

# TRACES DES OPÉRATEURS DE HECKE SUR LES ESPACES DE FORMES AUTOMORPHES DE $SO_7$ , $SO_8$ OU $SO_9$ EN NIVEAU 1 ET POIDS ARBITRAIRE

THOMAS MÉGARBANÉ

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous déterminons la trace de certains opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de niveau 1 et poids quelconque des groupes spéciaux orthogonaux des réseaux euclidiens  $E_7$ ,  $E_8$  et  $E_8 \oplus A_1$ . En utilisant la théorie d'Arthur, nous en déduisons des informations sur les paramètres de Satake des représentations automorphes des groupes linéaires découvertes par Chenevier et Renard dans [14]. Nos résultats corroborent notamment une conjecture de Bergström, Faber et van der Geer sur la fonction zêta de Hasse-Weil de l'espace de module des courbes de genre 3 à 17 points marqués.

## 1. INTRODUCTION.

Donnons-nous  $n \equiv 0, \pm 1 \pmod{8}$  un entier positif, et plaçons-nous dans un espace euclidien  $V$  de dimension  $n$  muni de son produit scalaire  $x \cdot y$ . On définit  $\mathcal{L}_n$  l'ensemble des réseaux pairs  $L \subset V$  tels que  $\det(L) = 1$  si  $n$  est pair, et  $\det(L) = 2$  sinon. Les groupes  $O(V) \simeq O_n(\mathbb{R})$  et  $SO(V) \simeq SO_n(\mathbb{R})$  ont une action naturelle sur  $\mathcal{L}_n$ , et on pose  $X_n = O(V) \setminus \mathcal{L}_n$  et  $\widetilde{X}_n = SO(V) \setminus \mathcal{L}_n$ .

On s'intéressera plus particulièrement aux cas où  $n \in \{7, 8, 9\}$ . Ces cas ont notamment la propriété que  $X_n = \widetilde{X}_n$  est réduit à un seul élément, à savoir respectivement la classe des "réseaux de racines"  $E_7$ ,  $E_8$  et  $E_8 \oplus A_1$  dont les définitions sont rappelées au paragraphe 2.1.

Si on considère  $(W, \rho)$  une représentation de dimension finie de  $SO_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{C}$ , on définit alors l'espace des formes automorphes de niveau 1 de poids  $W$  pour  $SO_n$  comme :

$$\mathcal{M}_W(SO_n) := \{f : \mathcal{L}_n \rightarrow W \mid (\forall \gamma \in SO_n(\mathbb{R})) f(\gamma \cdot L) = \rho(\gamma) \cdot f(L)\}.$$

C'est un espace vectoriel de dimension finie. Comme toutes les formes automorphes considérées dans cet article sont de niveau 1, on omettra parfois de le préciser.

Soient  $A$  un groupe abélien fini, et  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ . On dit que  $L_1$  et  $L_2$  sont  $A$ -voisins si :

$$L_1/(L_1 \cap L_2) \simeq L_2/(L_1 \cap L_2) \simeq A$$

Si  $A = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^k$ , on parle de  $d, \dots, d$ -voisins (et de  $d$ -voisins si  $k = 1$ ). Si  $p$  désigne un nombre premier, et  $q$  une puissance de  $p$ , alors il est facile de construire tous les  $q$ -voisins ou les  $p, \dots, p$ -voisins d'un  $L \in \mathcal{L}_n$  donné (comme rappelé aux proposition-définitions 2.2.6 et 2.2.5).

À la notion de  $A$ -voisins est associé un "opérateur de Hecke"  $T_A$  sur chaque espace de formes automorphes  $\mathcal{M}_W(SO_n)$  défini par la formule :

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n) (\forall f \in \mathcal{M}_W(SO_n)) \quad T_A(f)(L) = \sum_{L' \text{ } A\text{-voisin de } L} f(L')$$

Le premier but de notre travail est de déterminer la trace de  $T_A$  sur les espaces  $\mathcal{M}_W(SO_n)$  pour toute représentation irréductible  $W$  de  $SO_n$  et  $n \in \{7, 8, 9\}$ . Notre point de départ est le suivant :

**Proposition 1.0.1.** *Supposons que  $\widetilde{X}_n$  est réduit à un élément (c'est-à-dire que  $n \leq 9$ ). Soit  $L_0 \in \mathcal{L}_n$ , et  $\text{vois}_A(L_0)$  l'ensemble de ses  $A$ -voisins. Le groupe  $\text{SO}(L_0)$  a une action naturelle sur  $\text{vois}_A(L_0)$ . On note  $\mathcal{V}_j$  les orbites de cette action, et pour chaque  $j$  on choisit un élément  $g_j \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  tel que  $g_j \cdot L_0 \in \mathcal{V}_j$  (ce qui est toujours possible comme  $|X_n| = 1$ ). Alors on a l'égalité :*

$$\text{tr}(\text{T}_A | \mathcal{M}_W(\text{SO}_n)) = \frac{1}{|\text{SO}(L_0)|} \cdot \left( \sum_j \left( |\mathcal{V}_j| \cdot \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_0)} \text{tr}(\gamma g_j | W) \right) \right).$$

Dans cet énoncé, on désigne par  $\text{SO}(L)$ , pour  $L \in \mathcal{L}_n$ , le sous-groupe des éléments  $g \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  tels que  $gL = L$ , qui est un groupe fini. On dispose d'un énoncé analogue mais plus technique, sans l'hypothèse  $|\widetilde{X}_n| = 1$ , détaillé au paragraphe 3.1.

