\ y(0) \ = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \tag{3}$$

possède une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Commençons par remarquer *deux solutions évidentes de l'équation* :

Lemme 6.3.2 *Les fonctions*

$$y_c(x) = \cos \omega x \quad \textit{et} \quad y_s(x) = \sin \omega x$$

sont solutions de l'équation (1) *sur* $\mathbb{R}$

Démonstration : Dérivons-les, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y_c'(x) = -\omega \sin \omega x, \quad \text{et} \quad y_c''(x) = -\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 y_c(x)$$

$$y_s'(x) = \omega \cos \omega x, \quad \text{et} \quad y_s''(x) = -\omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 y_s(x)$$

et l'équation (1) *est bien vérifiée par ces deux fonctions.* □

Notons ensuite que *toute combinaison linéaire de solutions de* (1) *est encore une solution* :

Lemme 6.3.3 *Soient y_1 et y_2 deux fonctions qui vérifient l'équation* (1) *sur $\mathbb{R}$.*
Soient λ_1 et λ_2 deux réels. Alors , la fonction

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$$

est aussi solution de (1) *sur* $\mathbb{R}$

Démonstration : Par hypothèse, $y_1''(x) = -\omega^2 y_1(x)$ et $y_2''(x) = -\omega^2 y_2(x)$. Deux dérivations successives de y donnent

$$y''(x) = \lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) = \lambda_1(-\omega^2 y_1(x)) + \lambda_2(-\omega^2 y_2(x)) = -\omega^2(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) = -\omega^2 y(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et y vérifie l'équation (1). □

A partir des deux Lemmes précédents, nous disposons d'une infinité de solutions de (1) :

Lemme 6.3.4 *Toutes les fonctions de la forme*

$$y(x) = \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x \quad \textit{pour tous } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

sont solutions de (1) *sur* $\mathbb{R}$.

Pour établir le Théorème, nous devons montrer qu*'il n'y a pas d'autres solutions que celles-ci.* La stratégie consiste à prouver

(i) En premier lieu que, si z est une solution quelconque de l'équation (1) sur $\mathbb{R}$, alors il existe une solution y de la forme (2) qui vérifie les *mêmes* conditions initiales que z : $y(0) = z(0)$ et $y'(0) = z'(0)$.

(ii) En second lieu, que la fonction $u = z - y$, qui est solution de (1) avec les conditions initiales nulles $u(0) = u'(0) = 0$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et donc $z = y$.

Afin de mener à bien notre programme, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 6.3.5 *Quels que soient les réels α et β, il existe une unique fonction de la forme*

$$y(x) = \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x \tag{2}$$

qui est solution sur $\mathbb{R}$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \\ y(0) \ = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{array} \right. \tag{3}$$

Démonstration : On sait que toute fonction de la forme (2) *vérifie l'équation* (1).
La fonction $y(x) = \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x$ vérifie la condition initiale $y(0) = \alpha$ si et seulement si $y(0) = \lambda_1 = \alpha$.
D'autre part, puisque $y'(x) = -\lambda_1 \omega \sin \omega x + \lambda_2 \omega \cos \omega x$, il vient $y'(0) = \lambda_2 \omega$ et $y'(0) = \beta$ équivaut à $\lambda_2 = \frac{\beta}{\omega}$
En conclusion, la seule solution de (3) *de la forme* (2) *est $y(x) = \alpha \cos \omega x + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega x$* □

Lemme 6.3.6 *Si la fonction u est solution sur $\mathbb{R}$ du problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) + \omega^2 u(x) = 0 \\ u(0) \ = 0 \\ u'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

alors $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Montrons d'abord que la fonction $u'^2 + \omega^2 u^2$ *est constante sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\left(u'^2 + \omega^2 u^2\right)' = 2u'u'' + \omega^2 2uu' = 2u'\left(u'' + \omega^2 u\right) = 2u' \cdot 0 = 0$$

Ainsi, la dérivée de la fonction $u'^2 + \omega^2 u^2$ *est nulle sur l'intervalle* $\mathbb{R}$ *et par conséquent il existe* $C \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$u'^2(x) + \omega^2 u^2(x) = C, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

d'où, en particulier, pour $x = 0$ *on a* $C = u'^2(0) + \omega^2 u^2(0) = 0$*, à partir des conditions initiales de* u*. En conclusion*

$$u'^2(x) + \omega^2 u^2(x) = 0, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Or une somme de carrés ne peut être nulle que si chacun des termes l'est, donc $\omega^2 u^2(x) = 0$ *et finalement* $u(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.* □

Nous avons maintenant tous les outils pour conclure la preuve du Théorème en suivant le plan précisé ci-dessus :

Démonstration du Th. :

On sait déjà (Lemme 6.3.4) que toutes les fonctions de la forme (2) *sont solutions de* (1)*.*

Montrons qu'il n'y a pas d'autres solutions que celles-ci : soit z *une solution de* (1) *sur* $\mathbb{R}$*.*

Notons $\alpha = z(0)$ *et* $\beta = z'(0)$ *et considérons le problème* (3) *pour ces valeurs de* α *et* β*.*

D'après le Lemme 6.3.5, il existe une solution y *de la forme* (2) *du problème* (3)*.*

Considérons alors la fonction $u = z - y$*. Elle est solution de* (1) *comme combinaison linéaire de deux solution de l'équation (Lemme 6.3.3).*
D'autre part $u(0) = z(0) - y(0) = \alpha - \alpha = 0$ *et* $u'(0) = z'(0) - y'(0) = \beta - \beta = 0$*. Ainsi,* u *est solution sur* $\mathbb{R}$ *du problème* (4) *et donc* $u(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *(Lemme 6.3.6).*

En conclusion $z = y$ *est donc bien de la forme* (2)

Puisque les seules solutions de (1) *sont celles de la forme* (2)*, le Lemme 6.3.5 montre qu'il existe une unique solution du problème* (3) *ce qui conclut la preuve du Th.* □

Remarque.

> *On montre facilement que la famille de fonctions*
>
> $$x \to \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x, \quad \textit{pour tous } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
>
> *s'écrit aussi sous les formes (au choix) :*
>
> *(i)* $x \to A\sin(\omega x + \varphi)$*, pour tous* $A > 0$ *et* $\varphi \in [0, 2\pi[$.
>
> *(ii)* $x \to A\cos(\omega x + \psi)$*, pour tous* $A > 0$ *et* $\psi \in [0, 2\pi[$.
>
> *On pourra chercher directement la solution du problème* (3) *sous l'une ou l'autre de ces écritures.*

6.3.3 L'équation $y'' + \omega^2 y = f$

Proposition 6.3.7 *Soient ω un réel non nul, I un intervalle ouvert, f une fonction définie sur I. On considère l'équation différentielle sur I :*

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = f(x) \tag{1}$$

et l'équation sans second membre (ou homogène) associée

$$z''(x) + \omega^2 z(x) = 0 \tag{2}$$

✘

(a) Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (1), alors la fonction $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ est solution de (2).

(b) Si y_1 est une solution de (1), alors toute autre solution s'obtient en ajoutant à y_1 une solution quelconque de (2). Plus précisément, les solutions de (1) sont :

$$y(x) = y_1(x) + \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x$$

pour tous $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

(a) Pour tout $x \in I$ on a $z'(x) = y_2'(x) - y_1'(x)$, puis

$$\begin{aligned} z''(x) = y_2''(x) - y_1''(x) &= \left(-\omega^2 y_2(x) + f(x)\right) - \left(-\omega^2 y_1(x) + f(x)\right) \\ &= -\omega^2 \left(y_2(x) - y_1(x)\right) = -\omega^2 z(x) \end{aligned}$$

et la fonction z est bien solution de (2).

(b) Montrons d'abord que, si z est une solution de (2), alors la fonction

$$y(x) = y_1(x) + z(x) \tag{3}$$

est solution de (1). En effet :

$$\begin{aligned} y''(x) = y_1''(x) + z''(x) &= \left(-\omega^2 y_1(x) + f(x)\right) + \left(-\omega^2 z(x)\right) \\ &= -\omega^2 \left(y_1(x) + z(x)\right) + f(x) = -\omega^2 y(x) + f(x) \end{aligned}$$

Montrons ensuite que toute solution de (1) est de la forme (3).
Soit y_2 une solution de (1). D'après (a) la fonction $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ est solution de (2) et donc $y_2(x) = y_1(x) + z(x)$ est bien de la forme (3).

Puisque les solutions de (2) sont les fonctions $z(x) = \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x$ (voir Th.6.3.1), nous avons montré que les solutions de (1) sont les fonctions

$$y(x) = y_1(x) + \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x$$

pour tous $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. □

Remarques.

1. La Proposition est un cas particulier d'un principe général de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n avec second membre

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \cdots \ + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x) \qquad (E)$$

La différence de deux solutions de (E) est solution de l'équation sans second membre (ou homogène) associée

$$z^{(n)}(x) + a_1(x)z^{(n-1)} + \ \cdots \ + a_{n-1}(x)z'(x) + a_n(x)z(x) = 0 \qquad (H)$$

Par conséquent, les solutions de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de (H) (on peut transposer facilement la démonstration de la Proposition pour établir ces résultats).

Nous retrouverons ce principe dans la résolution des équations linéaires d'ordre 1

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

2. D'après la Proposition, la résolution de l'équation avec second membre $y''+\omega^2 y = f$ dépend de la détermination d'une solution particulière y_1. Il est facile de déterminer une telle solution lorsque f est un polynôme ou une fonction circulaire (sinus, cosinus) comme le montrent les exemples suivants :

Exemples.

1. Considérons l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y''(x) + 3y(x) = 5x^2 - x \qquad (E)$$

Cherchons une solution particulière de la forme $y_1(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ (c'est-à-dire un polynôme du même degré que le second membre).

On a $y_1'(x) = 2\alpha x + \beta$ et $y_1''(x) = 2\alpha$. Ainsi

$$y_1''(x) + 3y_1(x) = 2\alpha + 3\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 3\alpha x^2 + 3\beta x + (2\alpha + 3\gamma)$$

et y_1 est solution de (E) si $3\alpha = 5$, $3\beta = -1$ et $2\alpha + 3\gamma = 0$. On trouve

$$y_1(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$$

Les solutions de l'équation sans second membre associée $z'' + 3z = 0$ sont les fonctions

$$z(x) = \lambda_1 \cos\sqrt{3}x + \lambda_2 \sin\sqrt{3}x, \quad \text{pour tous } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

et la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) est

$$y(x) = y_1(x) + z(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{10}{9} + \lambda_1 \cos\sqrt{3}x + \lambda_2 \sin\sqrt{3}x$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) + 3y(x) = 4\sin 7x \tag{G}$$

Cherchons une solution particulière de la forme $y_1(x) = \alpha \sin 7x$.

On a $y_1'(x) = 7\alpha \cos 7x$ et $y_1''(x) = -49\alpha \sin 7x$. Par conséquent $y_1''(x) + 3y_1(x) = -46\alpha \sin 7x$ et y_1 est solution de (G) si $-46\alpha = 4$. On obtient donc

$$y_1(x) = -\frac{2}{23}\sin 7x$$

et les solutions de (G) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$y(x) = -\frac{2}{23}\sin 7x + \lambda_1 \cos\sqrt{3}x + \lambda_2 \sin\sqrt{3}x$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

PCS0

COURS D'ANALYSE

Chapitre 7 : Fonctions continues sur un intervalle

Chapitre 8 : Bijections

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 7

Fonctions continues sur un intervalle

7.1 Le Théorème des valeurs intermédiaires

Le Théorème des valeurs intermédiaires énonce qu'une fonction continue sur un intervalle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Il formule rigoureusement l'idée intuitive de continuité : « le graphe d'une fonction continue sur un intervalle peut être tracé sans jamais lever le crayon du papier ».
Rappelons la notion de continuité sur un intervalle :

Définition 7.1.1 (Fonction continue sur un intervalle)
Soient $a < b$ deux réels et f une fonction.

1. On dit que f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ si f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$ (définition identique pour tout autre intervalle ouvert : $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ ou $]-\infty, +\infty[$).
2. On dira que f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si
   (a) f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$.
   (b) f est continue à droite en a et à gauche en b.
3. Définitions analogues pour la continuité de f sur $[a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, b]$ et $]-\infty, b]$.

7.1.1 Premier énoncé du Théorème

Nous donnerons trois énoncés de ce théorème, tous équivalents. Voici la forme la plus simple, qui est une condition suffisante pour qu'une fonction s'annule au moins une fois :

✘ **Théorème 7.1.2** *(Th. des valeurs intermédiaires : premier énoncé)*
Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés ($f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(a) > 0 > f(b)$).
Alors il existe au moins un nombre c strictement compris entre a et b tel que $f(c) = 0$

La Figure 7.1 (a) illustre l'énoncé du Théorème. Les étudiants plus courageux pourront lire la démonstration à la fin du chapitre (Section 7.3).

Exemple.
Montrons que le polynôme $P(x) = x^8 - 3x^5 + 1$ a au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

La fonction $x \to P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier elle est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme $P(0) = 1 > 0$ et $P(1) = -1 < 0$, le Th. des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe au moins un $c \in]0, 1[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarques.

1. Sans l'hypothèse de continuité le résultat est faux en général (voir Fig. 7.1 (b)).

2. Dans la pratique il est rare que l'on connaisse d'emblée a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés : on a une fonction continue sur un intervalle I où l'on souhaite trouver une solution de l'équation $f(x) = 0$. Ce sera donc à nous de trouver deux points $a, b \in I$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

3. En général, le point c de l'énoncé du Th. n'est pas unique (voir Fig. 7.1 (a)). Voici une condition suffisante pour garantir l'unicité de la racine (voir Fig 7.1 (c)) :

✘

Corollaire 7.1.3 *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Supposons que*

1. *Les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.*
2. *La fonction f est strictement monotone sur $[a, b]$.*

Alors il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration : D'après le Th. des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. Montrons que c est unique.

Supposons, pour fixer les idées, que f est strictement croissante sur $[a, b]$.
Alors $a \leq x < c$ implique $f(x) < f(c) = 0$. D'autre part, $c < x \leq b$ implique $0 = f(c) < f(x)$.
En conclusion $f(x) \neq 0$ pour tout point $x \neq c$ dans l'intervalle $[a, b]$. □

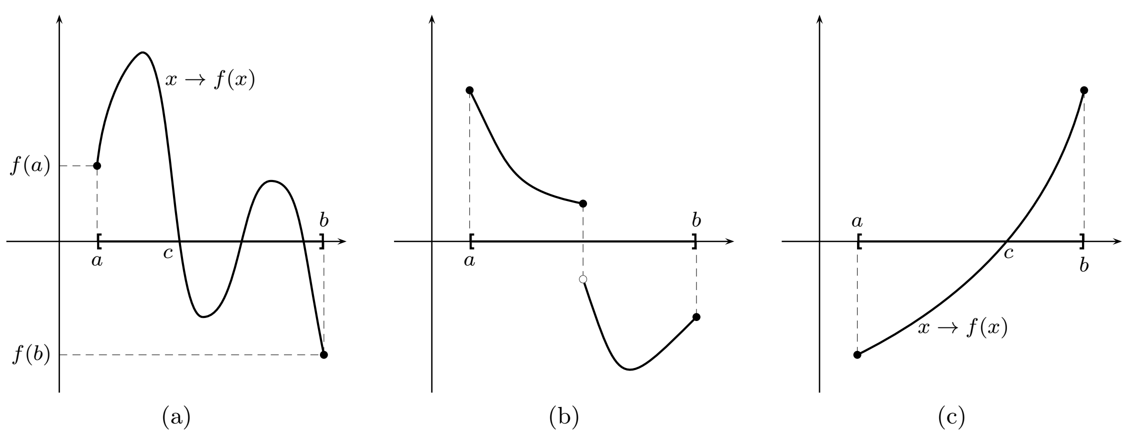


FIGURE 7.1

Remarques. Exemples.

Les exemples qui suivent illustrent plusieurs cas qui étendent le domaine d'application du Th. des valeurs intermédiaires :

1. Montrer que le polynôme $Q(x) = 2x^5 - x^4 + 5x - 8$ admet au moins une racine réelle.

Comme $\lim_{x\to-\infty} Q(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$, il existe deux réels $a < b$ qui vérifient $Q(a) < 0 < Q(b)$. D'autre part, la fonction $x \to Q(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ (elle l'est en tout point de $\mathbb{R}$).

Le Th. des valeurs intermédiaires implique qu'il existe un point c (dans l'intervalle $]a, b[$) tel que $Q(c) = 0$.

Un raisonnement analogue montre que

| *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.*

2. Montrer que l'équation $\tan x = x^7 - 3x^4 + 2$ possède au moins une solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Considérons la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x - (x^7 - 3x^4 + 2)$. Elle est continue en tout point de son domaine de définition comme somme de fonctions continues. Nous devons montrer que f s'annule au moins une fois.

On a $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ (puisque $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} (x^7 - 3x^4 + 2)$ est finie).

De même, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ (car $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (x^7 - 3x^4 + 2)$ est finie).

Par conséquent, il existe deux réels $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$ tels que $f(a) < 0 < f(b)$ et il suffit d'appliquer le Th. des valeurs intermédiaires à f, continue sur l'intervalle $[a, b]$, pour conclure.

3. Montrer que l'équation $(E) : \dfrac{x}{1 + |x|} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1 + x^2}$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + x^2}$. Elle est bien définie et continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Remarquons que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1 - x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + |x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + x} = 1$$

alors que la fonction $x \to \frac{1}{1+x^2}$ admet des limites nulles en $+\infty$ et en $-\infty$.

Il en résulte que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. En particulier, la fonction f est négative dans un certain voisinage de $-\infty$ et positive dans un voisinage de $+\infty$.

On en déduit l'existence de deux réels $a < b$ tels que $f(a) < 0 < f(b)$ et le Th. des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ montre qu'elle s'annule au moins une fois sur cet intervalle, donc sur $\mathbb{R}$, ce qui revient à dire que l'équation (E) possède au moins une solution réelle.

7.1.2 Application : résolution approchée d'une équation

Considérons l'équation

$$x^3 + x - 4 = 0 \qquad (E)$$

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x - 4$ est continue (polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Remarquons que $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 6 > 0$ et que f est continue sur l'intervalle $[1, 2]$: le Th. des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$. A partir de la stricte monotonie de f sur $\mathbb{R}$, on en déduit que c est la seule racine réelle de l'équation (E).

Illustrons deux méthodes pour donner de valeurs approchées de c :

1. Méthode du balayage.

On parcourt l'intervalle $[1, 2]$ où est localisée la racine c par pas de 0.1 et on calcule les valeurs de f en 1, $1,1$, $1,2$ etc... La racine se trouvera dans le sous-intervalle où l'on constate un changement de signe. On obtient :

x	1	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$
$f(x)$	-2	$-1,569$	$-1,072$	$-0,503$	$0,144$

D'après le Th. des valeurs intermédiaires, on a $1,3 < c < 1,4$.

On parcourt ensuite l'intervalle $[1,3\,,\,1,4]$ par pas de $0,01$ en guettant le changement de signe de f. Nous obtenons :

x	$1,30$	$1,31$	$1,32$	$1,33$	$1,34$	$1,35$	$1,36$	$1,37$	$1,38$
$f(x)$	$-0,503$	$-0,441...$	$-0,380...$	$-0,317...$	$-0,253...$	$-0,189...$	$-0,124...$	$-0,058...$	$0,008...$

Par conséquent, on dispose de l'encadrement $1,37 < c < 1,38$.

Si l'on souhaite avoir, par exemple, deux décimales exactes, on poursuit la procédure en balayant l'intervalle $[1,37\,,\,1,38]$ par pas de $0,01$. On constate que $f(1,378) < 0 < f(1,379)$, ce qui donne l'encadrement $1,378 < c < 1,379$.

2. Méthode de la dichotomie.

Il s'agit, comme son nom l'indique, de « couper en deux » l'intervalle $[1, 2]$ où se trouve la racine c et de comparer le signe de f au milieu et aux extrémités de l'intervalle de façon à déterminer le sous-intervalle qui contient c.

On obtient

$f(1) = -2,$ $\qquad f(1,5) = 0,875$ $\qquad f(2) = 6$ $\qquad$ donc $c \in [1\ ,\ 1,5]$

Le milieu de l'intervalle $[1\ ,\ 1,5]$ est $\frac{1+1,5}{2} = 1,25$. On a

$f(1) = -2,$ $\qquad f(1,25) = -0,796...,$ $\qquad f(1,5) = 0,875$ $\qquad$ donc $c \in [1,25\ ,\ 1,5]$

Appliquons la dichotomie à l'intervalle $[1,25\ ,\ 1,5]$. Son centre est $\frac{1,25+1,5}{2} = 1,375$.
On obtient

$f(1,25) = -0,796...,$ $\qquad f(1,375) = -0,025...,$ $\qquad f(1,5) = 0,875$ $\qquad$ donc $c \in [1,375\ ,\ 1,5]$

Si la longueur de l'intervalle de départ où est localisée la racine est l, la méthode fournit, au bout de n étapes, un intervalle de longueur $\frac{l}{2^n}$ qui contient cette racine.

Remarques.

Soit c un réel inconnu. Supposons que l'on dispose de l'encadrement $a \leq c \leq b$ (les réels a et b sont donc connus).

Le réel a est une valeur approchée par défaut de c. Le réel b est une valeur approchée par excès de c. La différence $b - a$ s'appelle l'amplitude de l'encadrement.

Le réel $b - a$ (ou tout majorant ϵ de $b - a$) majore l'erreur de l'approximation. En effet, si $b - a \leq \epsilon$, on a (exercice)

$$0 \leq c - a \leq b - a \leq \epsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq b - c \leq b - a \leq \epsilon$$

On dira alors que a est une valeur approchée par défaut à ϵ près de c. De même, b est une valeur approchée par excès à ϵ près de c. D'habitude, on cherche un majorant ϵ de $b - a$ de la forme $\epsilon = 10^{-n}$ pour exprimer l'erreur de l'approximation.

Supposons, par exemple, que l'on a l'encadrement $0,126 \leq c \leq 0,133$. Son amplitude est $0,133 - 0,126 = 0,007$. On dira ainsi que $0,126$ est une valeur approchée par défaut à $0,007$ près de c. Comme $0,007 \leq 0,01 = 10^{-2}$, on peut dire aussi que $0,126$ est une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de c.

7.1.3 Deuxième énoncé du Théorème

> **Théorème 7.1.4** ***(Th. des valeurs intermédiaires : deuxième énoncé)***
> *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.*
> *Alors, pour tout γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

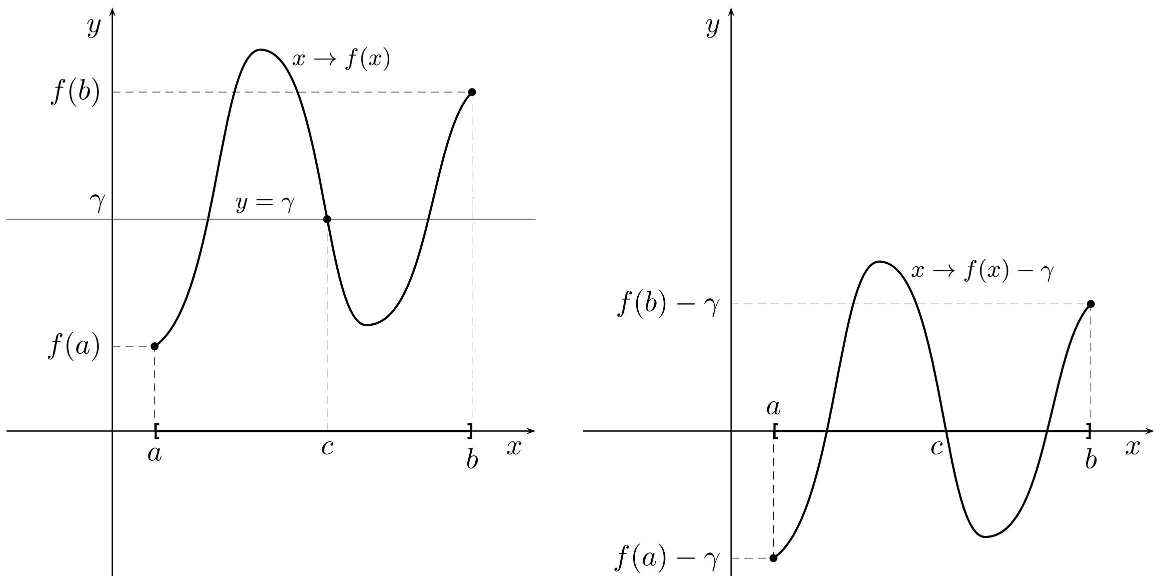
Démonstration : Si $f(a) = f(b)$, on a alors $\gamma = f(a) = f(b)$ et il suffit de prendre $c = a$ ou $c = b$.

Soit donc $f(a) \neq f(b)$. Supposons, par exemple que $f(a) < f(b)$. Si $\gamma = f(a)$ ou $\gamma = f(b)$, l'existence de c est évidente. Soit alors $f(a) < \gamma < f(b)$ fixé (voir Fig. 7.2).

Définissons une fonction auxiliaire $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $F(x) = f(x) - \gamma$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$. De plus, $f(a) < \gamma < f(b)$ implique $f(a) - \gamma < 0 < f(b) - \gamma$, c'est-à-dire que $F(a) < 0 < F(b)$.

On peut donc appliquer à F le Th. 7.1.2 : il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $F(c) = 0$, ce qui revient à dire que $f(c) = \gamma$. □

Remarque.
Si l'on ajoute aux hypothèses du théorème la stricte monotonie de f sur $[a, b]$, alors c est unique.
En effet, la fonction auxiliaire F est alors strictement monotone sur $[a, b]$ et le Corollaire 7.1.3 appliqué à F permet de conclure.



(a) Illustration du deuxième énoncé du Th. des valeurs intermédiaires.

(b) On se ramène au premier énoncé à l'aide de la fonction auxiliaire $F(x) = f(x) - \gamma$

FIGURE 7.2

7.2 L'image d'un intervalle par une fonction continue

Nous avons introduit (Déf. 1.2.8) les différents types d'intervalles à partir des inégalités. Par exemple, si $a < b$, on définit

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Il nous faut maintenant un critère qui permette de dire si une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle ou non :

> **Lemme 7.2.1** ***(Caractérisation des intervalles)***
> *Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si*
>
> *Pour tous $p, q \in A$, avec $p < q$, alors on a $[p, q] \subset A$*

Il est très facile de prouver que tout intervalle vérifie la condition du Lemme.

Néanmoins, établir qu'une partie de $\mathbb{R}$ qui vérifie le critère est un intervalle, demande d'utiliser des propriétés fines des réels qui dépassent le niveau de ce cours.

Nous admettrons donc ce résultat, qui va nous aider à montrer le

7.2.1 Troisième énoncé du Théorème des valeurs intermédiaires

✘
> **Théorème 7.2.2** ***(Th. des valeurs intermédiaires : troisième énoncé)***
> *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*
> *Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration : Utilisons le Lemme 7.2.1 pour montrer que $f(I)$ est un intervalle.

Soient donc $p < q$ deux réels dans $f(I)$ fixés. On doit prouver que $[p, q] \subset f(I)$.

Soit alors $\gamma \in [p, q]$. Montrons que $\gamma \in f(I)$.

Comme $p, q \in f(I)$, on a $p = f(a)$ et $q = f(b)$, avec $a, b \in I$.
Supposons (pour fixer les idées) que $a < b$.
Puisque I est un intervalle, il vient $[a, b] \subset I$ et la fonction f est continue sur $[a, b]$ (car elle l'est sur I).
Le réel $\gamma \in [p, q] = [f(a), f(b)]$ étant compris entre $f(a)$ et $f(b)$, le Th. 7.1.4 affirme qu'il existe au moins un $c \in [a, b] \subset I$ tel que $f(c) = \gamma$, ce qui montre que $\gamma \in f(I)$ □

Le Th. ne dit rien sur la nature de l'intervalle $f(I)$ (ouvert, fermé, borné...) en fonction de la nature de l'intervalle de départ I. Les deux sections qui suivent décrivent deux cas particuliers importants où l'on peut établir un rapport entre les intervalles I et $f(I)$

7.2.2 L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue *(Compléments)*

Lors de l'étude des extrema globaux d'une fonction (Sect. 5.3.1), nous avons cité le résultat fondamental suivant (admis)

> ***Théorème 5.3.2***
> *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$.*
> *Alors f possède sur cet intervalle un maximum et un minimum absolus.*

Remarque.
Rappelons que, pour chaque type d'intervalle I différent de $[a, b]$, on peut exhiber une fonction continue sur I qui ne vérifie pas la conclusion du Th. (voir Section 5.3.1)

A partir des Théorèmes 7.2.2 et 5.3.2 on a

> **Théorème 7.2.3** *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$.*
> *Alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.*

Démonstration : D'après le Th. 5.3.2, la fonction f possède sur $[a, b]$ un maximum absolu M et un minimum absolu m, atteints en des points c_1 et c_2 dans $[a, b]$: $f(c_1) = M$, $f(c_2) = m$. Montrons que $f([a, b]) = [m, M]$.

Etablissons d'abord que $[m, M] \subset f([a, b])$.
En effet : d'après le Th. 7.2.2, $f([a, b])$ est un intervalle. Il contient les points $M = f(c_1)$ et $m = f(c_2)$ et par conséquent (caractérisation des intervalles : Lemme 7.2.1) il contient tout l'intervalle $[m, M]$.

Montrons ensuite que $f([a, b]) \subset [m, M]$.
Par définition de m et M, on a $m \leq f(x) \leq M$, pour tout $x \in [a, b]$, d'où le résultat. □

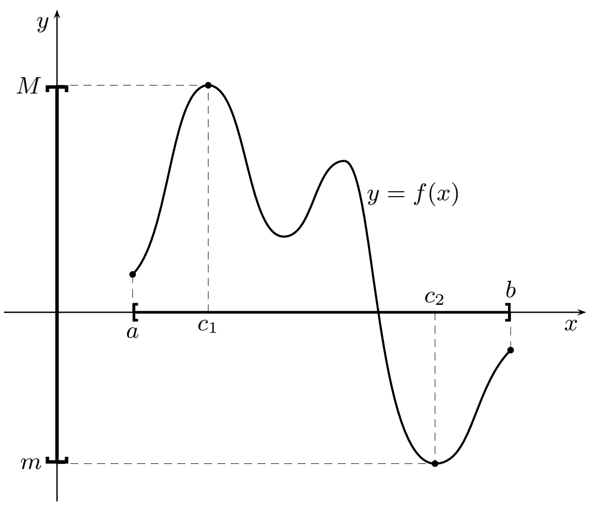


FIGURE 7.3 – $M = f(c_1)$ est le maximum absolu de f sur $[a, b]$ et $m = f(c_2)$ est le minimum absolu. On a $f([a, b]) = [m, M]$.

Remarques.

L'image par la fonction continue f de l'intervalle $[a,b]$ est l'intervalle $[m,M]$ dont les extrémités sont, respectivement, le minimum et le maximum absolus de f sur $[a,b]$.

En général (voir Fig. 7.3) il n'y a pas de lien entre m, M et les valeurs $f(a)$ et $f(b)$: l'image de l'intervalle $[0,2\pi]$ par la fonction sinus est l'intervalle $[-1,1]$, alors que $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$.

Cependant, si la fonction f est continue et croissante, alors $m = f(a)$, $M = f(b)$ et $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. De même, si f est continue et décroissante, on a $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$. Ceci introduit naturellement l'étude de...

7.2.3 L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

On admettra le résultat suivant, très facile à appréhender intuitivement.

✘

Théorème 7.2.4 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Le tableau suivant donne l'intervalle $f(I)$ en fonction du type de I et de la monotonie de f (on sous-entend toujours $a < b$) :*

Intervalle I	*$f(I)$ si f strictement croissante*	*$f(I)$ si f strictement décroissante*
$[\,a,\, b\,]$	$[\,f(a),\, f(b)\,]$	$[\,f(b),\, f(a)\,]$
$]\,a,\, b\,[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\, \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,[$
$[\,a,\, b\,[$	$[\,f(a),\, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\, f(a)\,]$
$]\,a,\, b\,]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\, f(b)\,]$	$[\,f(b),\, \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,[$
$[\,a, +\infty\,[$	$[\,f(a),\, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\,[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\, f(a)\,]$
$]\,a, +\infty\,[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\,[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\, \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,[$
$]-\infty,\, b\,]$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\, f(b)\,]$	$[\,f(b),\, \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\,[$
$]-\infty,\, b\,[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\, \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\,[$
$]-\infty, +\infty\,[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\,[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\, \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\,[$

En particulier, toutes les limites du tableau existent (elles peuvent prendre des valeurs finies ou infinies).

Remarques.

1. Si f est continue et strictement croissante, les intervalles I et $f(I)$ ont les mêmes crochets. Si f est continue et strictement décroissante, les crochets de I et de $f(I)$ sont intervertis.

2. En particulier, les intervalles ouverts sont conservés par les fonctions continues et strictement monotones. Les exemples qui suivent (voir Fig. 7.4) montrent cependant qu'une fonction continue et strictement monotone peut transformer un intervalle ouvert borné en un intervalle ouvert non borné et vice-versa.

3. Sans l'hypothèse de stricte monotonie et en dehors du cas $f([a,b]) = [m, M]$ (Th. 7.2.3), il n'y a pas de lien entre les crochets des intervalles I et $f(I)$. Par exemple, $\sin(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$. Encore un exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1$, et $f(x) = 1$ pour $x \geq 1$ (tracer son graphe). La fonction f est continue et croissante sur $\mathbb{R}$ (mais non strictement croissante) et $f(]-\infty, +\infty[) = f(]-1, 2[) = [0, 1]$.

Exemples.

1. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Elle est continue (et dérivable) en tout point de $]-1, 1[$ (fraction rationnelle). On a

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} < 0$$

en tout point de l'intervalle $]-1, 1[$, par conséquent (Th. 5.2.4) f est (strictement) décroissante sur cet intervalle. Nous avons les conditions (monotonie, continuité) pour appliquer le Th. 7.2.4, qui nous permet d'écrire

$$f(]-1, 1[) =]\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -1^+} f(x)[$$

Calculons ces limites :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = -\infty$$

puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ (forme « $\dfrac{1}{0^-}$ »). De même :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = +\infty$$

car $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ (forme « $\dfrac{1}{0^+}$ »). Ainsi

$$f(]-1, 1[) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

La Fig. 7.4 (a) illustre le graphe de f.

2. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues (avec $1 + |x| \neq 0$).

Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ est calculons sa dérivée :

(i) Sur l'ouvert $]0,+\infty[$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ (formules de dérivation).

(ii) Sur l'ouvert $]-\infty,0[$, on a $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

(iii) Etudions la dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+|x|} = 1$$

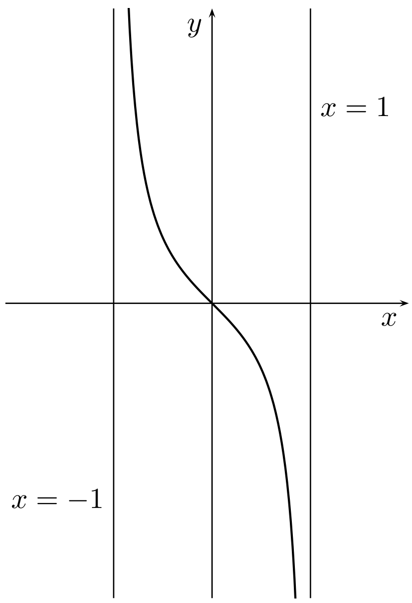
En conclusion, $g'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $\mathbb{R}$, donc (Th. 5.2.4) g est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

La continuité et la monotonie de g donnent (Th. 7.2.4) :

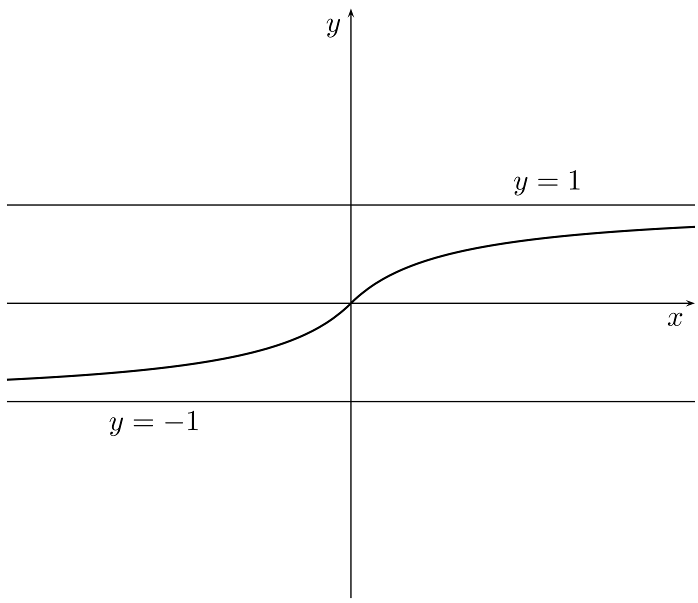
$$g(\mathbb{R}) = g\left(]-\infty,+\infty[\right) = \left]\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-1,1[$$

En effet, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$.

Le graphe de g est tracé dans la Fig. 7.4 (b).



(a) Le graphe de $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. On a $f\left(]-1,1[\right) = \mathbb{R}$.



(b) Le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$. On a $g(\mathbb{R}) =]-1,1[$.

FIGURE 7.4

7.3 La démonstration du Th. des valeurs intermédiaires *(Compléments)*

Nous présentons ici la démonstration du premier énoncé du Th. des valeurs intermédiaires (à partir duquel nous avons établi les deux autres).

> ***Théorème 7.1.2***
> *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés.*
> *Alors il existe au moins un nombre c strictement compris entre a et b tel que $f(c) = 0$*

Au préalable, nous aurons besoin d'un résultat qui n'a pas de lien avec les fonctions continues sur un intervalle, mais avec la structure des nombres réels : le principe des segments emboîtés. Le mot « segment » désigne en analyse un intervalle fermé et borné.

Définition 7.3.1 (Suite de segments emboîtés)
Une suite de segments emboîtés est une suite infinie de segments $(\ I_n\ )_{n\geq 0}$:

$$I_0 = [a_0, b_0], \quad I_1 = [a_1, b_1], \quad \cdots \quad I_n = [a_n, b_n], \quad \cdots$$

tels que, pour chaque $n \geq 0$, on a $I_{n+1} \ \subset \ I_n$:

$$\cdots \ \subset \ I_{n+1} \ \subset \ I_n \ \subset \ \cdots \ \subset \ I_2 \ \subset \ I_1 \ \subset \ I_0$$

En ce qui concerne les bornes des segments, cela signifie que, pour chaque $n \geq 0$, on a

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

Nous admettrons le résultat suivant

> **Lemme 7.3.2** ***(Principe des segments emboîtés)***
> *Soit $(\ I_n\ )_{n\geq 0} = (\ [a_n, b_n]\ )_{n\geq 0}$ une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0 :*
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \textit{longueur}(\ I_n\ ) = \lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$$
>
> *Alors il existe un (et un seul) réel c appartenant à tous les segments I_n.*

Remarques.

1. Ce principe exprime le fait que l'ensemble des réels « n'a pas de trous » et légitime l'identification de $\mathbb{R}$ à la droite numérique. Le Lemme est faux dans $\mathbb{Q}$.

2. Le point fondamental n'est pas l'unicité du point commun à tous les segments, mais l'existence d'au moins un nombre appartenant à tous les I_n.
En effet, une fois établi que l'intersection des segments est non vide, il est clair qu'elle est constituée d'un seul élément, car si c et c' sont deux réels distincts communs à tous les segments, on aurait $0 < |c - c'| \leq$ *longueur* $(\ I_n\ )$, or ceci est impossible puisque cette longueur tend vers 0.

3. Le réel c du Lemme vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$.

Démonstration du Th : Pour fixer les idées, supposons que $f(a) < 0 < f(b)$.

Nous allons construire par dichotomie une suite de segments emboîtés $(\ I_n\ )_{n\geq 0} = (\ [a_n, b_n]\ )_{n\geq 0}$ *dont la longueur tend vers* 0.

Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$. *Notre premier segment sera donc* $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$.