Afin de calculer explicitement cette formule, nous devons déterminer les termes qui y interviennent, ce qui fait l'objet des chapitres 4 et 5.

Au paragraphe 4.2 : on explique comment déterminer le groupe  $\text{SO}(L_0)$ , qui est très proche du groupe de Weyl du système de racines associé à  $L_0$ .

Au paragraphe 4.3 : on donne un algorithme pour déterminer les orbites de  $\text{vois}_A(L_0)$  pour l'action de  $\text{SO}(L_0)$ . On se restreint ici au cas où  $A \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour  $q$  une puissance d'un nombre premier impair. Notre algorithme nous retourne pour chaque orbite  $\mathcal{V}_j$  la quantité  $|\mathcal{V}_j|$  ainsi qu'un élément  $x_j \in C_{L_0}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  dont le  $q$ -voisin associé  $L'_0(x_j)$  est dans l'orbite  $\mathcal{V}_j$  (où  $C_{L_0}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  désigne l'ensemble des droites isotropes de  $L_0/qL_0$ ).

Au paragraphe 4.4 : on donne un algorithme qui, à partir d'une droite isotrope  $x_j \in C_{L_0}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ , détermine une transformation  $g_j \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  vérifiant :  $g_j(L_0) = L'_0(x_j)$ . Ce même algorithme permet dans un cadre plus général de déterminer, à partir d'une famille  $\mathbb{Z}$ -génératrice d'un réseau  $L'_0$  isomorphe à  $L_0$ , une isométrie transformant  $L_0$  en  $L'_0$ .

Enfin, les traces de la forme  $\text{tr}(\gamma | W)$  pour  $\gamma \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  sont calculées au moyen de la formule des caractères de Weyl, ou plus exactement de sa version "dégénérée" étudiée dans [12, Ch. 1] et dans [14, Ch. 2], rappelée ici au paragraphe 3.2.

Notre algorithme est d'autant plus long à exécuter que  $|A|$  et que  $n$  sont grands. C'est pourquoi nous nous restreignons à  $n \leq 9$  et même à  $q \leq 67$  (pour  $n = 7$ ),  $q \leq 23$  (pour  $n = 8$ ) et  $q \leq 13$  (pour  $n = 9$ ).

Les cas où  $A$  est un 2-groupe présentent certaines particularités. On les étudie au chapitre 5. Les orbites des  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ -voisins et des 4-voisins des réseaux  $E_7$  et  $E_8$  sont étudiées au paragraphe 5.1. On a notamment le résultat suivant :

**Proposition 1.0.2.** *Pour  $L = E_7$  ou  $L = E_8$ , pour  $1 \leq i \leq 3$ , le groupe  $\text{SO}(L)$  agit transitivement sur l'ensemble des  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ -voisins de  $L$ .*

*Pour  $L = E_7$  ou  $L = E_8$ , le groupe  $\text{SO}(L)$  agit transitivement sur l'ensemble des 4-voisins de  $L$ .*

*Il y a deux orbites de 2, 2, 2, 2-voisins de  $E_8$  pour l'action de  $\text{SO}(E_8)$ , dont la réunion est l'unique orbite des 2, 2, 2, 2-voisins de  $E_8$  pour l'action de  $\text{O}(E_8)$ .*

Au final, nous obtenons dans tous ces cas de tables des valeurs de  $\text{tr}(\text{T}_A | \mathcal{M}_W(\text{SO}_n))$  pour des représentations irréductibles  $W$  arbitraires. Certaines de ces valeurs sont disponibles dans [34].

Au chapitre 7, nous rappelons, en suivant Arthur [4] et Chenevier–Renard [14], comment les formes automorphes pour  $\text{SO}_n$  étudiées ci-dessus sont "construites" à partir de certaines représentations automorphes des groupes linéaires. Cela nous permet, par un procédé de "récurrence sur  $n$ " décrit au paragraphe 7.4, d'utiliser nos calculs pour déterminer des paramètres de Satake des représentations des groupes linéaires mises en jeu. Soyons plus précis.

Soit  $n \geq 1$  un entier. Soit  $\Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_n)$  l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) représentations automorphes cuspidales de  $\text{PGL}_n$  sur  $\mathbb{Q}$  ayant les propriétés suivantes :

- (i)  $\pi_p$  est non ramifiée pour tout premier  $p$ ,
- (ii)  $\pi_\infty$  est algébrique régulière,
- (iii)  $\pi$  est isomorphe à sa contragrédiente  $\pi^\vee$ .