Considérons ensuite le milieu m *de ce segment :* $m = \frac{a_0+b_0}{2}$. *L'étude du signe de* $f(m)$ *déterminera la construction du segment* $I_1 = [a_1, b_1]$ *: il sera l'une des deux moitiés* ($[a_0, m]$ *ou* $[m, b_0]$) *du segment* I_0. *Le choix vise à obtenir que* $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, *comme pour les extrémités de* I_0 *(où l'on a* $f(a_0) < 0 < f(b_0)$*).*

Plus précisément, de trois choses l'une :

1. *Ou bien* $f(m) = 0$. *Le Théorème est démontré et on arrête le processus.*
2. *Ou bien* $f(m)$ *est strictement positif comme* $f(b_0)$. *On pose dans ce cas* $a_1 = a_0$ *et* $b_1 = m$.
3. *Ou bien* $f(m)$ *est strictement négatif comme* $f(a_0)$. *On posera alors* $a_1 = m$ *et* $b_1 = b_0$.

Nous avons construit un intervalle $I_1 = [a_1, b_1]$ *qui vérifie :*

(i) $I_1 \subset I_0$.
(ii) longueur $(I_1) = \frac{1}{2}$ *longueur* (I_0).
(iii) $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ *comme pour les extrémités de* I_0.

Le même processus de dichotomie peut être appliqué au nouvel intervalle I_1 *: examen de la valeur prise par* f *au milieu de l'intervalle et, selon les cas, arrêt du processus ou choix de l'une de ses deux moitiés comme intervalle* I_2.
Ainsi longueur $(I_2) = \frac{1}{2}$ *longueur* $(I_1) = \frac{1}{2^2}$ *longueur* (I_0).

Si le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes, c'est qu'on a trouvé un nombre c *vérifiant* $f(c) = 0$ *et le théorème est établi.*

Si le processus ne s'arrête jamais, on a fabrique une suite de segments emboîtés $(\ I_n\ )_{n\geq 0} = (\ [a_n, b_n]\ )_{n\geq 0}$ *possédant les propriétés suivantes :*

1. *longueur* $(I_n) = \frac{1}{2^n}$ *longueur* $(I_0) = \frac{b-a}{2^n}$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$.
2. *Pour tout* $n \geq 0$, $f(a_n)$ *est du signe de* $f(a)$ *: strictement négatif.*
3. *Pour tout* $n \geq 0$, $f(b_n)$ *est du signe de* $f(b)$ *: strictement positif.*

Le principe des segments emboîtés nous garantit l'existence d'un unique réel c *appartenant à tous les* I_n.
Il vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$.

Montrons que $f(c) = 0$.

Comme $c \in \,]a, b[$, *la fonction* f *est continue en* c. *Par conséquent* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$ *implique* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$. *Comme* $f(a_n) < 0$ *quel que soit* n, *et que le passage à la limite conserve les inégalités larges, il s'ensuit que* $f(c) \leq 0$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$, *implique* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$ *(continuité de* f *au point* c*). Par construction,* $f(b_n) > 0$ *pour tout* $n \geq 0$, *d'ou* $f(c) \geq 0$ *par passage à la limite.*

En conséquence $f(c)$ *ne peut qu'être nul, ce qui termine la démonstration du théorème.* $\square$

Chapitre 8

Bijections

8.1 Bijection. Fonction réciproque

Définition 8.1.1 (Bijection de A sur B)
Soient $A, B \subset \mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur A ($A \subset D_f$).
On dit que f est une bijection de A sur B si

1. $f(A) = B$.
2. Tout élément de B est l'image par f d'un seul élément de A

Remarques.

1. Puisque $B = f(A)$, on dira souvent « f bijection de A sur $f(A)$ » ou « f bijection de A sur son image ». La locution « montrer que f est une bijection de A sur un ensemble que l'on déterminera » demande donc de montrer que f est une bijection de A sur $f(A)$ (et de déterminer cet ensemble).

2. La deuxième condition de la définition signifie que tout élément $y \in B$, possède dans A un antécédent (par f) et un seul. En d'autres termes : pour tout $y \in B$, l'équation (en x) $f(x) = y$ admet dans A une solution unique.

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$.
Montrons que f est une bijection de R sur R.

Si nous traçons le graphe de f (voir Fig. 8.1 (a)) il est géométriquement évident que les conditions 1. et 2. de la définition pour $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$ sont vérifiées : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et tout élément y de $\mathbb{R}$ est l'image par f d'un seul réel (la figure illustre ce fait pour un $y_1 > 0$ et un $y_2 < 0$). Etablissons ceci rigoureusement :

1. Comme f est continue et croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on a

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} 3x + 2, \lim_{x\to+\infty} 3x + 2\,[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

2. D'autre part, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = 3x + 2 \;\Leftrightarrow\; 3x = y - 2 \;\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(y - 2)$$

Par conséquent, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

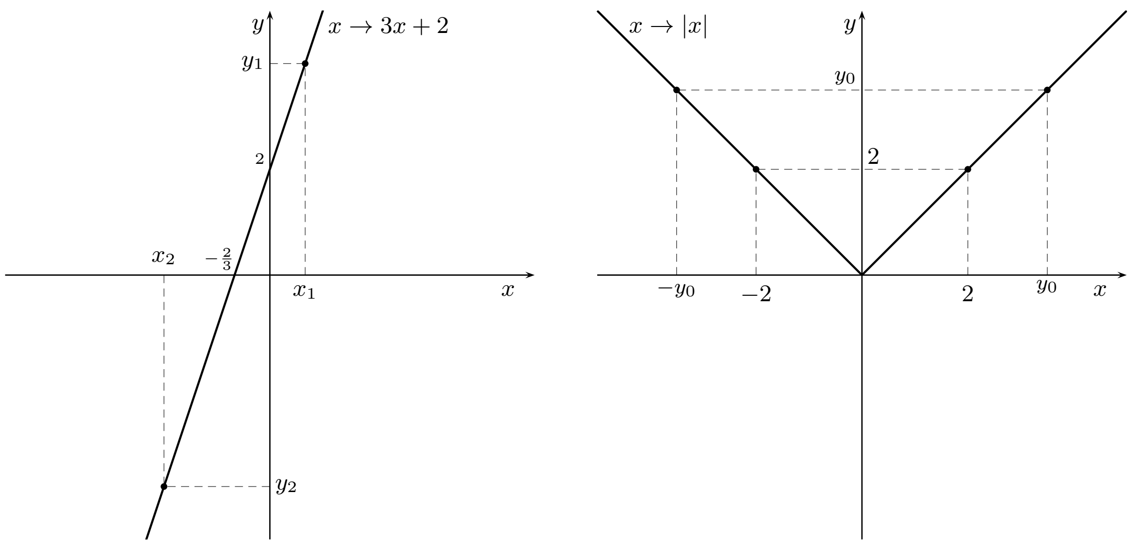
2. Considérons la fonction $g(x) = |x|$ (voir Fig. 8.1 (b)).

Bien que $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$, la fonction g n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0, +\infty[$: il suffit de remarquer, par exemple, que $g(-2) = g(2) = 2$.

On voit dans la figure que tout réel $y_0 > 0$ admet deux antécédents par g : l'un positif (y_0), l'autre négatif ($-y_0$).

Ainsi, g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ car, pour tout $y \geq 0$, il existe un unique $x \geq 0$ tel que $g(x) = |x| = y$, il s'agit du réel $x = y$.

De même, g est aussi une bijection de $]-\infty, 0]$ sur son image $g(]-\infty, 0]) = [0, +\infty[$: pour tout $y \geq 0$, il existe un unique $x \leq 0$ tel que $g(x) = |x| = y$, il s'agit du réel $x = -y$.



(a) La fonction de l'exemple 1. (b) Le cas de l'exemple 2.

FIGURE 8.1 – Approche intuitive de la notion de bijection

Définition 8.1.2 (Fonction réciproque)
Soit f une bijection de A sur B. On peut définir sur l'ensemble B une fonction, qu'on note généralement f^{-1}, qui associe à tout élément $y \in B$ l'unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$:

$$f^{-1}(y) = x \text{ si et seulement si } f(x) = y, \text{ pour tous } x \in A,\ y \in B$$

Cette fonction s'appelle la fonction réciproque de la bijection (de A sur B) f.

Remarques.

On montre facilement que f^{-1} est une bijection de B sur A, c'est pourquoi on parle de bijection réciproque.
La fonction réciproque de f^{-1} est évidemment la fonction f elle-même : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Utiliser la notation f^{-1} suppose que la fonction f *ainsi que les ensembles* A et B son précisés sans ambigüité.

Exemples.

1. Revenons à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 2$. Nous avons montré qu'elle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
On a vu que, pour tout réel y fixé, le seul x vérifiant $f(x) = y$ est $x = \frac{1}{3}(y - 2)$.
Par conséquent, la fonction réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y - 2)$.
Il s'agit d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Considérons à nouveau la fonction $g : x \to |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ (voir Fig. 8.1 (b)).

On a montré que la fonction g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
L'application réciproque est la bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ définie par $y \to y$.

Mais g est aussi une bijection de $]-\infty, 0]$ sur son image $g(]-\infty, 0]) = [0, +\infty[$ et sa fonction réciproque est la bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 0]$ définie par $y \to -y$.

Remarques.

1. Soit f une bijection de A sur B et f^{-1} sa fonction réciproque : f^{-1} est une bijection de B sur A. Alors

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1} \circ f\right)(x) &= f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \quad \text{pour tout } x \in A \\
\left(f \circ f^{-1}\right)(y) &= f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \quad \text{pour tout } y \in B
\end{aligned}$$

2. Soit f une bijection de A sur B et g une bijection de B sur C.

Alors la fonction composée $g \circ f : x \to g(f(x))$ est bien définie sur A (puisque $f(A) = B$ et que g est définie sur B). On montre facilement que $g \circ f$ est une bijection de A sur C et la bijection réciproque est

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Attention à l'ordre de la composition :

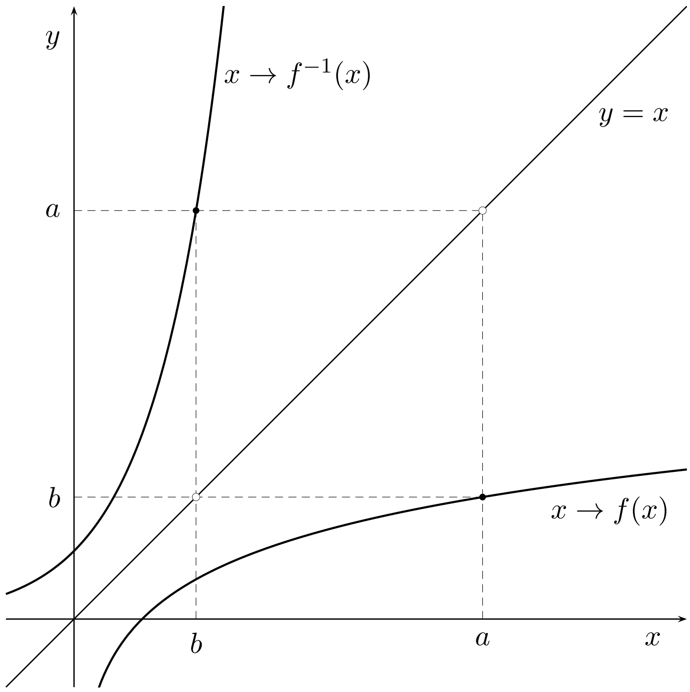
$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
A & \xleftarrow{f^{-1}} & B & \xleftarrow{g^{-1}} & C
\end{array}$$

3. Les graphes, dans un même repère orthonormé, de la bijection $x \to f(x)$ et de sa bijection réciproque $x \to f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.

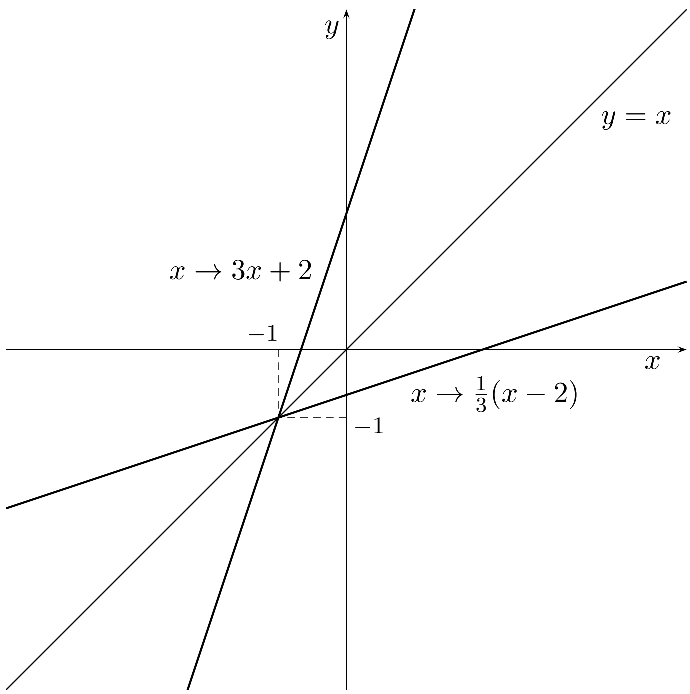
Rappelons d'abord que les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à $y = x$. En effet, il suffit de considérer (voir Fig. 8.2 (a)) le carré déterminé par les points (b, b), (a, b), (a, a) et (b, a).

Considérons alors un point (a, b) du graphe de f, on aura $(a, b) = (a, f(a))$. Son symétrique par rapport à $y = x$ est le point $(b, a) = (f(a), a)$ qui appartient bien au graphe de $x \to f^{-1}(x)$ car $f^{-1}(b) = f^{-1}\left(f(a)\right) = a$.

Les graphes de la fonction $x \to 3x+2$ et de sa fonction réciproque $x \to \frac{1}{3}(x-2)$ (voir Exemple 1) sont tracés dans la Figure 8.2 (b).



(a) Symétrie des graphes de f et f^{-1} par rapport à $y = x$.



(b) Le cas de l'exemple 1.

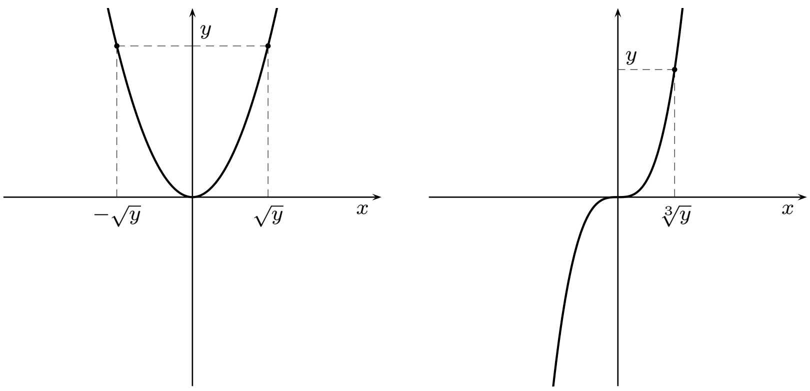
FIGURE 8.2 – Graphes d'une bijection et de sa fonction réciproque dans un même repère orthonormé.

Exemples.

Dans la Section 2.2.3 nous avons étudié intuitivement l'existence (et le nombre) de solutions de l'équation en x : $x^n = y$ (Prop. 2.2.4) à partir du graphe de la fonction $f : x \to x^n$, puisque les solutions de l'équation sont les antécédents de y par f. Cette étude nous permettait de définir la fonction racine n-ième.
Rappelons les cas $n = 2$ et $n = 3$, qui servent respectivement de modèles pour les situations générales n pair et n impair (voir Fig 8.3)

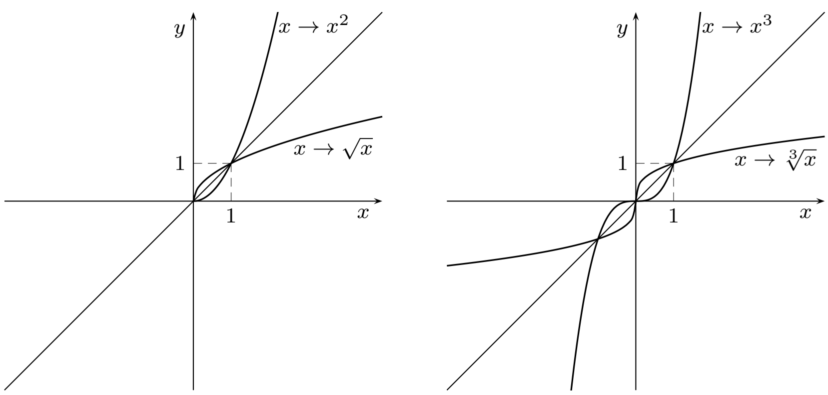
1. A partir du graphe de la parabole $p : x \to x^2$, on voit intuitivement que tout $y > 0$ possède deux antécédents par p, qui sont opposés. On notera $\sqrt{y}$ l'antécédent positif. Les solutions de l'équation $x^2 = y$ sont donc $x = \pm\sqrt{y}$. On note $\sqrt{0} = 0$ (l'unique solution de $x^2 = 0$).
En termes des bijections, ceci signifie que $p : x \to x^2$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $p\left([0, +\infty[\right) = [0, +\infty[$ et que sa bijection réciproque est la fonction $y \to \sqrt{y}$.

2. On voit à partir du graphe de la cubique $c : x \to x^3$ que tout réel y admet un unique antécédent par c, on le note $\sqrt[3]{y}$: il est la seule solution de l'équation $x^3 = y$.
Voici la traduction dans le langage des bijections : $c : x \to x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $c(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la fonction $y \to \sqrt[3]{y}$ est sa bijection réciproque.



(a) Le cas $n = 2$. (b) Le cas $n = 3$.

FIGURE 8.3 – Les solutions de l'équation (en x) $x^n = y$.



(a) Le cas $n = 2$. (b) Le cas $n = 3$.

FIGURE 8.4 – Symétrie des graphes par rapport à $y = x$

Nous établirons rigoureusement ces faits après avoir démontré

8.2 Le Théorème de la bijection.

Comment montrer qu'une fonction f est une bijection ? Quelles sont les propriétés de sa bijection réciproque ?

On peut se reporter à la définition et chercher le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$, voire essayer de résoudre cette équation pour déterminer explicitement f^{-1} et étudier ses propriétés. Ce n'est évidemment pas toujours réalisable.

Le Th. de la bijection va nous donner un cadre dans lequel on peut répondre de façon satisfaisante à ces questions.

Remarquons d'abord une condition suffisante pour qu'une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ soit une bijection de A sur son image :

> **Lemme 8.2.1** *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.*
> *Si f est strictement monotone sur A, alors f est une bijection de A sur $f(A)$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ est de même monotonie que f.*

Démonstration : Supposons par exemple que f est strictement croissante sur A.

Montrons que f est une bijection de A sur $f(A)$:

Soit $y_0 \in f(A)$ fixé. Il existe donc $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) = y_0$. Or x_0 est l'unique antécédent de y_0 par f car, à partir des hypothèses sur la monotonie de f, on a

$$\text{Si } x' < x_0 \text{ et } x' \in A, \text{ alors } f(x') < f(x_0) = y_0$$

$$\text{Si } x'' > x_0 \text{ et } x'' \in A, \text{ alors } f(x'') > f(x_0) = y_0$$

En conclusion, pour tout $x \in A$, $x \neq x_0$, on a $f(x) \neq y_0$.

Etablissons maintenant que f^{-1} est strictement croissante sur $f(A)$:

Soient

$$y_0 < y_1$$

deux éléments de $f(A)$ fixés.

Soient x_0, x_1, leurs antécédents (uniques !) par f : $f(x_0) = y_0$, f : $f(x_1) = y_1$.
Remarquons que $x_0 < x_1$ (si $x_0 \geq x_1$ on aurait $y_0 = f(x_0) \geq f(x_1) = y_1$, contre l'hypothèse).
Or, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et on a bien

$$f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_1)$$

$\square$

✘ **Théorème 8.2.2** ***(Th. de la bijection)***
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.
Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
L'application réciproque $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ est continue sur $f(I)$, de même monotonie que f.

Démonstration : D'après le Lemme, f est une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est de même monotonie que f.

Comme I est un intervalle et f est continue sur I, alors $f(I)$ est aussi un intervalle (voir Th. 7.2.2)

Nous admettrons la continuité de f^{-1} sur l'intervalle $f(I)$, qu'on peut justifier intuitivement car les graphes de $x \to f(x)$ et de $x \to f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à $y = x$. Ainsi, si le graphe de f ne présente pas de « coupures », celui de f^{-1} non plus. □

Remarques.

1. Dans le Lemme, A est une partie quelconque de $\mathbb{R}$, pas forcement un intervalle. La notion de continuité y est absente aussi.