Rappelons la signification de (ii). Suivant Harish-Chandra,  $\pi_\infty$  admet un caractère infinitésimal, que l'on peut voir suivant Langlands comme une classe de conjugaison semisimple dans  $M_n(\mathbb{C})$  ([31, §2]). La condition (ii) signifie que les valeurs propres de cette classe de conjugaison sont de la forme  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  avec  $\lambda_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  et  $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$  pour tout  $i, j$ . Les  $\lambda_i$  sont appelés les poids de  $\pi$ , et vérifient  $\lambda_{n-i+1} + \lambda_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$  grâce à la condition (iii).

Rappelons enfin que si  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_n)$  et si  $p$  est premier, alors suivant Langlands [31] l'isomorphisme de Satake associé à  $\pi_p$  une classe de conjugaison semisimple dans  $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ , qui sera notée  $c_p(\pi)$ .

Dans leur travail [14], Chenevier et Renard ont déterminé pour  $n \leq 8$  (et  $n \neq 7$  en général), le nombre d'éléments de  $\Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_n)$  de poids donné. La question qui s'est posée, en fait le but de notre travail, est d'étudier les paramètres de Satake de ces représentations, du moins pour les premiers poids pour lesquelles il en existe (auquel cas il y en a le plus souvent seulement une ou deux). Soulignons que les résultats de [14] ne sont plus conditionnels, grâce notamment aux travaux récents de Waldspurger [55], Kaletha [28], Taïbi [51] et Arancibia–Moeglin–Renard [2].

Nous obtenons les théorèmes suivants, dans lesquels  $V_{\text{St}}$  désigne la représentation standard de  $\text{SO}_n$ . Les notations  $\Delta_{w_1, \dots, w_n}$ ,  $\Delta_{w_1, \dots, w_n}^k$ ,  $\Delta_{w_1, \dots, w_n}^*$  et  $\Delta_{w_1, \dots, w_n}^{*k}$  qui interviennent dans les tables 1 à 10 sont expliquées au paragraphe 7.3.

**Théorème 1.0.3.** *Soient  $25 \geq w_1 > w_2 > w_3 \geq 1$  des entiers impairs, tels que l'ensemble  $\Pi$  des éléments  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_6)$  dont les poids sont les  $\pm \frac{w_1}{2}, \pm \frac{w_2}{2}, \pm \frac{w_3}{2}$  est non vide. D'après [14, Table 7], l'ensemble  $\Pi$  possède alors un ou deux éléments.*

- (i) Si  $\Pi = \{\pi\}$  est un singleton, alors le polynôme  $\det(2^{w_1/2} X \cdot \text{Id} - c_2(\pi) | V_{\text{St}}) \in \mathbb{Z}[X]$  est donné par la table 2.
- (ii) Si on a  $|\Pi| = 2$ , alors le polynôme unitaire de degré 2 dont les racines sont les  $2^{w_1/2} \cdot \text{Trace}(c_2(\pi) | V_{\text{St}})$  pour  $\pi \in \Pi$  est donné par la table 3.
- (iii) Pour  $p \leq 41$  un nombre premier impair, la quantité  $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \text{Trace}(c_p(\pi) | V_{\text{St}})$  est un entier, donné par les tables 4 et 5.

**Théorème 1.0.4.** *Soient  $25 \geq w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \geq 1$  des entiers impairs, tels que l'ensemble  $\Pi$  des éléments  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_8)$  dont les poids sont les  $\pm \frac{w_1}{2}, \pm \frac{w_2}{2}, \pm \frac{w_3}{2}, \pm \frac{w_4}{2}$  est non vide.*

*Pour  $p \leq 13$  un nombre premier impair, la quantité  $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \text{Trace}(c_p(\pi) | V_{\text{St}})$  est un entier, donné par la table 6.*

**Théorème 1.0.5.** *Soient  $26 \geq w_1 > w_2 > w_3 \geq 2$  des entiers pairs, tels que l'ensemble  $\Pi$  des éléments  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_7)$  dont les poids sont les  $\pm \frac{w_1}{2}, \pm \frac{w_2}{2}, \pm \frac{w_3}{2}, 0$  est non vide. D'après [14, Table 10], l'ensemble  $\Pi$  possède alors un seul élément.*

- (i) Le polynôme  $\det(2^{w_1/2} X \cdot \text{Id} - c_2(\pi) | V_{\text{St}}) \in \mathbb{Z}[X]$  pour  $\pi$  l'unique élément de  $\Pi$  est donné par la table 7.
- (ii) Pour  $p \leq 13$  un nombre premier impair, la quantité  $p^{w_1/2} \cdot \text{Trace}(c_p(\pi) | V_{\text{St}})$  pour  $\pi$  l'unique élément de  $\Pi$  est un entier donné par la table 8.