2. La continuité et la monotonie de f, présentes dans les hypothèses du Th. de la bijection, nous permettent de calculer explicitement l'intervalle image $f(I)$ (voir Th. 7.2.4)

8.2.1 Application : Définition rigoureuse des fonctions racines.

Le cas impair.

Soit $n > 1$ un nombre naturel impair. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

La fonction f est continue (et dérivable) sur $\mathbb{R}$ (polynôme).

Comme $f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($n-1$ est pair) et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, la Prop. 5.2.5 montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est continue et croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ on a (Th. 7.2.4) :

$$f(\mathbb{R}) = f\left(]-\infty, +\infty[\right) = \left] \lim_{x \to -\infty} x^n, \lim_{x \to +\infty} x^n \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Le Th. de la bijection nous dit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et que l'application réciproque f^{-1}, bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En particulier, pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation en x : $x^n = y$ (c'est-à-dire $f(x) = y$) possède dans $\mathbb{R}$ une solution et une seule : $x = f^{-1}(y)$, cette solution se note $x = f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ (racine n-ième de y) et la fonction f^{-1} s'appelle fonction racine n-ième.

L'égalité $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$, s'écrit : $\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Puisque $f^{-1}(f(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt[n]{x^n} = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les graphes des fonctions $f : x \to x^n$ et $f^{-1} : x \to \sqrt[n]{x}$ sont donc symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Le cas pair.

Soit maintenant $n > 1$ un naturel pair. Considérons la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^n$.

Comme g est continue sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) = nx^{n-1} > 0$ si $x > 0$ (c'est-à dire sur l'intérieur de $[0, +\infty[$), le Th. 5.2.4 établit que g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Puisque g est continue et croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, le Th. 7.2.4 montre que

$$g\left([0, +\infty[\right) = [g(0), \lim_{x \to -\infty} x^n[= [0, +\infty[$$

D'après le Th. de la bijection, g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, et sa fonction réciproque g^{-1}, bijection elle aussi de $[0, +\infty[$ sur lui-même, est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Par conséquent, pour tout $y \in [0, +\infty[$ fixé, l'équation en x : $x^n = y$ (c'est-à-dire $g(x) = y$) admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution $x = g^{-1}(y)$, notée $x = g^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.
La fonction $g^{-1} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle fonction racine n-ième.

Remarquons que si $y > 0$ est un réel fixé, l'équation $x^n = y$, possède alors deux solutions sur $\mathbb{R}$: $x = -\sqrt[n]{y}$ et $x = \sqrt[n]{y}$.

Les égalités $g\left(g^{-1}(y)\right) = y$ et $g^{-1}\left(g(x)\right) = x$ (vraies pour tous $x, y \geq 0$) donnent respectivement $\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$, pour tous $x, y \geq 0$.

8.3 Dérivée de la fonction réciproque *(Compléments)*

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert I.
Elle est donc une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Remarquons que, d'après le Th. 7.2.4, $f(I)$ est aussi un intervalle ouvert.

Soit f^{-1} la fonction réciproque de cette bijection. Elle est donc une bijection de $f(I)$ sur I.

Soit $x_0 \in I$. Notons $y_0 = f(x_0) \in f(I)$. Comme I et $f(I)$ sont ouverts, f est définie au voisinage de x_0 et f^{-1} au voisinage de y_0.

Supposons que f est dérivable en x_0. Le graphe de f admet donc une droite tangente Δ au point (x_0, y_0). On sait que la pente de Δ est $f'(x_0)$.

Les graphes de $x \to f(x)$ et de $x \to f^{-1}(x)$ étant symétriques par rapport à la première bissectrice, il apparait graphiquement que le graphe de f^{-1} admet au point (y_0, x_0) une tangente Δ' qui est la symétrique de Δ par rapport à $y = x$.

Si Δ n'est pas horizontale ($f'(x_0) \neq 0$), alors Δ' n'est pas verticale et sa pente est définie. Par conséquent f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \text{pente}\left(\Delta'\right) = \frac{1}{\text{pente}\,(\Delta)} = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{1}$$

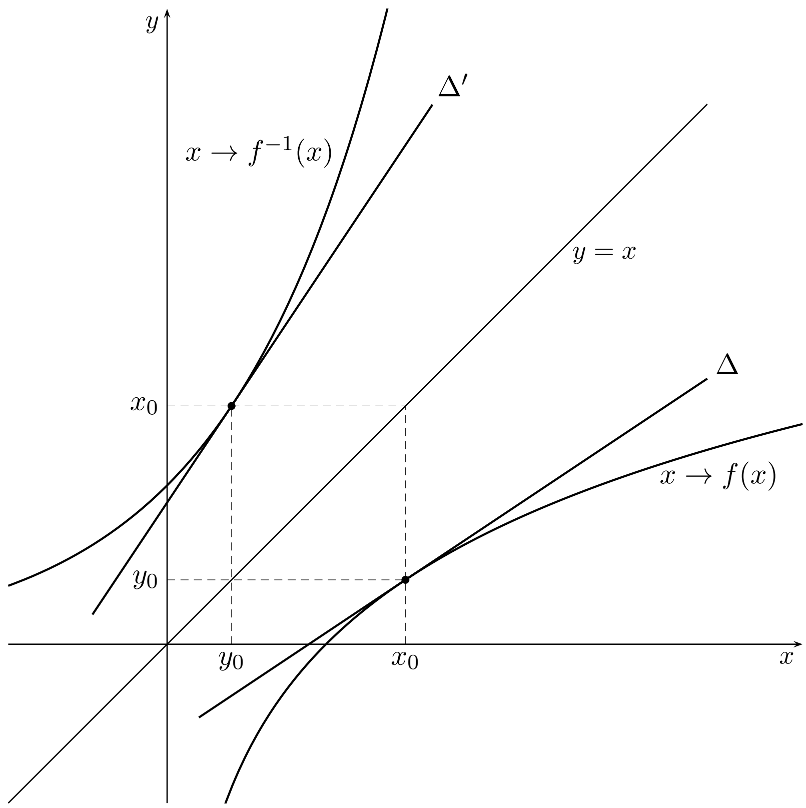


FIGURE 8.5 – Les droites tangentes Δ et Δ' sont symétriques par rapport à $y = x$.

Remarques.

1. L'égalité pente $\left(\Delta'\right) = \dfrac{1}{\text{pente}\,(\Delta)}$ découle de la symétrie entre les deux droites.

En effet, si $p = (p_1, p_2)$ et $q = (q_1, q_2)$ sont deux points de Δ, alors leurs symétriques par rapport à la première bissectrice sont, respectivement, $p' = (p_2, p_1)$ et $q' = (q_2, q_1)$. Ils appartiennent à Δ'.

Or, pente $(\Delta) = \dfrac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$ et pente $\left(\Delta'\right) = \dfrac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2}$, d'où le résultat.

2. Puisque $y_0 = f(x_0)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$, l'égalité (1) s'écrit aussi

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

ou encore

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3. Si Δ est horizontale ($f'(x_0) = 0$) alors Δ' est verticale et f^{-1} n'est pas dérivable en y_0.

Nous avons établi géométriquement le résultat suivant :

> **Théorème 8.3.1** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert I (elle est donc une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$).*
> *Soit f^{-1} sa bijection réciproque. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in f(I)$. On a :*
>
> 1. *Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et*
>
> $$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$
>
> 2. *Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0, mais son graphe admet, au point d'abscisse y_0, une tangente verticale.*

Retrouvons le premier résultat avec les moyens de l'analyse. Rappelons que

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

si la limite est finie.

Utilisons le changement de variable $x = x(y) = f^{-1}(y)$. Alors $y = f(x)$ et

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

(noter que $y \neq y_0$ équivaut à $x \neq x_0$, car f est une bijection).

Si $y \to y_0$, alors $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$ (continuité de f^{-1} : Th. 8.2.2) c'est à dire que $x \to x_0$.

Par conséquent, si $f'(x_0) \neq 0$, on obtient

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

8.3.1 Application : Dérivées des fonctions racines.

Soit $n > 1$ un nombre naturel impair.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

Elle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, et sa fonction réciproque $f^{-1} : y \to \sqrt[n]{y}$ est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (Sect. 8.2.1).

Le seul point où f' s'annule est $x_0 = 0$.
Par conséquent, f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0) = f(0) = 0$, mais son graphe admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale (Th. 8.3.1, résultat 2.).

Pour tout $y \neq 0$ nous avons $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$ (Th. 8.3.1, résultat 1.), c'est-à-dire

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} \tag{1}$$

En particulier, si $y > 0$, nous pouvons employer les exposants fractionnaires : par définition, $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$ (Sect. 2.4) et l'égalité (1) s'écrit

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1} \tag{2}$$

Si n est pair, la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^n$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui même et sa bijection réciproque est $g^{-1} : y \to \sqrt[n]{y}$ (Sect. 8.2.1).

Raisonnant comme précédemment, on montre que le graphe de g^{-1} admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 et on retrouve les formules (1) et (2) pour tout $y > 0$.

Remarques.

Grâce à la formule (2), valide pour n pair ou impair, nous pouvons montrer la formule de dérivation d'une puissance rationnelle annoncée dans la Prop. 4.3.5 : pour tout $y > 0$, on a $(y^q)' = qy^{q-1}$, si q est un rationnel fixé. En effet :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ et $m \in \mathbb{Z}$. Pour tout réel $y > 0$ on définit (Sect. 2.4)

$$y^{\frac{m}{n}} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Comme $(u^m)' = mu^{m-1}$ (voir Prop. 4.3.2 et 4.3.3), on obtient à partir de la formule de dérivation d'une fonction composée et de l'égalité (2) :

$$\left(y^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)' = m\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = m\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}\right) = \frac{m}{n}\,y^{\frac{m}{n}-1}$$

PCSO

COURS D'ANALYSE

Chapitre 9 : Le logarithme népérien

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 9

Le logarithme népérien

9.1 Définition

Lors de l'étude de l'équation différentielle $y' = f$, nous avons montré le résultat suivant

> ***Proposition 6.1.5***
> *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*
> *Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés. Le problème*
>
> $$\left\{ \begin{array}{ll} y'(x) & = f(x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{array} \right.$$
>
> *admet une unique solution sur I.*

En particulier, si $I =]0, +\infty[$ et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction (continue) définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, nous pouvons énoncer

Définition 9.1.1 (La fonction logarithme népérien)
Il existe une unique solution définie sur $]0, +\infty[$ du problème

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{ll} y'(x) & = \dfrac{1}{x} \\ & \\ y(1) = 0 & \end{array} \right.$$

cette solution s'appelle la fonction logarithme népérien (qu'on note $\ln$).

Nous déduirons donc toutes les propriétés du logarithme à partir des trois faits suivants :

1. La fonction $x \to \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Elle est dérivable sur cet intervalle et vérifie $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
3. On a $\ln(1) = 0$.

Remarques (Compléments).

1. A la base de la démonstration de la Prop. 6.1.5 se trouve le Théorème fondamental suivant :

> ***Théorème 6.1.4***
> *Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.*

Comme nous avons dit dans le Chapitre 6, ce résultat sera prouvé dans le chapitre consacré au calcul intégral : on verra alors que si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ fixé, la fonction

$$F : x \to \int_a^x f(t)dt$$

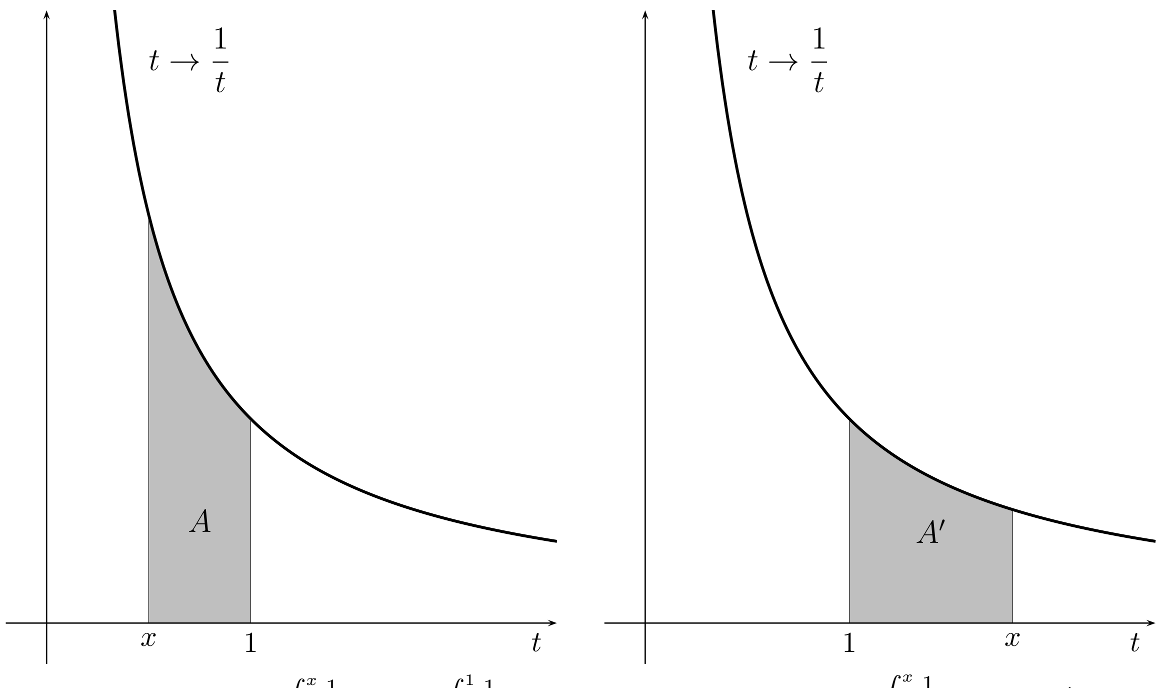
est une primitive de f sur I.

2. Considérons maintenant la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Elle vérifie alors $F'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et de façon évidente $F(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$. Il s'agit donc de la solution du problème (P) et par conséquent

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

pour tout $x > 0$. Ainsi, par exemple, $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$.



(a) Si $x < 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\mathrm{Aire}(A)$

(b) Si $x > 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \mathrm{Aire}(A')$.

FIGURE 9.1 – Interprétation de $\ln x$ en termes d'aire

3. Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$), alors

$$\int_a^b f(t)dt$$

peut être interprétée comme l'aire de la portion du plan comprise entre le graphe de f, l'axe Ot et les droites $t = a$ et $t = b$.

Ceci nous donne une interprétation géométrique de la fonction ln : si $x > 1$ est un réel fixé, $\ln x$ représente l'aire (comptée positivement) limitée par la courbe $t \to \frac{1}{t}$, l'axe Ot et les droites $t = 1$ et $t = x$ (voir Fig 9.1 (b)).

Si $0 < x < 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ et $\ln x$ représente alors l'aire (comptée négativement) limitée par la courbe $t \to \frac{1}{t}$, l'axe Ot et les droites $t = x$ et $t = 1$ (voir Fig 9.1 (a)).

Toute méthode de calcul approché de l'intégrale $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ (rectangles, trapèzes...) nous donnera ainsi des valeurs approchées de $\ln x$.

9.2 Le logarithme transforme les produits en sommes

✘ **Théorème 9.2.1** *Pour tous réels $a, b > 0$ on a*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Démonstration : Soit a un réel positif fixé.

Considérons la fonction $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \ln(ax)$$

D'après la formule de dérivation d'une fonction composée (Prop. 4.3.11) on a

$$h'(x) = \ln'(ax) \cdot (ax)' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Ainsi $h'(x) = \ln'(x)$ pour tout $x > 0$.

Comme la fonction $f = h - \ln$ vérifie $f'(x) = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, alors elle est constante sur cet intervalle : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) - \ln x = C$, pour tout $x > 0$. Par conséquent,

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

si $x > 0$. En particulier, si $x = 1$ on obtient $\ln a = \ln 1 + C = C$ et l'égalité précédente s'écrit

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

pour tout $x > 0$: le théorème est prouvé. □

9.2.1 Logarithme d'un quotient

Proposition 9.2.2 *Pour tout réel $a > 0$ on a*

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que $\ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ et d'appliquer le Th. 9.2.1

$$\ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$$

□

✘ **Proposition 9.2.3** *Pour tous réels $a, b > 0$ on a*

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Démonstration :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

d'après les résultats précédents. □

9.2.2 Logarithme d'une puissance

✘ **Proposition 9.2.4** *Pour tout réel $a > 0$ et tout $r \in \mathbb{Q}$ on a*

$$\ln(a^r) = r \ln a$$

Les Lemmes suivants nous permettront de montrer la Proposition. Considérons d'abord le cas $r \in \mathbb{N}$:

Lemme 1.
Pour tout réel $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration : Si $n = 0$, $a^n = 1$ et l'égalité est évidente. Il en est de même pour $n = 1$ et $n = 2$ (prendre $a = b$ dans le Th 9.2.1). Pour le cas $n = 3$, on se ramène au résultat pour $n = 2$ en écrivant :

$$\ln\left(a^3\right) = \ln\left(aa^2\right) = \ln a + \ln\left(a^2\right) = \ln a + 2\ln a = 3\ln a$$

La démonstration rigoureuse de la formule générale se fait par récurrence (pour l'hérédité, écrire $x^{n+1} = xx^n$). □

> ***Lemme 2.***
> *Pour tout réel $a > 0$ et tout $m \in \mathbb{Z}$ on a*
> $$\ln\left(a^m\right) = m \ln a$$

Démonstration : Nous avons déjà montré le cas $m \geq 0$. Pour $m < 0$ il suffit d'utiliser successivement la Prop. 9.2.2 et le Lemme 1 (pour $n = -m$, qui est positif) :

$$\ln\left(a^m\right) = \ln\left(\frac{1}{a^{-m}}\right) = -\ln\left(a^{-m}\right) = -(-m)\ln a = m \ln a$$

□

> ***Lemme 3.***
> *Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a*
> $$\ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln a$$

Démonstration : Puisque $a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$, il vient $\ln a = n \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$, d'après le Lemme 1 □

Voici enfin la

***Démonstration de la Proposition 9.2.4** : Le rationnel r s'écrit $r = \frac{m}{n}$, avec m et n entiers, $n > 0$. Ainsi*

$$\ln\left(a^r\right) = \ln\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = m \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = m\frac{1}{n}\ln a = r \ln a$$

d'après les Lemmes 2 et 3. □

9.3 La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$, son domaine de définition, et $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur cet intervalle : elle est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

9.3.1 Limites en $+\infty$ et en 0^+

✘

> **Proposition 9.3.1** *On a*
> 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
> 2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Démonstration : Pour prouver 1, il faut montrer qu'on peut rendre $\ln x$ *aussi grand qu'on veut à condition de prendre* x *suffisamment grand.*

Observons d'abord que, puisque $2 > 1$*, alors* $\ln 2 > \ln 1 = 0$*. D'autre part, si* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$x > 2^n \;\Rightarrow\; \ln x > \ln(2^n) = n \ln 2$$

Comme $\ln 2 > 0$*, on peut rendre la quantité* $n \ln 2$ *arbitrairement grande, quitte à prendre* n *grand : si* $n \to +\infty$*, alors* $n \ln 2 \to +\infty$*.*

Ainsi, en choisissant x *assez grand (de façon précise* $x > 2^n$*) nous pouvons rendre* $\ln x$ *arbitrairement grand (*$\ln x > n \ln 2$*).*

Pour montrer 2, utilisons le changement de variable $u = u(x) = \dfrac{1}{x}$ *: si* $x \to 0^+$*, alors* $u \to +\infty$ *et*

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{u \to +\infty} \ln \frac{1}{u} = \lim_{u \to +\infty} -\ln u = -\infty$$

d'après 1. □

9.3.2 La fonction $\ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: le nombre e et la fonction exponentielle

La fonction ln est continue (car dérivable) en tout point de l'intervalle $]0, +\infty[$ et elle est strictement croissante sur cet intervalle. Par conséquent, d'après le Th. 7.2.4, on a

$$\ln(\,]0, +\infty[\,) = \Big]\lim_{x \to 0^+} \ln x, \lim_{x \to +\infty} \ln x\Big[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

La continuité et la stricte monotonie de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, impliquent (Th. 8.2.2) qu'elle est une bijection de $]0, +\infty[$ sur son image $\mathbb{R}$ et que sa fonction réciproque est continue et strictement croissante.