**Théorème 1.0.6.** *Soient  $26 \geq w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \geq 0$  des entiers pairs, tels que l'ensemble  $\Pi$  des éléments  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_8)$  dont les poids sont les  $\pm \frac{w_1}{2}, \pm \frac{w_2}{2}, \pm \frac{w_3}{2}, \pm \frac{w_4}{2}$  est non vide. D'après [14, Table 9], l'ensemble  $\Pi$  possède alors un seul élément.*

- (i) Le polynôme  $\det(2^{w_1/2} X \cdot \text{Id} - c_2(\pi) | V_{\text{St}}) \in \mathbb{Z}[X]$  pour  $\pi$  l'unique élément de  $\Pi$  est donné par la table 9.

(ii) Pour  $p \leq 13$  un nombre premier impair, la quantité  $p^{w_1/2} \cdot \text{Trace}(c_p(\pi)|V_{\text{St}})$  pour  $\pi$  l'unique élément de  $\Pi$  est un entier donné par la table 10.

Pour  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_n)$ , si l'on pose  $\sum_{i=0}^n a_i \cdot X^i = \det(2^{w_1/2} X \cdot \text{Id} - c_2(\pi)|V_{\text{St}})$ , alors les  $a_i$  vérifient :  $a_{n-i} = 2^{(n-2i) \cdot w_1/2} \cdot a_i$ , et on n'a pas explicité tous les monômes des polynômes donnés aux tables 2, 7 et 9.

Signalons que nous disposons de nombreuses indications que nos calculs finaux sont corrects ! Par exemple, notre méthode permet également de déterminer des paramètres de Satake de représentations associées à des formes modulaires classiques, ou de Siegel en genre 2, cas où ils étaient déjà connus (par exemple par van der Geer [53] ou Chenevier–Lannes [13]). Nous renvoyons au paragraphe 6.2 pour quelques exemples détaillés de ces vérifications.

De plus, nous pouvons souvent calculer de différentes manières un paramètre de Satake donné, et vérifier que les résultats sont bien les mêmes. Signalons enfin que nos résultats montrent que pour les trois représentations  $\pi$  de  $\Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_7)$  dont les poids sont de la forme  $a + b > a > b > 0 > -b > -a > -a - b$  avec  $a + b \leq 13$  (voir les trois premières lignes de la table 7), alors le paramètre de Satake  $c_2(\pi)$  est conjugué à un élément de  $G_2$ , conformément à une conjecture de [14] (voir la page 10 de l'introduction ainsi que la table 10).

Terminons par mentionner un lien entre ce travail et une conjecture de Bergström, Faber et van der Geer [20] sur la fonction zêta de Hasse-Weil de l'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{3,n}$  de module des courbes stables de genre 3 munies de  $n$  points marqués (qui est propre et lisse sur  $\mathbb{Z}$ ). En effet, ces auteurs ont mis en évidence de manière expérimentale l'existence de deux “motifs” de poids 23 et de dimension 6 dans  $H^{23}(\overline{\mathcal{M}}_{3,17})$ , et ont déterminé le polynôme caractéristique de leur Frobenius en 2. D'autre part, Chenevier et Renard ont trouvé exactement 7 représentations  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_6)$  dont le plus grand poids est  $\frac{23}{2}$  (et aucune de plus grand poids  $< \frac{23}{2}$ ). Les calculs faits ici montrent que les polynômes caractéristiques des paramètres de Satake en  $p = 2$  de deux des 7 représentations susmentionnées, à savoir celles de poids  $\pm \frac{23}{2}, \pm \frac{13}{2}, \pm \frac{5}{2}$  et  $\pm \frac{23}{2}, \pm \frac{15}{2}, \pm \frac{3}{2}$ , sont exactement ceux trouvés par Bergström, Faber et van der Geer ! Cela répond à une question que nous avaient posée ces auteurs.

Cet article a été écrit dans le cadre de ma thèse sous la direction de Gaëtan Chenevier. Je le remercie pour son aide ainsi que pour les choix qu'il m'a incité à prendre et qui ont beaucoup contribué à mes résultats.

## 2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

Dans toute la suite, on se place dans un espace euclidien  $V$  de dimension  $n$ , muni de son produit scalaire  $x \cdot y$ , et on note  $q : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x \cdot x}{2}$  la forme quadratique associée. On considérera souvent le cas où  $V = \mathbb{R}^n$ , muni de sa structure euclidienne, avec pour base canonique associée  $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . On notera alors  $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$  le produit scalaire usuel.