Définition 9.3.2 (La fonction exponentielle)
La fonction réciproque du logarithme népérien s'appelle la fonction exponentielle :

$$x \to \exp x$$

Elle est donc une bijection (continue et strictement croissante) de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

Comme la fonction ln est une bijection, il existe un unique réel $x \in]0, +\infty[$ tel que $\ln x = 1$:

Définition 9.3.3 (Le nombre e)
On appelle e le seul nombre réel dont le logarithme népérien vaut 1.

Nous montrerons que $\exp x = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais, pour le moment, nous ne savons donner un sens qu'aux puissances d'exposant rationnel...

Les fonctions ln et exp étant réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (voir Figure 9.2) et on a

1. $\ln(\exp x) = x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\exp(\ln x) = x$, *pour tout* $x \in]0, +\infty[$.

Il ne sera pas inutile de préciser deux conséquences élémentaires du fait que $x \to \ln x$ est strictement croissante (et donc bijective) :

Pour tous $a, b > 0$ *on a*

1. $\ln a = \ln b \;\Leftrightarrow\; a = b$
2. $\ln a < \ln b \;\Leftrightarrow\; a < b$

Pour établir « $\Rightarrow$ » sans se fatiguer, on peut utiliser l'exponentielle, par exemple :

$$\ln a < \ln b \;\Rightarrow \exp(\ln a) < \exp(\ln b) \;\Rightarrow\; a < b$$

9.3.3 Quelques dérivées et primitives utiles

Puisque $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, il vient

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad \text{sur l'intervalle } \;]0, +\infty[$$

On peut faire mieux :

✘

Proposition 9.3.4 *La fonction* $x \to \ln|x|$ *est définie et dérivable en tout point de* $\mathbb{R} - \{0\}$ *et*

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

pour tout $x \neq 0$. *Par conséquent,*

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

sur chacun des intervalles $] - \infty, 0[$ *ou* $]0, +\infty[$.

Démonstration : Rappelons que la dérivée d'une fonction en un point est une notion « locale » car elle est définie à partir d'une limite (celle du taux d'accroissement). Par conséquent, si $g(x) = h(x)$ *en tout point d'un intervalle* **ouvert** I *et si* $x_0 \in I$, *alors*

$$g \text{ est dérivable en } x_0 \;\Leftrightarrow\; h \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et, dans ce cas } g'(x_0) = h'(x_0)$$

puisque les deux fonctions sont identiques sur un voisinage (I) *de* x_0.

Soit $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \ln|x|$.

Sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, *on a* $f(x) = \ln x$ *et par conséquent* $f'(x) = \ln' x = \frac{1}{x}$.

Sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$*, la fonction* f *s'écrit* $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ *et la formule de dérivation d'une fonction composée donne*

$$f'(x) = (\ln(-x))' = \ln'(-x) \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction $x \to \ln|x|$ *est une primitive de* $x \to \frac{1}{x}$ *sur chacun des intervalles* $]-\infty, 0[$ *ou* $]0, +\infty[$. □

✘ **Corollaire 9.3.5** *Soit* I *un intervalle ouvert et* $u : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur* I.
Alors la fonction $x \to \ln|u(x)|$ *est bien définie et dérivable sur* I *et*

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

pour tout $x \in I$. *Autrement dit*

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$$

sur l'intervalle I.

Démonstration : Soit $f(t) = \ln|t|$*, on sait, d'après la proposition que* $f'(t) = \frac{1}{t}$*, pour tout* $t \neq 0$. *Il suffit de remarquer que* $\ln|u(x)| = f(u(x))$ *et de dériver la fonction composée :*

$$(\ln|u(x)|)' = f'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

pour tout $x \in I$. □

Remarque.

Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, on pourra écrire $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple.

Appliquons le Corollaire à la fonction $x \to \ln|\cos x|$.

Sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) on obtient

$$(\ln|\cos x|)' = \frac{\cos' x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

ce qui, dans le langage des primitives, s'écrit

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

Voici, pour conclure cette section, les primitives de la fonction logarithme népérien : en remarquant que $(x \ln x - x)' = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x$, si $x > 0$, on obtient

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C, \quad \text{sur l'intervalle }]0, +\infty[$$

9.3.4 DL de $x \to \ln(x+1)$ au voisinage de 0

Nous étudierons dans cette section la fonction ln au voisinage de 1 (ce qui revient à étudier la fonction $x \to \ln(x+1)$ au voisinage de 0).

✘

Proposition 9.3.6 *On a*

$$\ln(1+x) = x + x\epsilon(x), \quad \textit{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0 \tag{1}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{2}$$

résultat qu'on peut écrire sous la forme

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \tag{3}$$

Démonstration : Considérons la fonction $f(x) = \ln(1+x)$. *On a* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ *pour tout* $x > -1$, *en particulier* $f(0) = \ln 1 = 0$, $f'(0) = 1$ *et le DL à l'ordre 1 au voisinage de* 0 *de* f *s'écrit :*

$$\ln(1+x) = f(x) = f(0) + f'(0)x + x\epsilon(x) = x + x\epsilon(x)$$

Nous avons prouvé (1).

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x\epsilon(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \epsilon(x) = 1$$

et on a établi (2). *Pour montrer* (3), *on fait le changement de variable* $h = h(x) = 1 + x$ *: si* $x \to 0$ *alors* $h \to 1$ *et* (2) *s'écrit*

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{h\to 1} \frac{\ln h}{h-1}$$

□

Remarque.

Les trois égalités de la proposition sont équivalentes : il s'agit de trois façons d'énoncer que la dérivée de la fonction $x \to \ln(x+1)$ au point $x = 0$ est égale à 1.

La droite $y = x - 1$ est la tangente au graphe de la fonction ln au point d'abscisse $x = 1$. Précisons la position du graphe par rapport à cette tangente :

Proposition 9.3.7 *Pour tout* $x > 0$ *on a*

$$\ln x \leq x - 1$$

l'égalité n'étant vraie que pour $x = 1$.

Démonstration : Soit $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$. *il s'agit d'une fonction dérivable (donc continue) en tout point de son ensemble de définition.*

Pour tout $x > 0$ on a $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Ainsi (à partir du Th. 5.2.4) :

1. *La fonction φ est strictement décroissante sur $]0,1]$ (car φ est continue sur $]0,1]$ et $\varphi'(x) < 0$ à l'intérieur de cet intervalle). En particulier, pour tout $x \in]0,1[$, on a*

$$\varphi(x) > \varphi(1) = 0$$

2. *La fonction φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ (puisque φ est continue sur cet intervalle et que $\varphi'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$). Par conséquent, si $x \in]1,+\infty[$, on obtient*

$$0 = \varphi(1) < \varphi(x)$$

En conclusion, $\varphi(x) \geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $x = 1$ et la proposition est prouvée. □

9.3.5 Comparaison du logarithme et de la puissance

✘ **Théorème 9.3.8** *On a*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

Démonstration : Montrons 1.

Si $t > 1$ alors $\ln t > \ln 1 = 0$. D'autre part (Prop. 9.3.7) on sait que $\ln t < t - 1 < t$ pour tout $t > 0$. On dispose alors de l'encadrement

$$0 < \ln t < t$$

si $t > 1$. Soit maintenant $x > 1$, comme $t = \sqrt{x} > 1$, on en déduit que $0 < \ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$. Puisque $\ln\sqrt{x} = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln x$, il vient $0 < \ln x < 2\sqrt{x}$. En multipliant les membres de cette inégalité par le réel positif $\frac{1}{x}$ on a

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

pour tout $x > 1$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, il en va de même pour $\dfrac{\ln x}{x}$ en vertu du Th des gendarmes.

Pour montrer 2 nous nous ramenons au cas précédent à l'aide du changement de variable $u = u(x) = \dfrac{1}{x}$: si $x \to 0^+$, alors $u \to +\infty$ et ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} \ln\frac{1}{u} = \lim_{u\to+\infty} -\frac{\ln u}{u} = 0$$

□

Remarques.

1. Les limites du Th. se présentent sous les formes indéterminées « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » et « $(0^+)\cdot(-\infty)$ ». Dans les deux cas, x l'emporte sur $\ln x$.

2. La fonction ln n'admet pas d'asymptote en $+\infty$: rappelons (Prop. 5.1.4) que la droite $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$$

Dans notre cas, on trouve $a = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ mais b n'existe pas car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

3. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x$ est infinie et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, la fonction ln présente une branche parabolique de direction Ox en $+\infty$ (voir Sect. 5.1.3).

On peut facilement généraliser les résultats du Théorème :

Corollaire 9.3.9 *Soient q et r deux rationnels positifs. On a*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^q x}{x^r} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^r \mid \ln x \mid^q = 0$

Démonstration : Remarquons que

$$\frac{\ln^q x}{x^r} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{r}{q}}}\right)^q$$

et notons $p = \frac{r}{q}$ (p est donc un rationnel positif). Pour établir 1, il suffira de montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

Considérons alors le changement de variable $u = u(x) = x^p$: si $x \to +\infty$, alors $u \to +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{p} \cdot \frac{\ln x^p}{x^p} = \frac{1}{p} \cdot \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

Pour montrer 2, on utilise le changement de variable $u = u(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^r\,|\ln x|^q = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u^r} \cdot |-\ln u|^q = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln^q u}{u^r} = 0$$

d'après 1. □

Remarques.

1. Si $x \to 0^+$, alors $\ln x < 0$ et l'expression $\ln^q x$ n'a pas de sens pour une puissance rationnelle positive quelconque, d'où la présence de la valeur absolue dans l'énoncé de 2.

2. On a à faire ici aux formes indéterminées « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » et « $(0^+) \cdot (+\infty)$ ». On constate à chaque fois que c'est la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

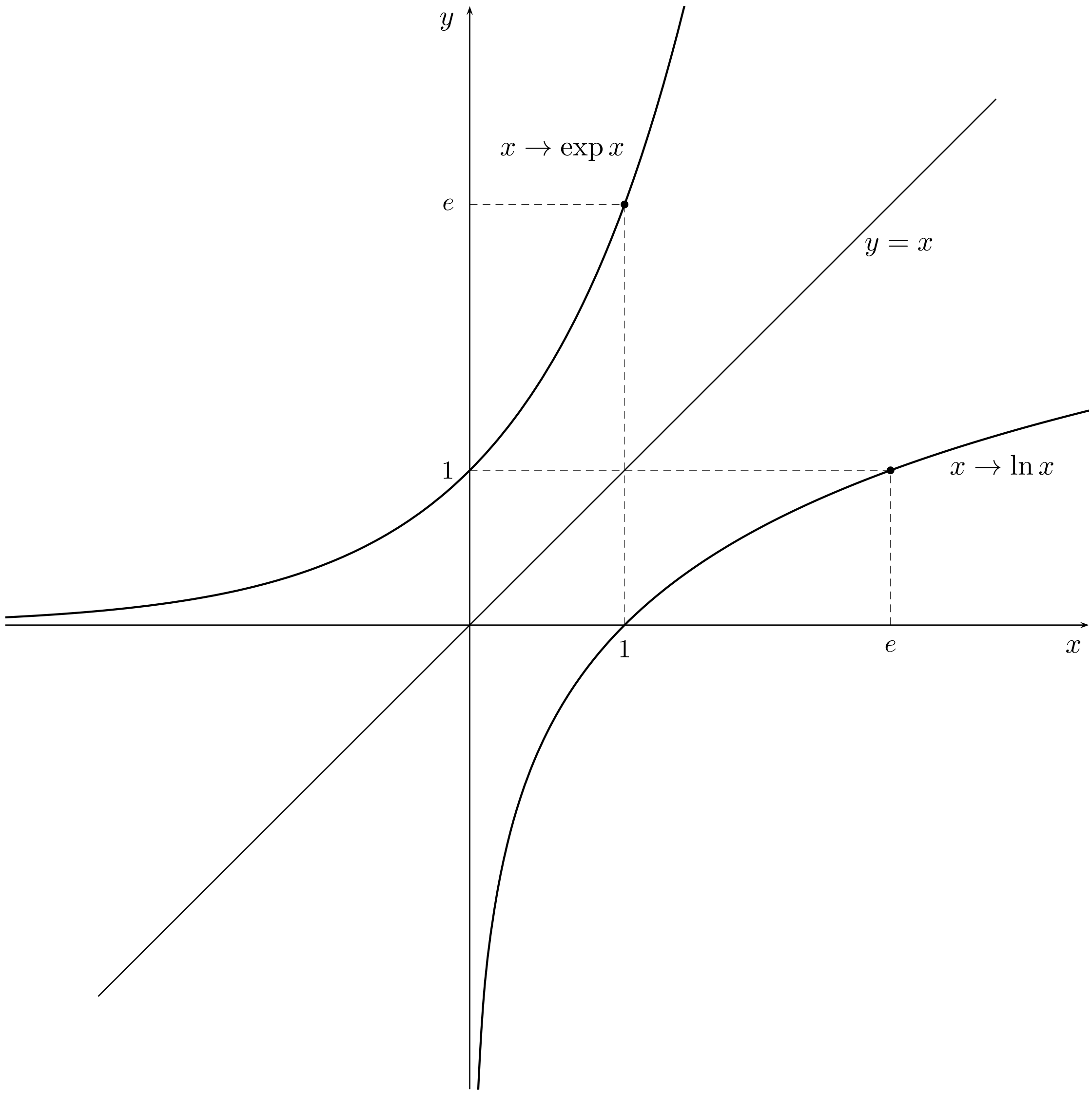


FIGURE 9.2 – Les graphes des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

9.4 Concavité, convexité

Définition 9.4.1 Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.

(a) On dit que f est CONVEXE sur I si, pour tous points A et B distincts appartenant au graphe de f sur I, alors

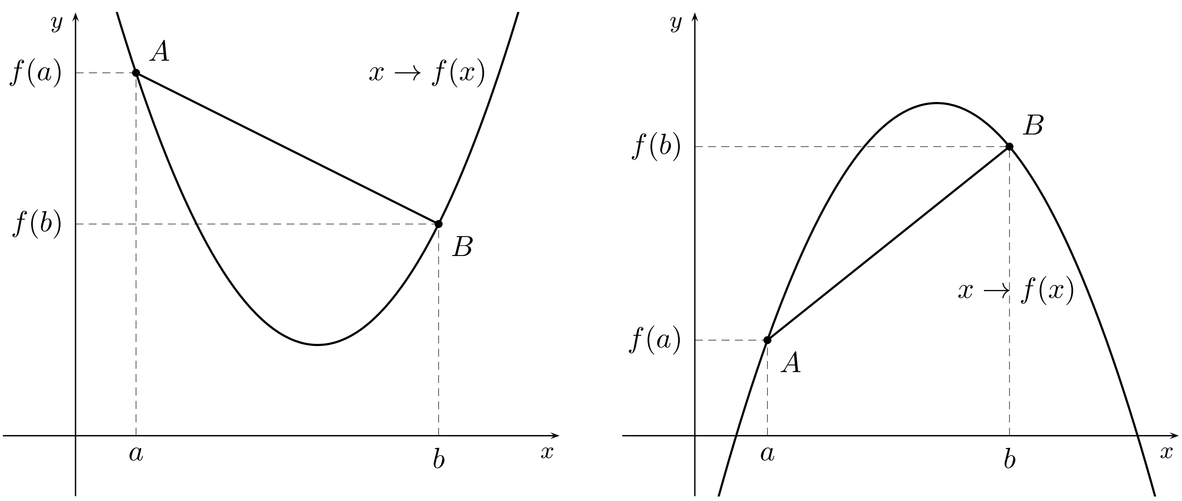
le graphe de f entre A et B est EN DESSOUS du segment $\overline{AB}$

(voir Figure 9.3 (a)).

(b) On dit que f est CONCAVE sur I si,pour tous points A et B distincts appartenant au graphe de f sur I, alors

le graphe de f entre A et B est AU-DESSUS du segment $\overline{AB}$

(voir Figure 9.3 (b)).



(a) Le graphe de f entre A et B est **en dessous** de la corde $\overline{AB}$

(b) Le graphe de f entre A et B est **au-dessus** de la corde $\overline{AB}$

FIGURE 9.3

Si $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$, l'équation de la droite déterminée par les points A et B est

$$y = f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dire que le graphe de f entre A et B est en dessous de la corde $\overline{AB}$ signifie que

$$f(x) \leq f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pour tout $x \in [a, b]$. Les définitions de convexité et concavité peuvent se formuler plus précisément comme suit :

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.

(a) On dit que f est convexe sur I si, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{1}$$

pour tout $x \in [a, b]$.

(b) On dit que f est concave sur I si, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{2}$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Remarques.

1. On montre facilement que l'inégalité (1) s'écrit :

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

pour tout $t \in [0, 1]$. De même, (2) équivaut à

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$$

pour tout $t \in [0, 1]$.

2. La fonction f est concave sur I si et seulement si la fonction $-f$ est convexe sur I.

Le Th suivant nous dit que si la dérivée seconde de f garde un signe constant sur un intervalle I, alors nous pourrons déterminer la convexité ou concavité de f sur I (c'est-à-dire la position de son graphe par rapport à ses cordes sur I) mais aussi la position du graphe de f par rapport à ses tangentes sur l'intervalle :

Théorème 9.4.2 *Soit I un intervalle et f une fonction deux fois dérivable sur I.*

(a) Si $f'' \geq 0$ sur I, alors f est convexe sur I et , pour tous $a, x \in I$, on a

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \tag{3}$$

(b) Si $f'' \leq 0$ sur I, alors f est concave sur I et , pour tous $a, x \in I$, on a

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a) \tag{4}$$

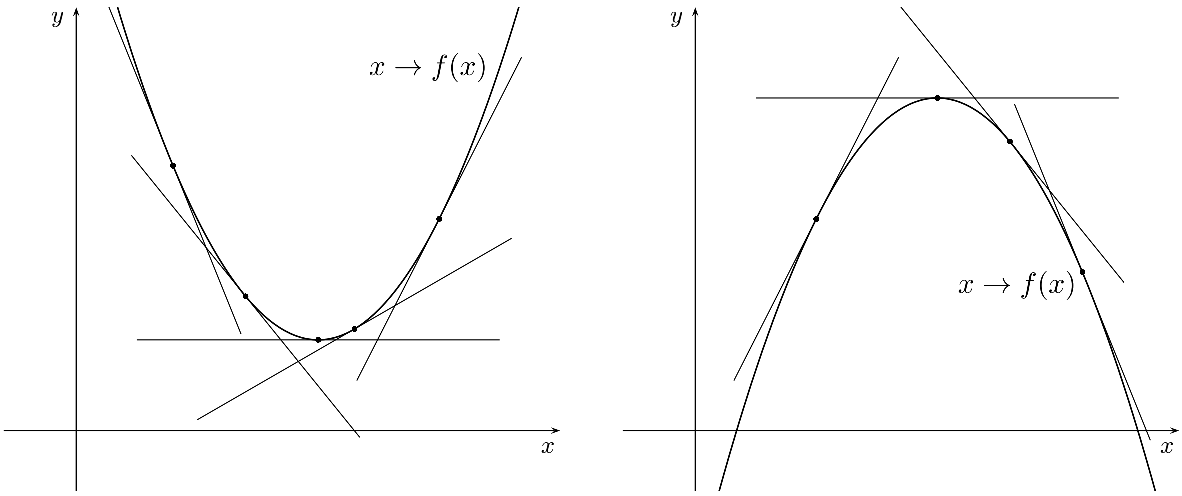
Remarques. Exemples.

1. L'équation de la droite tangente au graphe de f au point d'abscisse a est

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

La condition (3) signifie que le graphe de f sur I est **au-dessus** de chacune de ses tangentes sur I (voir Figure 9.4 (a)).

La condition (4) signifie que le graphe de f sur I est **en dessous** de chacune de ses tangentes sur I (voir Figure 9.4 (b)).



(a) $f'' \geq 0$ (b) $f'' \leq 0$

FIGURE 9.4 – Quelques tangentes au graphe de f.

2. Comme $\left(x^2\right)'' = (2x)' = 2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (et $x \to -x^2$ est concave).