### 2.1. Les réseaux de $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.1.1** (Dual et résidu d'un réseau). *Soit  $L \subset V$  un réseau. On définit  $L^\sharp$  le dual de  $L$  par :*

$$L^\sharp = \{y \in V \mid (\forall x \in L) y \cdot x \in \mathbb{Z}\}.$$

*En particulier,  $L$  est entier si, et seulement si,  $L \subset L^\sharp$ . Dans ce cas on définit le résidu de  $L$  comme le quotient :*

$$\text{rés } L = L^\sharp / L.$$

*Ce quotient est muni d'une forme quadratique  $\text{rés } L \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  définie par  $x \mapsto q(x) \bmod \mathbb{Z}$  appelée forme d'enlacement.*

**Définition 2.1.2** (Déterminant d'un réseau). *Soit  $L$  un réseau entier. On note  $\det(L)$  son déterminant, qui est encore le déterminant de la matrice de Gram d'une base quelconque de  $L$ . On a la relation bien connue :*

$$\det(L) = |\text{rés } L|.$$

**Définition 2.1.3** (Racines d'un réseau). *Soit  $L \subset V$  un réseau entier. On définit l'ensemble des racines de  $L$  comme l'ensemble  $R(L)$  (qui est fini, et éventuellement vide) :*

$$R(L) = \{x \in L \mid x \cdot x = 2\}.$$

*C'est un système de racines du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel qu'il engendre au sens de [8, Ch. VI, §1.1, Définition 1], ce qui justifie la terminologie (c'est même un système de racines de type ADE).*

On reprend les notations de [8, Ch. VI, §1] pour les notions relatives aux systèmes de racines (systèmes de racines, chambre et groupe de Weyl, longueur d'un élément du groupe de Weyl, diagramme de Dynkin, etc.). On expose ici quelques notations et résultats qu'on utilisera.

La proposition suivante est une conséquence directe de [8, Ch. V, §3, Théorème 1] :

**Proposition 2.1.4.** *Soit  $R$  un système de racines,  $W$  son groupe de Weyl,  $C$  une chambre, et  $\rho$  un élément de  $C$ . Alors :*

$$(\forall w, w' \in W) w = w' \Leftrightarrow w(\rho) = w'(\rho).$$

On adoptera les notations suivantes :

$A_n$  : On pose  $A_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_i x_i = 0\}$ . On a  $R(A_n) = \{\pm(e_i - e_j) \mid i \neq j\}$ .

$D_n$  : On pose  $D_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_i x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$ . On a  $R(D_n) = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\}$ .

$E_8$  : On pose  $E_8 = D_8 + \mathbb{Z} \cdot e$ , avec  $e = \frac{1}{2}(1, \dots, 1)$ . On a  $R(E_8) = R(D_8) \cup \{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \dots, \pm 1) \mid \prod_i x_i > 0\}$ .

$E_7$  : On pose  $E_7 = e^\perp \cap E_8 = \{(x_i) \in E_8 \mid \sum_i x_i = 0\}$ . On a  $R(E_7) = e^\perp \cap R(E_8) = R(A_7) \cup \{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \dots, \pm 1) \mid \sum_i x_i = 0\}$ .

**Proposition 2.1.5.** *Soient  $L$  un réseau entier,  $R = R(L)$  et  $W$  le groupe de Weyl de  $R$ . On suppose que  $R$  est un système de racines de  $V$  (en particulier,  $R$  engendre  $V$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel). Soient  $D$  le diagramme de Dynkin associé à un ensemble de racines simples  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  et  $G$  le sous-groupe des permutations de  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  qui sont des automorphismes de  $D$ . On pose  $A(R)$  (respectivement  $O(L)$ ) le sous-groupe de  $O(V)$  des éléments qui laissent stable  $R$  (respectivement  $L$ ). On a les inclusions de groupes suivantes :*

$$W \subset O(L) \subset A(R) \simeq W \rtimes G.$$

*De plus, si  $L$  est engendré  $\mathbb{Z}$ -linéairement par  $R$ , on a l'égalité :  $O(L) = A(R)$ .*

*Démonstration.* Les inclusions  $W \subset O(L)$  et  $O(L) \subset A(R)$  viennent respectivement du fait que  $L$  est un réseau entier, et que le groupe  $O(L)$  préserve l'ensemble  $R$ .

L'isomorphisme  $A(R) \simeq W \rtimes G$  vient de [8, Ch. VI, §1, Proposition 16], comme  $R$  est un système de racines de  $V$ .

Enfin, le cas où  $L$  est engendré par  $R$  est évident.  $\square$

On précise dans le corollaire qui suit les cas que l'on rencontrera le plus souvent, où les notations sont les mêmes qu'à la proposition précédente.

**Corollaire 2.1.6.** *Pour  $L = E_7$ ,  $L = E_8$  ou  $L = E_8 \oplus A_1$ , on a :  $A(R) = O(L) = W$ .*

*Pour  $L = A_n$  ( $n \geq 2$ ) ou pour  $L = D_n$  ( $n \geq 5$ ), on a  $G \simeq \mathcal{S}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Pour  $L = D_4$ , on a  $G \simeq \mathcal{S}_3$ . Dans tous ces cas, on a :  $O(L) = A(R)$ .*

*Démonstration.* On vérifie dans un premier temps que tous ces réseaux sont bien engendrés comme  $\mathbb{Z}$ -modules par leurs racines. Il suffit ensuite de calculer le groupe  $G$  de la proposition précédente, ce qui se fait facilement. Notons par exemple que ce groupe est trivial lorsque le réseau  $L$  considéré est  $E_7$ ,  $E_8$  ou  $E_8 \oplus A_1$ .  $\square$

## 2.2. Les formes automorphes et les opérateurs de Hecke.

2.2.1. *Les formes automorphes.* Pour  $n \equiv 0, \pm 1 \pmod{8}$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_n$  a été présenté en introduction. On rappelle qu'il est non vide. Par exemple, suivant les notations précédentes,  $\mathcal{L}_n$  contient :

- le réseau  $E_8^{(n-7)/8} \oplus E_7$  si  $n \equiv -1 \pmod{8}$  ;
- le réseau  $E_8^{n/8}$  si  $n \equiv 0 \pmod{8}$  ;
- le réseau  $E_8^{(n-1)/8} \oplus A_1$  si  $n \equiv 1 \pmod{8}$ .

Donnons nous  $L_0 \in \mathcal{L}_n$  l'élément ci-dessus (selon la valeur de  $n$ ). On définit  $O_n$  le schéma en groupes affine sur  $\mathbb{Z}$  associé à la forme quadratique  $L_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto q(x)$ . Il s'agit de l'objet noté  $O_{L_0}$  dans [13, Ch. II, §1]. On définit de même  $SO_n \subset O_n$  (introduit aussi dans [13, Ch. II, §1]).

Pour faire court, on appellera dans la suite  $\mathbb{A}$ -groupe un schéma en groupes affine sur  $\mathbb{A}$  et de type fini, de sorte que  $O_n$  et  $SO_n$  sont des  $\mathbb{Z}$ -groupes (ce dernier étant même réductif).

La définition générale de la théorie des formes automorphes s'y applique, et se réduit à la définition donnée en introduction qui sera amplement suffisante pour nos besoins (voir par exemple [13, Ch. IV, §3]).

2.2.2. *Les  $A$ -voisins.* Rappelons d'abord quelques définitions, présentes par exemple dans [13, Ch. II, §1], qui nous seront utiles dans la suite.

**Définition 2.2.1** (Espaces isotropes et lagrangiens). *Soient  $m$  un entier, et  $C$  un  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -module de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $b$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .*

*On dit alors qu'un sous-module  $I$  de  $C$  est isotrope si l'on a  $b(x, y) = 0$  pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $I$ , c'est-à-dire si l'on a  $I \subset I^\perp$ , où  $I^\perp$  désigne l'orthogonal de  $I$ .*

*Si l'on a l'égalité  $I = I^\perp$ , alors on dira que  $I$  est un lagrangien de  $C$ . Étant donnés  $I$  et  $J$  deux lagrangiens de  $C$ , ils seront dits transverses si  $I \cap J = \{0\}$ .*



**Définition 2.2.2** (Module hyperbolique). Soient  $m$  un entier, et  $I$  un  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -module de type fini. On note  $I^\sharp = \text{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  le dual de  $I$ .

On définit le module hyperbolique sur  $I$ , noté  $H(I)$ , comme étant le  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -module  $I \oplus I^\sharp$  muni de la forme bilinéaire symétrique  $((x, \phi), (y, \psi)) \mapsto \psi(x) + \phi(y)$ .

En particulier, les sous-modules  $I$  et  $I^\sharp$  de  $H(I)$  sont des lagrangiens transverses.

Pour  $A$  un groupe abélien fini, on a présenté en introduction la notion de  $A$ -voisins, due à Kneser. Le lemme technique suivant nous sera utile pour construire, pour certaines valeurs de  $A$ , l'ensemble des  $A$ -voisins d'un réseau  $L \in \mathcal{L}_n$  donné :

**Lemme 2.2.3.** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux  $A$ -voisins. On pose :  $M = L_1 \cap L_2$ ,  $I_1 = L_1/M$ ,  $I_2 = L_2/M$ , et  $R = (L_1^\sharp \cap L_2^\sharp)/(L_1 \cap L_2)$ .

Les inclusions de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_1^\sharp \cap L_2^\sharp$  dans  $M^\sharp$  induisent l'isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$I_1 \oplus I_2 \oplus R \simeq \text{rés } M$$

De plus, l'accouplement  $I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  induit par la forme d'enlacement de rés  $M$  est non dégénéré. Pour cette forme, les sous-modules  $I_1 \oplus I_2$  et  $R$  sont orthogonaux, rés  $M$  est canoniquement isomorphe à  $H(I_1) \oplus \text{rés } L_1$  (et cet isomorphisme envoie  $R$  sur rés  $L_1$ ), et  $I_2$  est un lagrangien de  $H(I_1)$  transverse à  $I_1$  et orthogonal à rés  $L_1$ .