Puisque $(\ln x)'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction ln est concave sur cet intervalle et son graphe est en dessous de chacune de ses tangentes sur $]0, +\infty[$ (ce qui généralise le résultat de la Prop. 9.3.7)

Il suffira d'avoir à l'esprit les graphes des paraboles $x \to x^2$ et $x \to -x^2$ pour bien retenir en français les résultats précédents :

✘

1. *Si $f'' \geq 0$ sur un intervalle I, alors le graphe de f sur I est en dessous de ses cordes sur I (convexité) et au-dessus de ses tangentes sur I.*
2. *Si $f'' \leq 0$ sur un intervalle I, alors le graphe de f sur I est au-dessus de ses cordes sur I (concavité) et en dessous de ses tangentes sur I.*

Définition 9.4.3 (Point d'inflexion)
Soit f une fonction dérivable en x_0.
Si le graphe de f traverse sa tangente en x_0, on dit que f présente un point d'inflexion en x_0 ou que $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

A partir du Th. 9.4.2, il vient

Corollaire 9.4.4 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un voisinage de x_0.*
Si $f''(x_0) = 0$ en changeant de signe en x_0, alors f présente un point d'inflexion en x_0

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x^3$. On a $\left(x^3\right)'' = \left(3x^2\right)' = 6x$. Par conséquent

(a) $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$: $x \to x^3$ est concave sur cet intervalle et son graphe est en dessous de chacune de ses tangentes sur $]-\infty, 0]$.

(b) $f''(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$: $x \to x^3$ est convexe sur cet intervalle et son graphe est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[0, +\infty[$.

(c) $f''(0) = 0$ et f'' change de signe en 0 : $x \to x^3$ présente un point d'inflexion en 0 (son graphe traverse sa tangente en 0).

2. Puisque $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$, la fonction sinus est

(a) Convexe sur $[-\pi, 0]$ (et sur tout intervalle de la forme $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$, pour $k \in \mathbb{Z}$).

(b) Concave sur $[0, \pi]$ (et sur $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$).

(c) Elle présente un point d'inflexion en 0 (et en $k\pi$).

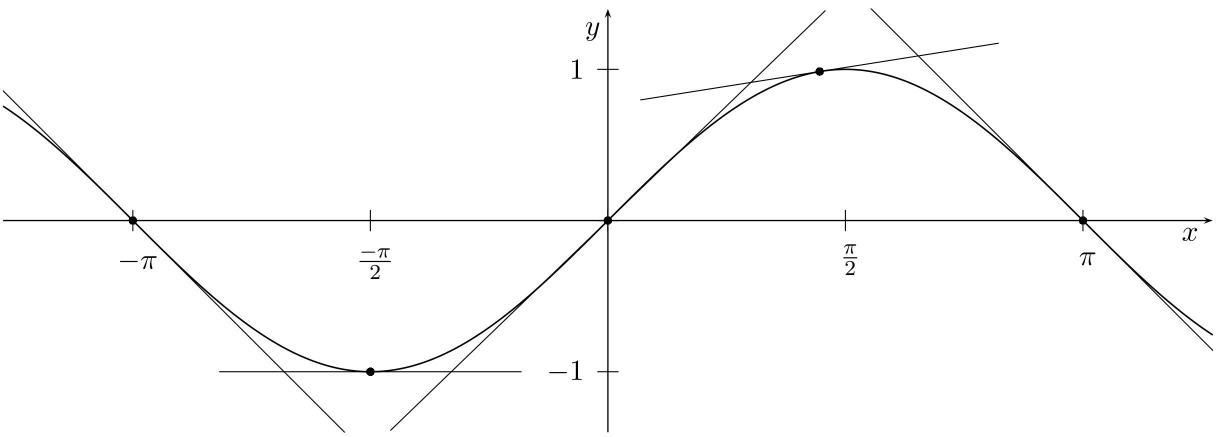


FIGURE 9.5 – Quelques tangentes au graphe de la fonction sinus.

PCS0
COURS D'ANALYSE
Chapitre 10 : L'exponentielle

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 10

La fonction exponentielle

10.1 Résumé des épisodes précédents

Nous avons vu (Sect. 9.3.2) que la fonction logarithme népérien est une bijection continue et (strictement) croissante de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle : $x \to \exp(x)$. Elle est donc une bijection continue et (strictement) croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Les graphes des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

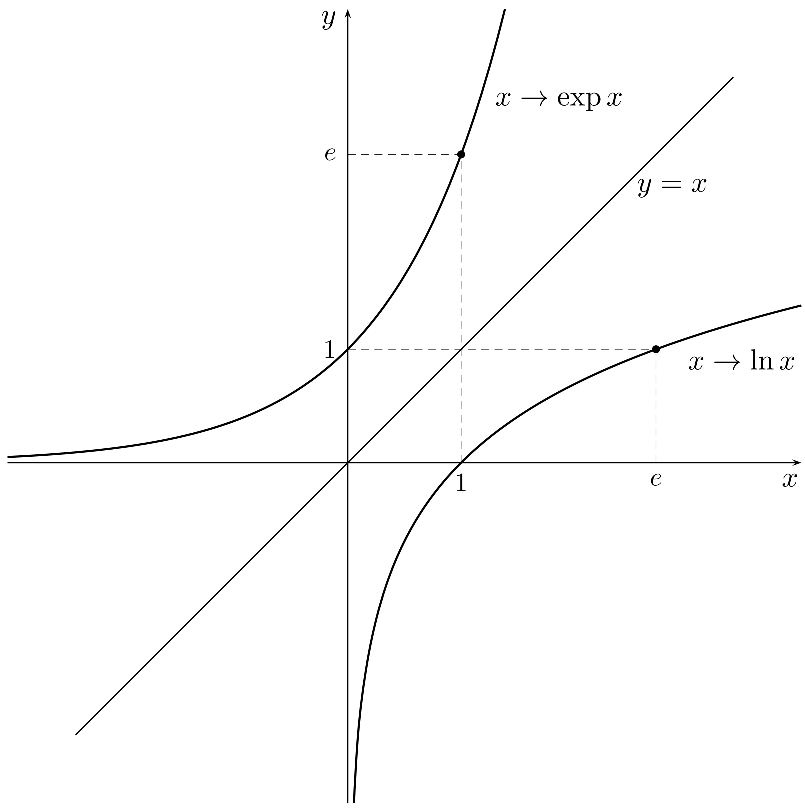


FIGURE 10.1 – Les graphes des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Remarquons en particulier que

$$\exp(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Les fonctions ln et exp étant réciproques l'une de l'autre, on a

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\ln(\exp x) = x$.
2. *Pour tout* $x \in]0, +\infty[$, *on a* $\exp(\ln x) = x$.

Par définition, le nombre e est le seul réel dont le logarithme vaut 1.

Comme $\ln(1) = 0$, on a $\exp(0) = 1$. De même, $\ln(e) = 1$ implique $\exp(1) = e$.

10.2 L'exponentielle transforme les sommes en produits

✘ **Proposition 10.2.1** *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$$

Par conséquent,

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

pour tout a *réel .*

Démonstration : Soit $\alpha = \exp a$ *et* $\beta = \exp b$ *(ainsi* $a = \ln \alpha$ *et* $b = \ln \beta$*). On obtient*

$$\exp(a + b) = \exp(\ln \alpha + \ln \beta) = \exp(\ln \alpha\beta) = \alpha\beta = \exp(a)\exp(b)$$

puisque le logarithme transforme les produits en sommes (Th. 9.2.1). En particulier

$$1 = \exp(0) = \exp(a + (-a)) = \exp(a)\exp(-a)$$

d'où le deuxième résultat. □

10.3 Définition de b^a pour $b > 0$ et a réel quelconque

Si b est un réel positif et $r \in \mathbb{Q}$, nous savons déjà ce qui signifie b^r (voir Sect. 2.4).

Par exemple, $b^{2/3} = \sqrt[3]{b^2}$ et $b^{-5/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{b^5}}$.

Remarquons que

✘ **Proposition 10.3.1** *Pour tout réel positif* b *et tout* $r \in \mathbb{Q}$, *on a*

$$b^r = \exp(r \ln b)$$

Démonstration : A partir de l'expression du logarithme d'une puissance rationnelle (Prop. 9.2.4) on obtient

$$\exp(r \ln b) = \exp(\ln b^r) = b^r$$

□

Comme l'expression $\exp(r \ln b)$ a un sens même si r n'est pas rationnel, nous pouvons étendre la définition de b^r au cas où r est un réel quelconque :

Définition 10.3.2 Pour tout réel positif b et tout $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$b^a = \exp(a \ln b)$$

Soulignons deux conséquences importantes de cette définition :

✘

1. *Dans le cas $b = e$ on obtient*

$$e^a = \exp(a \ln e) = \exp(a)$$

pour tout réel a, c'est pourquoi la fonction $\exp$ s'appelle plus précisément la fonction exponentielle de base e.

2. *Pour tout réel positif b et tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$\ln(b^a) = \ln(\exp(a \ln b)) = a \ln b \qquad (*)$$

(ce qui généralise la Proposition 9.2.4).

Les propriétés des exposants fractionnaires se généralisent au cas d'un exposant réel quelconque :

✘

Proposition 10.3.3 *Pour tous réels $b > 0$, $c > 0$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $b^{\alpha+\beta} = b^\alpha b^\beta$	2. $b^0 = 1$ *et* $b^1 = b$	3. $b^{-\alpha} = \dfrac{1}{b^\alpha}$
4. $(b^\alpha)^\beta = b^{\alpha\beta}$	5. $(bc)^\alpha = b^\alpha c^\alpha$	6. $\left(\dfrac{b}{c}\right)^\alpha = \dfrac{b^\alpha}{c^\alpha}$

Démonstration : On doit se ramener systématiquement à la définition 10.3.2.
Voici par exemple la preuve de 1 :

$$b^{\alpha+\beta} = \exp((\alpha+\beta)\ln b) = \exp(\alpha \ln b + \beta \ln b) = \exp(\alpha \ln b)\exp(\beta \ln b) = b^\alpha b^\beta$$

L'expression du logarithme d'une puissance réelle : $\ln(b^\alpha) = \alpha \ln b$, voir $(*)$, permet de montrer 4 :

$$(b^\alpha)^\beta = \exp(\beta \ln(b^\alpha)) = \exp(\beta\alpha \ln b) = b^{\alpha\beta}$$

Montrons 6 :

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{c}\right)^{\alpha} &= \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{b}{c}\right)\right) = \exp\left(\alpha \ln b - \alpha \ln c\right) \\ &= \exp\left(\alpha \ln b\right) \exp\left(-\alpha \ln c\right) = \frac{\exp\left(\alpha \ln b\right)}{\exp\left(\alpha \ln c\right)} = \frac{b^{\alpha}}{c^{\alpha}}\end{aligned}$$

□

10.4 Etude de la fonction exponentielle

10.4.1 Limites en $-\infty$ et en $+\infty$

✘ **Proposition 10.4.1** *On a*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration : Pour prouver 1 il faut montrer que e^x peut être rendu arbitrairement grand si l'on choisit x assez grand.

Soit donc $M > 0$ un nombre arbitrairement choisi : on aura $e^x \geq M$ si et seulement si $x = \ln(e^x) \geq \ln M$, puisque la fonction logarithme et sa réciproque, l'exponentielle, sont croissantes. En particulier, nous pouvons rendre la quantité e^x arbitrairement grande ($e^x \geq M$) à condition de prendre x suffisamment grand ($x \geq \ln M$).

Pour prouver 2, il suffit de poser $u = u(x) = -x$: si $x \to -\infty$, alors $u \to +\infty$ et l'on obtient par changement de variable

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{u \to +\infty} e^{-u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{e^u} = 0$$

d'après le cas précédent. □

10.4.2 Dérivée

✘ **Théorème 10.4.2** *La fonction exponentielle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et*

$$(e^x)' = e^x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Le résultat est une conséquence immédiate du Th. 8.3.1 (dérivation d'une fonction réciproque) mais, plutôt que d'appliquer brutalement ce théorème, nous allons illustrer dans ce cas particulier les deux démonstrations (« analytique » et « géométrique ») que nous en avons donné dans la Section 8.3.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La dérivée de la fonction exponentielle en x_0 est donnée par

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0}$$

Utilisons le changement de variable $y = y(x) = e^x$.
Notons $y_0 = e^{x_0}$. On a $x = \ln y$ (en particulier $x_0 = \ln y_0$) et, à partir de la continuité de la fonction exponentielle, $x \to x_0$ implique $y \to e^{x_0} = y_0$, de sorte que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{\ln y - \ln y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{\ln y - \ln y_0}{y - y_0}} = \frac{1}{\dfrac{1}{y_0}} = y_0 = e^{x_0}$$

puisque $\lim_{y \to y_0} \dfrac{\ln y - \ln y_0}{y - y_0}$ est la dérivée de la fonction $\ln$ au point y_0.

2. Nous pouvons retrouver géométriquement ce résultat (voir Fig. 10.2).
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $y_0 = e^{x_0}$. Le point (x_0, y_0) appartient au graphe de la fonction $\exp$.
Le point (y_0, x_0), son symétrique par rapport à $y = x$, est dans le graphe de la fonction $\ln$.

Soit Δ' la droite tangente au graphe du $\ln$ en (y_0, x_0). Sa pente est $\frac{1}{y_0}$ (dérivée du $\ln$ au point y_0). Remarquons que Δ' n'est pas horizontale car sa pente est non nulle.

Du fait de la symétrie des graphes, la droite Δ, symétrique de Δ' par rapport à $y = x$, est tangente au graphe de la fonction $\exp$ en x_0.
Puisque Δ' n'est pas horizontale, la droite Δ n'est pas verticale et sa pente est définie. A partir de la symétrie entre les deux droites on a (voir Sect 8.3)

$$\text{pente } (\Delta) = \frac{1}{\text{pente } (\Delta')} = \frac{1}{\frac{1}{y_0}} = y_0 = e^{x_0}$$

et la dérivée de la fonction $\exp$ au point x_0 est bien e^{x_0}.

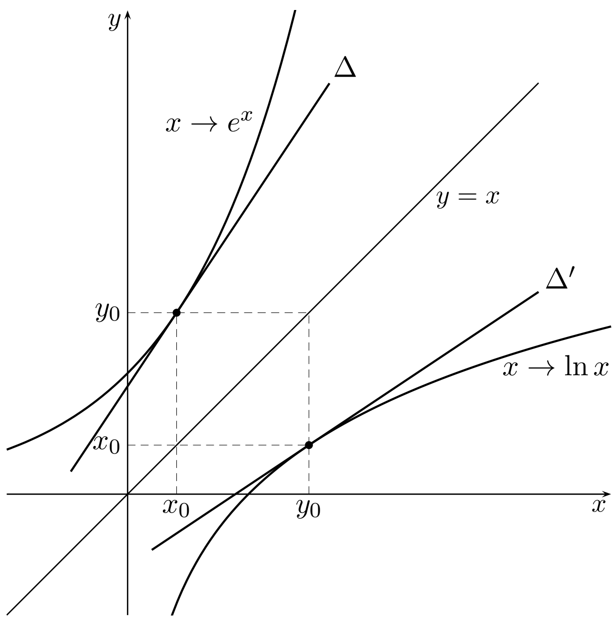


FIGURE 10.2 – Symétrie des graphes et des droites tangentes.

Remarques.

1. Nous retrouvons le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

2. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$: $\exp''(x) = \exp(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit I un intervalle ouvert et $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Alors (dérivation d'une fonction composée : Prop. 4.3.11) la fonction $x \to \exp(u(x))$ est bien définie, dérivable en tout point de I et

$$(\exp(u(x)))' = \exp'(u(x)) \cdot u'(x) = \exp(u(x)) \cdot u'(x)$$

ce qu'on peut écrire :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}u'(x)$$

pour tout $x \in I$, ou encore :

$$\int e^{u(x)}u'(x)\ dx = e^{u(x)} + C, \text{ sur l'intervalle } I$$

10.4.3 DL au voisinage de 0

✘ **Proposition 10.4.3** *On a*

$$e^x = 1 + x + x\epsilon(x), \quad \textit{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration : Soit la fonction $f(x) = e^x$. Puisque $f'(x) = e^x$, il vient $f'(0) = e^0 = 1$ et le DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 de f s'écrit

$$e^x = f(x) = f(0) + f'(0)x + x\epsilon(x) = 1 + x + x\epsilon(x)$$

Ainsi, on peut écrire

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x\epsilon(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(1 + \epsilon(x))}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \epsilon(x) = 1$$

□

Remarque.

Les deux résultats de la proposition sont équivalents : ils expriment le fait que la dérivée de la fonction exp au point $x = 0$ vaut 1.

10.4.4 Comparaison de l'exponentielle et de la puissance

✘ **Proposition 10.4.4** *On a*

1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Démonstration : Pour montrer 1 utilisons le changement de variable $y = e^x$: si $x \to +\infty$, alors $y = e^x \to +\infty$ d'après la Prop. 10.4.1. Comme $x = \ln y$, on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\ln y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln y}{y}\right)} = +\infty$$

car $\lim_{y \to +\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0^+$ (voir Prop. 9.3.8).

Pour montrer 2, on pose $u = -x$:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{u \to +\infty} -ue^{-u} = \lim_{u \to +\infty} -\frac{u}{e^u} = \lim_{u \to +\infty} -\frac{1}{\left(\frac{e^u}{u}\right)} = 0$$

d'après 1. □

Remarques.

1. D'après 1, la fonction exp n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Comme les limites $\lim_{x \to +\infty} e^x$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$ sont infinies, on dit que la branche infinie en $+\infty$ de la fonction exp est une branche parabolique de direction Oy (voir Sect 5.1.3).

2. Les limites de la Prop. se présentent sous les formes indéterminées « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » et « $(-\infty) \cdot 0$ ».

Dans les deux cas, e^x l'emporte sur x.

On a des résultats beaucoup plus forts concernant les croissances comparées de la fonction exponentielle et des puissances :

✘ **Proposition 10.4.5** *Pour tout nombre réel $a > 0$ on a :*

1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$.

2. $\lim_{x \to -\infty} |x|^a e^x = 0$.

Démonstration : Pour établir 1, remarquons que

$$\frac{e^x}{x^a} = \frac{\exp(x)}{\exp(a \ln x)} = \exp(x) \exp(-a \ln x) = \exp(x - a \ln x)$$

Puisque

$$x - a\ln x = x\left(1 - a\frac{\ln x}{x}\right)$$

et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, *il vient* $\lim_{x\to+\infty} (x - a\ln x) = +\infty$, *d'où* $\lim_{x\to+\infty} \exp(x - a\ln x) = +\infty$.

Pour montrer 2, on se ramène à 1 grâce au changement de variable $u = -x$ *: si* $x < 0$, $|x|^a = (-x)^a = u^a$ *et*

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = \lim_{u\to+\infty} u^a e^{-u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^a}{e^u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^u}{u^a}\right)} = 0$$

□

Remarque.

On a à faire ici aux formes indéterminées « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » et « $(+\infty)\cdot 0$ ». On remarque à chaque fois que c'est l'exponentielle qui l'emporte sur la puissance.

10.5 Les fonctions puissances $(x \to x^a)$

Proposition 10.5.1 *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

1. *La fonction*

$$x \to x^a = \exp(a\ln x)$$

   est bien définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. *Toute fonction de cette forme s'appelle une fonction puissance.*
2. *Pour tout* $x > 0$, *on a* $x^a > 0$.
3. *Pour tout* $x > 0$, *on a*

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Démonstration : 1 et 2 sont immédiates à partir de la Déf. 10.3.2 et des propriétés des fonctions ln *et* exp.

La fonction $x \to x^a = \exp(a\ln x)$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *comme composition de la fonction* $x \to a\ln x$ *(dérivable sur* $]0, +\infty[$ *) et de* $u \to \exp(u)$ *(dérivable sur* $\mathbb{R}$ *). La formule de dérivation des fonctions composées donne, pour tout* $x > 0$,

$$(x^a)' = \big(\exp'(a\ln x)\big)(a\ln x)' = \exp(a\ln x)\,\frac{a}{x} = x^a\,\frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

□

Remarques.

L'allure des graphes des fonctions puissances dépend de la valeur de a. Pour étudier ces fonctions on utilise la définition $x^a = \exp(a\ln x)$ et les propriétés des fonctions exp et ln. On retrouvera d'ailleurs les mêmes propriétés que dans le cas des exposants rationnels : la seule nouveauté réside donc dans l'extension du domaine de l'exposant.