*Démonstration.* voir [13, Ch. III, §1, Proposition 1.1] et [13, Annexe B, §3, proposition 3.1] selon la parité de  $n$ .  $\square$

L'utilisation que l'on fera des  $A$ -voisins nous impose de prendre un point de vue asymptotique : on souhaite déterminer, pour un réseau  $L$  fixé, l'ensemble de ses  $A$ -voisins. On rappelle que la notation  $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  a été présentée en introduction. En tant que sous-groupes de  $O(V)$ , les groupes  $O(L)$  et  $SO(L)$  agissent naturellement sur l'ensemble  $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  et sur l'ensemble des  $A$ -voisins de  $L$ . La proposition suivante nous donne, selon les choix de  $A$ , une paramétrisation des  $A$ -voisins d'un réseau  $L$  donné :

**Proposition 2.2.4.** Soit  $L \in \mathcal{L}_n$ .

- (i) Si  $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , alors l'ensemble des  $A$ -voisins de  $L$  est en bijection naturelle avec  $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ .
- (ii) Si  $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ , alors l'ensemble des  $A$ -voisins  $L'$  de  $L$  est en bijection avec l'ensemble des couples  $(X, I')$ , où  $X$  est un espace totalement isotrope de  $L/pL$  de dimension  $r$ , et  $I'$  un lagrangien de  $H(L/M)$  transverse à  $L/M$  (avec  $M$  l'image réciproque de  $X^\perp$  par  $L \rightarrow L/pL$ , et  $L'$  image réciproque de  $I'$  par  $M^\sharp \rightarrow \text{rés } M$ ).

Ces deux bijections sont détaillées dans les propositions-définitions 2.2.6 et 2.2.5 qui suivent. De plus, elles commutent aux actions naturelles de  $O(L)$ .

*Démonstration.* Pour le point (i) : la bijection entre les  $A$ -voisins de  $L$  et les points de  $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  est détaillée dans [13, Ch.III, §1]. On montre à la proposition-définition 2.2.6 qu'elle commute bien aux actions de  $O(L)$  sur l'ensemble des  $A$ -voisins et sur  $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  (en donnant explicitement cette bijection).

Pour le point (ii) : on se donne  $L \in \mathcal{L}_n$ , et  $L'$  un  $A$ -voisin de  $L$ , et on se place pour simplifier dans le cas où  $n \equiv 0 \pmod{8}$  (les autres cas se traitant de la même manière). Suivant les notations du lemme 2.2.3, on a  $R \simeq \text{rés } L = 0$ . On note  $M = L \cap L'$ ,  $I = L/M$  et  $I' = L'/M$ . On pose aussi  $\phi : L \rightarrow L/pL$  la réduction modulo  $p$  dans  $L$ . On fait les constatations suivantes :

- Du fait des inclusions  $pL' \subset M \subset L$ , le  $\mathbb{Z}/p$ -espace vectoriel  $X = \phi(pL')$  a bien un sens, et c'est même un  $\mathbb{Z}/p$ -espace vectoriel totalement isotrope de dimension  $r$  dans  $L/pL$ . L'isotropie vient du fait que  $L'$  est entier (donc l'image par  $\phi$  de tous les éléments de  $pL'$  sont isotropes dans  $L/pL$ ), et la dimension vient des isomorphismes évidents :  $X \simeq pL'/(pL \cap pL') \simeq L'/M \simeq A$  (où le dernier isomorphisme provient du fait que  $L$  et  $L'$  sont des  $A$ -voisins).

- Notons que  $M$  et  $X$  satisfont bien à l'égalité  $\phi(M) = X^\perp$ . Comme  $M = L \cap L' \subset L'$  et que  $L'$  est entier, on déduit que :  $(\forall x \in pL')(\forall y \in M) x \cdot y \equiv 0 \pmod{p}$ , et ainsi on a déjà l'inclusion  $\phi(M) \subset X^\perp$ . L'égalité vient alors de l'égalité des dimensions de  $\phi(M)$  et de  $X^\perp$  (vus comme  $\mathbb{Z}/p$ -espaces vectoriels). On a en effet :  $\dim_{\mathbb{Z}/p}\phi(M) = n - r = \dim_{\mathbb{Z}/p}\phi(L) - \dim_{\mathbb{Z}/p}X = \dim_{\mathbb{Z}/p}(X^\perp)$ . L'inclusion  $pL \subset M$  nous permet de dire que  $M$  est bien l'image réciproque de  $X^\perp = \phi(M)$  par  $\phi$ .
- D'après le lemme 2.2.3, les  $\mathbb{Z}/p$ -espaces vectoriels  $I$  et  $I'$  sont deux lagrangiens transverses de rés  $M \simeq H(I)$ . De plus,  $L'$  est entièrement déterminé par le choix de  $M$  et de  $I'$ , puisque  $L'$  est l'image inverse de  $I'$  par l'application  $M^\# \rightarrow \text{rés } M$ .