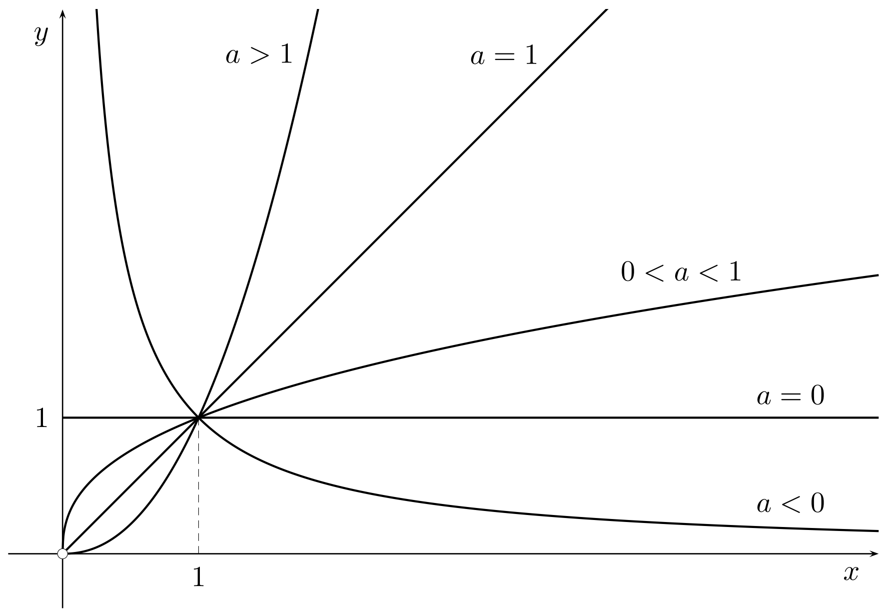


FIGURE 10.3 – Allure des graphes des fonctions puissances $x \to x^a$.

1. Si $a < 0$:

(i) La fonction $x \to x^a$ est décroissante et convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(ii) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$.

Pour se rappeler de l'allure du graphe, on pensera aux fonctions $x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \to x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ etc... sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Si $0 < a < 1$:

(i) La fonction $x \to x^a$ est croissante et concave sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$, par conséquent, la fonction se prolonge par continuité à droite en 0. Le prolongement admet une demi-tangente verticale à droite en 0.

(iii) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{x} = 0$. Ainsi, la branche infinie en $+\infty$ est une branche parabolique de direction Ox.

On retrouve les propriétés de $x \to x^{1/2} = \sqrt{x}$ ou $x \to x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ sur $]0, +\infty[$.

3. Si $a > 1$:

(i) La fonction $x \to x^a$ est croissante et convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$, par conséquent, la fonction se prolonge par continuité à droite en 0. Le prolongement admet une demi-tangente horizontale à droite en 0.

(iii) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{x} = +\infty$. Ainsi, la branche infinie en $+\infty$ est une branche parabolique de direction Oy.

Rien de nouveau : penser aux fonctions $x \to x^2$, $x \to x^3$ etc... sur $]0, +\infty[$.

4. Les cas $a = 0$ ou $a = 1$ ne demandent pas d'étude particulière : $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.

Remarques.

1. Comme dans le cas d'un exposant rationnel, le DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction $x \to (1+x)^a$, pour a réel, s'écrit

$$(1+x)^a = 1 + ax + x\epsilon(x)$$

2. Le Corollaire 9.3.9 se généralise au cas d'exposants réels positifs :

Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$
2. $\lim_{x \to 0^+} x^\beta \mid \ln x \mid^\alpha = 0$

10.6 Les fonctions exponentielles $(x \to b^x)$. Croissances comparées.

Proposition 10.6.1 *Soit $b > 0$ fixé.*

1. *La fonction*
$$x \to b^x = \exp(x \ln b)$$
est bien définie sur $\mathbb{R}$. elle s'appelle fonction exponentielle de base b.
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b^x > 0$.*
On a $b^0 = 1$.
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$(b^x)' = b^x \cdot \ln b$$

Démonstration : 1 et 2 sont immédiates. Montrons 3 : La fonction $x \to b^x = \exp(x \ln b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition des fonctions $x \to x \ln b$ et $u \to \exp(u)$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$$(b^x)' = \big(\exp'(x \ln b)\big)(x \ln b)' = \exp(x \ln b)\ \ln b = b^x \ln b$$

□

Proposition 10.6.2 *(Croissances comparées)*
Soit $b > 1$ et $a > 0$. On a :

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x^a} = +\infty.$
2. $\lim_{x \to -\infty} |x|^a b^x = 0.$

Démonstration : Pour montrer 1, il suffit d'écrire

$$\frac{b^x}{x^a} = \frac{\exp(x \ln b)}{\exp(a \ln x)} = \exp(x \ln b)\exp(-a \ln x) = \exp(x \ln b - a \ln x)$$

et de remarquer que

$$\lim_{x\to+\infty}(x\ln b - a\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln b - a\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ *et* $\ln b > 0$.

Pour montrer 2, on se ramène à 1 en posant $u = -x$ *: si* $x < 0$, $|x|^a = (-x)^a = u^a$ *et*

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^a b^x = \lim_{u\to+\infty} u^a b^{-u} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^a}{b^u} = \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{b^u}{u^a}\right)} = 0 \qquad \square$$

Remarque.

Si $b > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0$: les limites de la Proposition sont des formes « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » et « $(+\infty)\cdot 0$ ». On retiendra que $x \to b^x$ l'emporte sur la puissance en $+\infty$ et en $-\infty$.

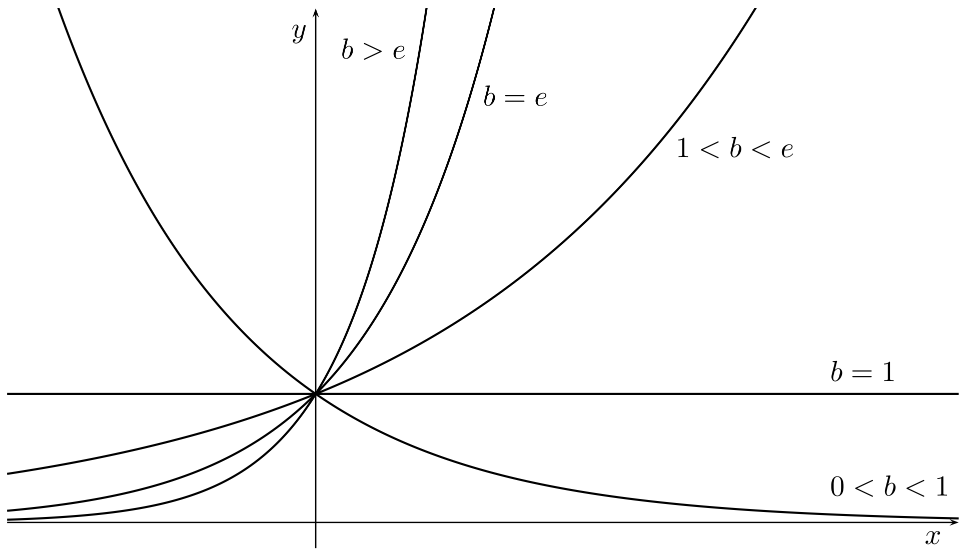


FIGURE 10.4 – Allure des graphes des fonctions exponentielles $x \to b^x$.

Remarques.

1. Si $b > 1$ on montre facilement que :

(i) La fonction $x \to b^x$ est strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b^x}{x} = +\infty$. La fonction présente une branche parabolique de direction Oy en $+\infty$.

2. Soit $0 < b < 1$. Notons $f(x) = b^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$. La fonction g est une fonction exponentielle de base $\frac{1}{b} > 1$ étudiée en 1. Comme $g(x) = f(-x)$ pour tout réel x, les graphes de f et g sont symétriques par rapport à l'axe Oy.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$.

10.7 Fonctions de la forme $x \to b(x)^{a(x)}$

Soit I un intervalle et $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si $b(x) > 0$ pour tout $x \in I$, on peut définir sur l'intervalle I la fonction

$$x \to b(x)^{a(x)} = \exp\left(a(x)\ln b(x)\right)$$

Cette fonction est continue (resp. dérivable) sur I si les fonctions a et b sont continues (resp. dérivables) sur cet intervalle.

Pour étudier la fonction $x \to b(x)^{a(x)}$ (calcul de la dérivée, limites...) on aura intérêt à l'écrire en termes des fonctions exp et ln.

10.7.1 Les formes indéterminées « 0^0 », « ∞^0 » et « 1^∞ »

Des formes indéterminées peuvent se présenter dans le calcul de limites d'une fonction de la forme $b(x)^{a(x)}$ lorsque le produit $a(x)\ln b(x)$ est lui-même une forme indéterminée. Il y a trois cas possibles, qu'on illustrera avec quelques exemples :

Exemples de la forme « 0 puissance 0 » :

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

On a

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(x\ln x\right) = \exp(0) = 1$$

à partir de $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (voir Th. 9.3.8) et de la continuité de la fonction exp.

2. Soit $a \neq 0$ fixé. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{3-a\ln x}\right)}$.

On revient à la définition :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{3-a\ln x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{3-a\ln x}\cdot \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{\frac{3}{\ln x}-a}\right) = \exp\left(-\frac{1}{a}\right)$$

Exemples de la forme « ∞ puissance 0 » :

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1$

On a

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right) = \exp\left(\, x\ln(1+x) - x\ln x\,\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+x) = 0\ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, la continuité de la fonction exp implique

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\, x\ln(1+x) - x\ln x\,\right) = \exp(0) = 1$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{a/\ln x} = e^a$

Par définition

$$(1+x)^{a/\ln x} = \exp\left(\frac{a}{\ln x} \cdot \ln(1+x) \right) = \exp\left(a \cdot \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)$$

et le résultat découle du fait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1$$

La forme « 1 puissance ∞ » :

Voici une limite remarquable :

> *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *On a*
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$
>
> *En particulier*
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

En effet, le résultat est évident (et sans intérêt) si $a = 0$, soit alors $a \neq 0$:

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp\left(x \cdot \ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \right)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} a \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}} = \lim_{u\to 0} a \cdot \frac{\ln(1+u)}{u} = a \cdot 1 = a$$

grâce au changement de variable $u = u(x) = \frac{a}{x}$ et à la limite remarquable de la Prop. 9.3.6.

10.8 Les fonctions logarithmes

Proposition 10.8.1 *Soit b un nombre réel positif différent de 1.*

1. *La fonction exponentielle de base b ($x \to b^x$) est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ (strictement croissante si $b > 1$, strictement décroissante si $0 < b < 1$).*
2. *On appelle logarithme de base b la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base b. Cette fonction se note $\log_b$. On a donc, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$,*

$$y = b^x \iff x = \log_b y$$

3. *Pour tout $y > 0$ on a*

$$\log_b y = \frac{\ln y}{\ln b}$$

Démonstration : 1. Nous avons étudié les fonctions exponentielles dans la Sect 10.6.
Comme $(b^x)' = b^x \ln b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (voir Prop. 10.6.1), la fonction $f(x) = b^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $b > 1$ (car $\ln b > 0$ dans ce cas).
Il s'agit donc d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et

$$f(\mathbb{R}) = f\,(\,]-\infty, +\infty[\,) = \,]\lim_{x\to-\infty} b^x, \lim_{x\to+\infty} b^x[\, = \,]0, +\infty[$$

(pour le calcul des limites, revenir à la définition : $b^x = \exp(x \ln b)$)
Si $0 < b < 1$, alors $\ln b < 0$ et $f'(x) < 0$: la fonction $f(x) = b^x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et

$$f(\mathbb{R}) = f\,(\,]-\infty, +\infty[\,) = \,]\lim_{x\to+\infty} b^x, \lim_{x\to-\infty} b^x[\, = \,]0, +\infty[$$

2. Dans les deux cas de figure pour b, $f(x) = b^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
Par conséquent, sa fonction réciproque f^{-1} est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. Par définition, $\log_b = f^{-1}$ et 2. en découle.

Calculons explicitement $\log_b = f^{-1}$:

$$y = b^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln b \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln b}$$

pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$ et 3. est prouvé. $\square$

Remarques.

On montre facilement les propriétés suivantes :

1. La fonction logarithme de base e est le logarithme népérien : $\log_e = \ln$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\log_b(b^a) = a$.

3. Pour tout $x > 0$, on a $b^{\log_b x} = x$.

4. Pour tout $x > 0$, $(\log_b x)' = \dfrac{1}{x \ln b}$.

5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a $\log_b(\alpha\beta) = \log_b(\alpha) + \log_b(\beta)$.

6. Pour tous $c > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, on a $\log_b(c^a) = a \log_b(c)$.

7. Pour tout $x > 0$, on a $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$.

10.9 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

10.9.1 L'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$

Théorème 10.9.1 *Soit I un intervalle ouvert.*
Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et A une primitive de a sur I (elle existe : Th. 7.1.4).
Les solutions sur I de l'équation différentielle

$$y'(x) = a(x)y(x) \tag{1}$$

sont les fonctions

✘

$$y(x) = C\exp(A(x)) \tag{2}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.
En particulier, si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés, le problème

$$\begin{cases} y'(x) &= a(x)y(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{P}$$

possède une solution unique sur I.

Démonstration : Remarquons d'abord que toute fonction de la forme (2) est solution de l'équation (1). En effet, soit $C \in \mathbb{R}$ fixé et $y(x) = C\exp(A(x))$. Pour tout $x \in I$, on a

$$y'(x) = C\exp'(A(x))\,A'(x) = C\exp(A(x))\,a(x) = a(x)y(x)$$

à partir de la formule de dérivation d'une fonction composée et du fait que $A'(x) = a(x)$ sur l'intervalle I.

Montrons ensuite que toute solution de l'équation (1) est de la forme (2).
Soit donc $x \to y_1(x)$ une solution de (1) sur I : $y_1'(x) = a(x)y_1(x)$ pour tout $x \in I$.
Considérons la fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \exp(-A(x))\,y_1(x)$. On obtient

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (\,\exp(-A(x))\,)'\,y_1(x) + \exp(-A(x))\,(\,y_1(x)\,)' \\ &= -\exp(-A(x))\,a(x)y_1(x) + \exp(-A(x))\,a(x)y_1(x) = 0\end{aligned}$$

sur l'intervalle I. Par conséquent, φ est constante sur cet intervalle : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$

$$\varphi(x) = \exp(-A(x))\,y_1(x) = \frac{y_1(x)}{\exp(A(x))} = C$$

d'où $y_1(x) = C\exp(A(x))$.

Montrons enfin que le problème (P) admet une solution unique. Puisque les solutions de (1) sont les fonctions de la forme (2), pour qu'une solution y de l'équation (1) vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$, il faut et il suffit que

$$y(x_0) = C\exp(A(x_0)) = y_0 \;\Leftrightarrow\; C = y_0\exp(-A(x_0))$$

et la fonction $y(x) = y_0\exp(-A(x_0)) \cdot \exp(A(x))$ est la seule solution de (P). □

Remarques, exemples.

1. Considérons l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y'(x) = -3y(x)$.

Ici $a(x) = -3$ et une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est par exemple $A(x) = -3x$. Par conséquent, les solutions de l'équation sont

$$y(x) = C\exp(-3x) = Ce^{-3x}, \quad \text{pour tout } \ C \in \mathbb{R}$$

2. Soit l'équation différentielle $y'(x) = xy(x)$.

Maintenant $a(x) = x$ et $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$ convient. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$y(x) = C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right), \quad \text{pour tout } \ C \in \mathbb{R}$$

3. Comme les solutions de (1) sont les fonctions $y(x) = C\exp(A(x))$, pour tout $C \in \mathbb{R}$, on peut conclure que toute solution de (1) sur I est :

i) Ou bien identiquement nulle sur I (ce qui correspond au cas $C = 0$) :

$$y(x) = 0, \quad \text{pour tout } \ x \in I$$

ii) Ou bien elle ne s'annule jamais sur I (c'est le cas si $C \neq 0$, puisque $\exp > 0$) :

$$y(x) \neq 0, \quad \text{pour tout } \ x \in I$$

et elle gardera un signe constant (celui de C) sur l'intervalle I.

Ces remarques permettent de retrouver les solutions de l'équation autrement comme l'illustre l'exemple suivant :

Considérons l'équation $y'(x) = (\cos x)\, y(x)$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction nulle est solution et toute autre solution y ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, pour une telle solution on a

$$y'(x) = (\cos x)\, y(x) \ \Leftrightarrow \ \frac{y'(x)}{y(x)} = \cos x \ \Leftrightarrow \ (\ \ln|y(x)|\ )' = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \ln|y(x)| = \int \cos x dx = \sin x + K$$

$$\Leftrightarrow |y(x)| = \exp(\sin x + K) = e^k e^{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(x) = e^k e^{\sin x} & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \textit{ou bien} & \\ y(x) = -e^k e^{\sin x} & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(car y ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow y(x) = Ce^{\sin x} \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \ \text{ pour tout } C \neq 0.$$

Si $C = 0$ nous retrouvons la solution nulle et l'ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = Ce^{\sin x}$, pour tout $C \in \mathbb{R}$.

10.9.2 L'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x) + f(x)$

Théorème 10.9.2 *Soient I un intervalle ouvert, a une fonction continue sur I et f une fonction définie sur I. On considère l'équation différentielle sur I :*

$$y'(x) = a(x)y(x) + f(x) \tag{E}$$

et l'équation sans second membre (ou homogène) associée

$$z'(x) = a(x)z(x) \tag{H}$$

✘

1. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors la fonction $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ est solution de (H).*
2. *Si y_1 est une solution de (E), alors toute autre solution s'obtient en ajoutant à y_1 une solution quelconque de (H). Plus précisément, si A est une primitive de a sur I, les solutions de (E) sont :*

$$y(x) = y_1(x) + C\exp(A(x))$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Pour établir 1. il suffit de dériver

$$\begin{aligned} z'(x) = y_2'(x) - y_1'(x) &= (\ a(x)y_2(x) + f(x)\ ) - (\ a(x)y_1(x) + f(x)\ ) \\ &= a(x)(\ y_2(x) - y_1(x)\ ) = a(x)z(x) \end{aligned}$$

2. Soit y_1 une solution de (E) donnée. Nous devons montrer que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = y_1(x) + z(x) \tag{3}$$

où z est une solution quelconque de (H).
Il est clair que toute fonction de la forme (3) est solution de (E) :

$$\begin{aligned} y'(x) = y_1'(x) + z'(x) &= (\ a(x)y_1(x) + f(x)\ ) + (\ a(x)z(x)\ ) \\ &= a(x)(\ y_1(x) + z(x)\ ) + f(x) = a(x)y(x) + f(x) \end{aligned}$$

Réciproquement, toute solution y_2 de (E) est bien de la forme (3) car, d'après 1, la fonction $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ est solution de (H) et $y_2(x) = y_1(x) + z(x)$.
Comme le Th. 10.9.1 nous donne l'expression explicite des solutions de (H), nous pouvons décrire l'ensemble de solutions y de (E) :

$$y(x) = y_1(x) + C\exp(A(x))$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$. □

Remarque.
Comparer avec la Prop. 6.3.7. et relire sa Remarque 1.

Proposition 10.9.3 ***(Principe de superposition)***
Soient a, f et g trois fonctions définies sur un intervalle I et λ, μ deux réels fixés. Supposons que

1. *La fonction y_1 est une solution sur I de l'équation $y'(x) = a(x)y(x) + f(x)$.*
2. *La fonction y_2 est une solution sur I de l'équation $y'(x) = a(x)y(x) + g(x)$.*

Alors la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution sur I de l'équation

$$y'(x) = a(x)y(x) + \lambda f(x) + \mu g(x)$$

Démonstration : Soit $y = \lambda y_1 + \mu y_2$. Pour tout $x \in I$ on a

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda y_1'(x) + \mu y_2'(x) = \lambda\,(\,a(x)y_1(x) + f(x)\,) + \mu\,(\,a(x)y_2(x) + g(x)\,) \\ &= a(x)\,(\,\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)\,) + \lambda f(x) + \mu g(x) = a(x)y(x) + \lambda f(x) + \mu g(x) \end{aligned}$$

□

Remarque.

Nous avons énoncé le principe de superposition pour deux équations. On peut généraliser le résultat pour un nombre quelconque d'équations.

10.9.3 Recherche d'une solution particulière dans des cas simples.

Le Th. 10.9.2 décrit l'ensemble de solutions de l'équation (E) à partir d'une solution particulière donnée y_1. Il est facile de déterminer une telle solution lorsque la fonction $a(x)$ est constante et le second membre f est une fonction polynômiale, circulaire ou exponentielle.

Soit alors a un réel non nul fixé et considérons l'équation différentielle

$$y'(x) = ay(x) + f(x) \tag{E}$$

1. Si f est un polynôme, on cherchera une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $y_1(x) = P(x)$, P étant un polynôme du même degré que le polynôme f.

2. Si $f(x) = \alpha \cos \omega x$ (ou $f(x) = \alpha \sin \omega x$) on cherchera une solution y_1 de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$y_1(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$$

(λ et μ à déterminer).

3. Dans le cas $f(x) = \alpha e^{\beta x}$:

(i) Si $\beta \neq a$, chercher y_1 sous la forme $y_1(x) = \lambda e^{\beta x}$, ($\lambda$ à déterminer).

(ii) Si $\beta = a$, chercher une solution particulière de la forme $y_1(x) = (\lambda x + \mu)e^{ax}$ (λ et μ à déterminer).

Le principe de superposition (Prop. 10.9.3) nous permettra de trouver une solution particulière si f est une combinaison linéaire de fonctions polynômiales, circulaires et exponentielles.

Exemple.

Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y'(x) = -2y(x) + \cos x \tag{E}$$

L'équation homogène associée est

$$z(x) = -2z(x) \tag{H}$$

Le solutions de (H) sont les fonctions $z(x) = Ce^{-2x}$, pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière de (E) de la forme

$$y_1(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

On a $y_1'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x$ et

$$y_1'(x) + 2y_1(x) = (\mu + 2\lambda)\cos x + (2\mu - \lambda)\sin x = \cos x \;\Leftrightarrow\; \mu + 2\lambda = 1 \;\text{ et }\; 2\mu - \lambda = 0$$

On trouve $\lambda = \dfrac{2}{5}$ et $\mu = \dfrac{1}{5}$. la fonction

$$y_1(x) = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et, d'après le Th. 10.9.2, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$y(x) = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + Ce^{-2x}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

PCSO
COURS D'ANALYSE
Chapitre 11 : L'intégrale

Orsay 2012 – 2013

Table des matières

Chapitre 11

L'intégrale

11.1 Propriétés fondamentales

Nous admettrons que

✘ *Si f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$), on peut définir l'intégrale de f sur $[a, b]$, qui se note*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Il s'agit d'un nombre réel qu'on peut interpréter intuitivement comme l'aire « algébrique » déterminée par le graphe de f sur $[a, b]$: on considère positive l'aire du domaine limité par le graphe de f au dessus de l'axe Ox et négative celle du domaine situé au-dessous.

✘ *On définit*

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

et

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

La priorité pour nous dans ce chapitre est d'établir les résultats et les méthodes qui nous permettront d'encadrer ou de calculer une intégrale.

Nous démontrerons tous les résultats de ce chapitre à partir des quatre propriétés suivantes, qui apparaissent comme évidentes en termes d'aire, et que nous admettrons aussi :

✘ ***Propriété 0 : Intégrale d'une fonction constante.***
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b \lambda dx = \lambda(b - a)$$

(ici on intègre la fonction constante $x \to \lambda$ sur l'intervalle $[a, b]$).

✘ ***Propriété 1 : Linéarité de l'intégrale.***
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et λ, μ deux nombres réels. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

✘ ***Propriété 2 : Relation de Chasles.***
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, ($a < b$) et c un point de $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Grâce à la définition

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

la relation de Chasles se généralise quelle que soit la configuration des points a, b et c. Plus précisément

✘ *Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois points quelconques de I. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Par exemple : $\displaystyle\int_3^2 x^2dx = \int_3^5 x^2dx + \int_5^2 x^2dx.$

✘ ***Propriété 3 : Positivité de l'intégrale.***
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$).
Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Remarque.

La restriction $a < b$ est nécessaire seulement pour la Propriété 3.

11.2 Théorèmes de comparaison. La formule de la moyenne

✘ **Proposition 11.2.1** ***(Conservation des inégalités)***
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, $(a < b)$.
Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Démonstration : Il suffit d'écrire

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$$

d'après les propriétés 1 et 3. □

✘ **Proposition 11.2.2** ***(Intégrale et valeur absolue)***
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Alors

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Démonstration : La fonction $x \to |f(x)|$ est continue sur $[a, b]$ comme composition des fonctions continues $x \to f(x)$ et $u \to |u|$, ainsi $\int_a^b |f(x)|\, dx$ est bien définie.
A partir de l'inégalité $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, pour tout $x \in [a, b]$, et de la proposition précédente, on a

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

d'où le résultat. □

✘ **Proposition 11.2.3** ***(Inégalité de la moyenne)***
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$.
Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

Démonstration : D'après la Prop. 11.2.1

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

or $\int_a^b m dx = m(b - a)$ et $\int_a^b M dx = M(b - a)$. □

Remarques.

1. Nous savons (Th. 5.3.2) que si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ (fermé et borné), alors elle possède sur cet intervalle un minimum et un maximum absolus, en particulier elle est majorée et minorée sur $[a,b]$ et on dispose toujours des encadrements de f sur cet intervalle : $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ (le meilleur encadrement possible est obtenu si m est le minimum absolu et M le maximum absolu de f sur $[a,b]$).

2. L'inégalité de la moyenne s'écrit aussi

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Définition 11.2.4 (Valeur moyenne d'une fonction)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. Le nombre

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Remarques.

1. On a

$$\int_a^b \mu(f)dx = \int_a^b f(x)dx$$

L'aire « algébrique » du rectangle d'hauteur $\mu(f)$ et de largeur $b-a$ est égale à l'aire « algébrique » déterminée par le graphe de f sur $[a,b]$, d'où le nom du réel $\mu(f)$.

2. L'inégalité de la moyenne tire son nom de la notion de valeur moyenne d'une fonction, dans les notations de la Prop. 11.2.3 et de la Déf. 11.2.4, elle s'écrit

$$m \leq \mu(f) \leq M$$

Le résultat suivant montre que le nombre réel $\mu(f)$ est une valeur de la fonction f sur $[a,b]$: $\mu(f) = f(c)$ pour un certain $c \in [a,b]$.

Proposition 11.2.5 ***(Formule de la moyenne)***
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ $(a<b)$.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Démonstration : La continuité de f sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ implique que

$$f([a,b]) = [m,M]$$

où m et M sont, respectivement, le minimum et le maximum absolus de f sur $[a,b]$ (Th. 7.2.3).

Comme $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, on a $m \leq \mu(f) \leq M$ (inégalité de la moyenne). Ainsi $\mu(f) \in [m,M] = f([a,b])$ et il existe bien $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu(f)$. □

Remarque.

En multipliant par -1 les deux termes de l'égalité, on obtient :

$$\int_b^a f(x)dx = f(c)(a-b)$$

On peut donc écrire la formule de la moyenne sans tenir compte de l'ordre des bornes d'intégration.

11.3 Intégrale et primitive
Le Th. fondamental du calcul intégral

Nous allons voir maintenant comment, et pourquoi, le calcul des intégrales est lié au calcul des primitives :

✘

Théorème 11.3.1 ***(Th. fondamental du calcul intégral)***
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$ fixé.
La fonction $P : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$P(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur I et vérifie $P'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Remarques.

1. Le Th. dit que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle, dont on donne une expression « explicite » . Rappelons que, à partir d'une primitive donnée de f sur I, nous savons décrire l'ensemble des primitives de f sur cet intervalle (Prop. 6.1.2) : dans les notations du Th., les primitives de f sur I sont les fonctions

$$F(x) = P(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. En particulier, $P(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la seule primitive de f sur I nulle en a.

2. Ainsi, par exemple, $y(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$ est l'unique solution définie sur $]0,+\infty[$ du problème

$$\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent (voir Sect. 9.1), $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$, pour tout $x > 0$.

3. Précisons l'énoncé du Th : si, par exemple, $I = [\alpha, \beta]$, on a $P'_d(\alpha) = f(\alpha)$, $P'_g(\beta) = f(\beta)$ et $P'(x) = f(x)$, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$.

Démonstration du Th *: La fonction P est bien définie sur I car, pour tout $x \in I$ fixé, f est continue sur le segment d'extrémités a et x et $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe.*

Fixons maintenant un point x_0 à l'intérieur de l'intervalle I et montrons que $P'(x_0) = f(x_0)$.

Pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on a

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt \tag{1}$$

(il suffit de remarquer que $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt$)

D'autre part, en appliquant la formule de la moyenne, on a

$$\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = f\left(c(x)\right) \tag{2}$$

où $c(x)$ est un point du segment d'extrémités x_0 et x.

En particulier $x \to x_0$ implique $c(x) \to x_0$ et la continuité de f donne

$$\lim_{x \to x_0} f\left(c(x)\right) = f(x_0) \tag{3}$$

Enfin, d'après (1), (2) et (3) on a

$$P'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = \lim_{x \to x_0} f\left(c(x)\right) = f(x_0)$$

Si le point $x_0 \in I$ est une extrémité de l'intervalle, la démonstration précédente s'adapte facilement en considérant la limite à droite ou à gauche en x_0. □

Une conséquence fondamentale du Th. 11.3.1 est que l'on peut calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ à l'aide d'une primitive quelconque de f :

✘ **Corollaire 11.3.2** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*
Soit F une primitive de f sur I. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration : Fixons a et b.
Soit $P : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $P(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

D'après le Théorème, P est une primitive de f sur I. Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) = P(x) + C$ (voir Remarque 1. du Th.).
En fait, $C = F(a)$ puisque $P(a) = 0$.

D'autre part, par définition de P, on a

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

et le Corollaire est prouvé. □

Remarques.

1. On retiendra de façon condensée que

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. Le Corollaire est à la base du calcul pratique d'intégrales, par exemple : $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

3. L'accroissement $F(b) - F(a)$ se note souvent $[F(x)]_a^b$. Ainsi

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

et dans les applications on écrira

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

4. Considérons une particule qui se déplace sur un axe et dont l'abscisse à l'instant t est $s(t)$.
Le rapport $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ représente la vitesse moyenne de la particule entre les instants t_0 et t.

Nous définirons la vitesse instantanée $v(t_0)$ de la particule à l'instant t_0 comme la limite de ces vitesses moyennes lorsque t tend vers t_0 :

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

Ainsi $v(t) = s'(t)$ pour tout t et l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

permet de retrouver, à partir de la fonction vitesse instantanée, le changement de position du mobile entre les instants t_1 et t_2.

Remarquons alors que si $\mu(v)$ est la valeur moyenne de la fonction v sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, on a

$$\mu(v) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

et $\mu(v)$ est la vitesse moyenne de la particule entre les instants t_1 et t_2.

D'autre part, comme l'accélération du mobile est $a(t) = v'(t)$, l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v'(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

donne la variation de la vitesse entre les instants t_1 et t_2 à partir de la fonction accélération.

11.4 Calcul d'intégrales

Récapitulons les primitives des fonctions usuelles, dont la connaissance est essentielle pour le calcul d'intégrales d'après les résultats précédents.

Rappelons que la notation

$$\int f(x)dx$$

désigne l'ensemble des primitives de la fonction f sur un intervalle donné, qu'on doit préciser.

Soit $K \in \mathbb{R}$, alors

$$\int K dx = Kx + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, alors

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C, \text{ sur chacun des intervalles }]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, on a

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[$$

En particulier

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C, \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[$$

et

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[$$

D'autre part,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \text{ sur chacun des intervalles }]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ on obtient

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

On a

$$\int e^x dx = e^x + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

Plus généralement, si b est un réel positif, alors

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

Enfin

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \text{ sur } \mathbb{R}$$

et, sur chaque intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C \qquad \text{et} \qquad \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

11.4.1 La méthode du changement de variable

✘

Proposition 11.4.1 ***(Formule du changement de variable)***
Soient I et J deux intervalles.
Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, telle que u' est continue sur I, vérifiant $u(I) \subset J$.
Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors, pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du \tag{1}$$

où, dans l'expression « $f(u)du$ » de l'intégrale du second membre, « u » est une variable muette : on intègre la fonction f sur l'intervalle d'extrémités $u(a)$ et $u(b)$.

Démonstration : Fixons $a, b \in I$. Alors $u(a)$ et $u(b)$ sont dans l'intervalle J et f est continue sur l'intervalle d'extrémités $u(a)$ et $u(b)$, car elle est continue sur J. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

est bien définie.
De même, les hypothèses garantissent la continuité de la fonction $x \to f(u(x))\, u'(x)$ sur l'intervalle I et, en particulier, sur l'intervalle d'extrémités a et b : l'intégrale

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x) dx$$

est, elle aussi, bien définie.

Soit F une primitive de f sur J (elle existe d'après le Th. 11.3.1). Alors, d'après le Corollaire 11.3.2, on obtient

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du = F(u(a)) - F(u(b)) \tag{2}$$

D'autre part

$$f(u(x))\,u'(x) = F'(u(x))\,u'(x) = (F \circ u)'(x)$$

pour tout $x \in I$. Ainsi, $x \to F(u(x))$ est une primitive de $x \to f(u(x))\,u'(x)$ sur l'intervalle I et le Corollaire 11.3.2 donne

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx = F(u(b)) - F(u(a)) \tag{3}$$

et l'égalité (1) *découle des égalités* (2) *et* (3). □

Remarques, exemples.

1. Comme dans la démonstration de la formule du changement de variable

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

pour le calcul de primitives (Sect 6.1.5), la clé de l'égalité (1) est le fait suivant : si F est une primitive de f sur J, alors $x \to F(u(x))$ est une primitive de $x \to f(u(x))\,u'(x)$ sur l'intervalle I.

2. Pour retrouver facilement la formule (1), on utilisera le formalisme introduit dans le cadre du calcul de primitives

$$u = u(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u'(x) \quad \Rightarrow \quad du = u'(x)dx$$

qui permet de passer de la première intégrale à la seconde, où il ne restera qu'à remplacer les bornes $x = a$ et $x = b$ par $u = u(a)$ et $u = u(b)$ respectivement.

Voyons un exemple d'application, calculons

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x dx$$

On pose $u = u(x) = \sin x$, de sorte que $du = \cos x dx$. Les bornes deviennent $u(0) = \sin 0 = 0$ et $u(\pi/2) = \sin \pi/2 = 1$. On obtient

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x dx = \int_0^1 u^5 du = \left[\frac{u^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Comparons avec le calcul de primitives : si $u = u(x) = \sin x$ comme précédemment, on a

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

On remarquera que ici il faut revenir à la variable « x », alors que dans le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^5 du$, il n'est nul besoin de revenir à la variable d'origine.

11.4.2 La méthode d'intégration par parties

✘ **Proposition 11.4.2** ***(Formule d'intégration par parties pour le calcul des primitives)***
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

sur l'intervalle I.
L'égalité signifie que l'ensemble des primitives sur I de la fonction $f \cdot (g')$ s'obtient en ajoutant à la fonction $f \cdot g$ les primitives de $-(f') \cdot g$ sur I.

Démonstration : *Cette formule résulte de la formule de dérivation d'un produit*

$$(f \cdot g)' = \big(f'\big) \cdot g + f \cdot \big(g'\big)$$

sur l'intervalle I, qu'on peut écrire

$$\big(f'\big) \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot \big(g'\big)$$

d'où

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'\,dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

sur l'intervalle I. □

✘ **Proposition 11.4.3** ***(Formule d'intégration par parties)***
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec f' et g' continues sur I. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \qquad (1)$$

Démonstration : *Les hypothèses garantissent que les fonctions $x \to f(x)g'(x)$ et $x \to f'(x)g(x)$ sont continues sur I, en particulier les deux intégrales de la formule sont bien définies.*

A partir de la formule de dérivation d'un produit on obtient

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

or, d après le Corollaire 11.3.2, on a

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) = [f(x)g(x)]_a^b$$

et la formule est prouvée. □

Remarques.

1. Dans les applications de la formule (1), la fonction à intégrer doit se présenter comme produit de deux fonctions. On devra choisir judicieusement celle qu'on va dériver (qui jouera le rôle de la fonction f) et celle qu'on va « primitiver » de façon à la présenter sous la forme g', le but étant de se ramener à une intégration plus simple à réaliser : celle de $f'g$.

2. Grâce au formalisme $df = f'(x)dx$ et $dg = g'(x)dx$ on peut écrire les formules précédentes comme suit

$$\int f\ dg = f\ g - \int g\ df \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f\ dg = [f\ g]_a^b - \int_a^b g\ df$$

Exemples.

1. Calcul de $\displaystyle\int_a^b P(x)e^{\lambda x}dx$ où P est un polynôme.

On va dériver le polynôme pour en abaisser le degré. Dans les notations de la formule (1) on pose $f(x) = P(x)$ et $g'(x) = e^{\lambda x}$, ce qui donne $g(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$. Au bout d'une intégration par parties, on est ramené à une intégrale du même type, mais avec un polynôme P' de degré inférieur et on recommence le processus...

Par exemple

$$\int_a^b xe^{2x}dx = \int_a^b x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx = \left[x\ \frac{e^{2x}}{2}\right]_a^b - \int_a^b (x)'\,\frac{e^{2x}}{2}dx = \left[x\ \frac{e^{2x}}{2}\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b e^{2x}dx$$

et l'intégrale du second membre est directement calculable. Dans notre exemple, une intégration par parties a suffit car $d^\circ P = 1$.

2. Calcul de $\displaystyle\int_a^b P(x)\cos\lambda x dx$ ou $\displaystyle\int_a^b P(x)\sin\lambda x dx$, où P est un polynôme.

On va encore dériver le polynôme pour en abaisser le degré. Dans les notations de la formule (1), on pose donc $f(x) = P(x)$ et on devra « primitiver » la fonction sinus ou cosinus de façon à l'écrire de la forme g'. Par exemple

$$\int_a^b x^2\cos 3x dx = \int_a^b x^2\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)'dx = \left[x^2\ \frac{\sin 3x}{3}\right]_a^b - \int_a^b 2x\ \frac{\sin 3x}{3}dx$$

On est ramené à une intégrale du même type, mais avec un polynôme de degré inférieur, pour la calculer on applique la même technique :

$$-\int_a^b 2x\frac{\sin 3x}{3}dx = -\frac{2}{3}\int_a^b x\sin 3x = -\frac{2}{3}\int_a^b x\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)'dx$$

$$= \frac{2}{9}\int_a^b x\,(\cos 3x)'\,dx = \frac{2}{9}\left([x\cos 3x]_a^b - \int_a^b \cos 3x dx\right)$$

$$= \frac{2}{9}\left([x\ \cos 3x]_a^b - \left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_a^b\right)$$

3. Calcul de $\int_a^b P(x)\ln x dx$, avec P polynôme et a, b positifs.

Ici on dérive la fonction ln et on primitive le polynôme. Voyons un exemple :

$$\int_a^b \left(x^3+x-1\right)\ln x dx = \int_a^b \ln x \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right)' dx$$

$$= \left[\ln x\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right) dx$$

$$= \left[\ln x\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}-1\right) dx$$

Au bout d'une intégration par parties on est ramené à l'intégrale d'un polynôme.

4. Calcul de $\int_a^b e^{\lambda x}\cos \mu x dx$ ou $\int_a^b e^{\lambda x}\sin \mu x dx$.

Le choix de la fonction à dériver ou à primitiver est ici indifférent, la technique consiste à faire deux intégrations par parties en gardant le même choix. Illustrons ceci par un exemple, où systématiquement nous dériverons la fonction exponentielle et primitiverons la fonction sinus ou cosinus :

$$\int_a^b e^x\cos x dx = \int_a^b e^x(\sin x)' dx = [e^x\sin x]_a^b - \int_a^b (e^x)'\sin x dx = [e^x\sin x]_a^b - \int_a^b e^x\sin x dx$$

(nous faisons ensuite une seconde intégration par parties)

$$= [e^x\sin x]_a^b - \int_a^b e^x(-\cos x)' dx = [e^x\sin x]_a^b + \int_a^b e^x(\cos x)' dx$$

$$= [e^x\sin x]_a^b + \left([e^x\cos x]_a^b - \int_a^b (e^x)'\cos x dx\right)$$

(ce qui nous permet de retrouver l'intégrale du départ)

$$= [e^x\sin x + e^x\cos x]_a^b - \int_a^b e^x\cos x dx$$

Finalement

$$\int_a^b e^x\cos x dx = \frac{1}{2}[e^x\sin x + e^x\cos x]_a^b$$

Remarque.

Les mêmes techniques permettent d'appliquer la formule d'intégration par parties pour le calcul des primitives

$$\int P(x)e^{\lambda x}dx \qquad \int P(x)\cos\lambda x dx \qquad \int P(x)\sin\lambda x dx$$

$$\int P(x)\ln x dx \qquad \int e^{\lambda x}\cos\mu x dx \qquad \int e^{\lambda x}\sin\mu x dx$$