D'après ce qui précède, l'application  $L' \mapsto (X, I')$  est bien définie et est injective (le réseau  $L \cap L'$  étant l'image inverse de  $X^\perp$  par  $L \rightarrow L/pL$ ). Il ne reste qu'à démontrer la surjectivité de cette application, ce que nous ferons par un argument de cardinalité dans la démonstration de la proposition-définition 2.2.5.

On vérifiera aussi dans la proposition-définition 2.2.5 que cette bijection commute bien aux actions de  $O(L)$ .  $\square$

**Proposition-Définition 2.2.5** (La création des  $p, \dots, p$ -voisins). *Soient  $L$  un réseau de  $\mathcal{L}_n$  et  $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ . Soient  $X$  un espace totalement isotrope de  $L/pL$  de dimension  $r$ , et  $(x_i)$  une base de  $X$ . On considère une famille  $(v_i)$ , avec  $v_i \in L$  et  $v_i \equiv x_i \pmod{pL}$ , qui vérifie :*

$$\begin{cases} v_i \cdot v_i \equiv 0 \pmod{2p^2}, \\ v_i \cdot v_j \equiv 0 \pmod{p^2} \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

Alors le réseau  $L'((v_i)_i)$  défini par :

$$\begin{cases} M = \{v \in L \mid (\forall i)v_i \cdot v \equiv 0 \pmod{p}\}, \\ L'((v_i)_i) = M + \sum_i \mathbb{Z} \frac{v_i}{p}, \end{cases}$$

est un  $A$ -voisin de  $L$  tel que  $M = L \cap L'((v_i)_i)$ . Le réseau  $M$  ne dépend que du choix de  $X$ , et est égal à l'image réciproque de  $X^\perp$  par la projection  $L \rightarrow L/pL$ .

De plus, une fois la famille  $(x_i)$  choisie (et donc une fois le réseau  $M$  fixé), l'ensemble des réseaux  $L'((v_i)_i)$  ainsi obtenus (qui ne dépendent que du choix des relèvements  $(v_i)$ ) décrit l'ensemble des  $A$ -voisins  $L'$  de  $L$  tels que  $L \cap L' = M$ .

Le réseau  $L'((v_i)_i)$  sera appelé le  $p, \dots, p$ -voisin de  $L$  associé à la famille  $(v_i)$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $L'$  est un  $A$ -voisin de  $L$  tel que  $M = L \cap L'$ . Comme la famille  $(x_i)$  est  $\mathbb{Z}/p$ -libre dans  $L/pL$ , on déduit déjà que  $M = L \cap L'$ . Pour la même raison, l'image par  $L' \rightarrow L'/M$  de la famille  $(v_i/p)$  est  $\mathbb{Z}/p$ -libre dans  $L'/M$  : par définition de  $L'$ , c'est une  $\mathbb{Z}/p$ -base de  $L'/M$ , et on déduit que  $L'/M \simeq A$ .

Il faut maintenant montrer que  $L' \in \mathcal{L}_n$ , c'est-à-dire que  $L'$  est pair et que  $\det(L) = \det(L')$ . Le premier point provient des congruences satisfaites par les  $v_i \cdot v_j$  et de la définition de  $M$ . L'égalité  $\det(L) = \det(L')$  vient du fait que l'on a aussi  $L/M \simeq A$ . En effet, comme le produit scalaire est non dégénéré dans  $L/pL$ , on peut trouver une famille  $(u_i)$  d'éléments de  $L$  vérifiant :

$$\begin{cases} u_i \cdot x_i \equiv 1 \pmod{p}, \\ u_i \cdot x_j \equiv 0 \pmod{p} \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

L'image de la famille  $(u_i)$  par  $L \rightarrow L/M$  est une  $\mathbb{Z}/p$ -base de  $L/M$ , et on a bien  $L/M \simeq A$ .

Ainsi,  $L$  et  $L'$  sont bien des  $A$ -voisins qui vérifient  $L \cap L' = M$ .

Montrons maintenant que tous les  $A$ -voisins  $L'$  de  $L$  tels que  $L \cap L' = M$  sont obtenus de cette façon. Cela conclura également la démonstration de la proposition 2.2.4 (ii). Nous savons déjà qu'il y en a au plus autant que de lagrangiens transverses à  $A$  dans  $H(A)$  : cela découle en effet de l'injectivité de l'application  $L' \mapsto (X, I')$  démontrée ci-dessus. Il suffit



donc de construire autant de tels  $A$ -voisins qu'il y a de lagrangiens transverses à  $A$  dans  $H(A)$  pour conclure. On rappelle au passage que ces lagrangiens sont en bijection avec les formes alternées sur  $A$  : il y en a donc autant que de matrices antisymétriques à diagonale nulle de taille  $r \times r$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/p$  (puisque  $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$  ici).

Reprenons les notations de la proposition. Soient  $(v_i)$  et  $(v'_i)$  deux familles avec  $v_i, v'_i \in L$  et  $v_i \equiv v'_i \equiv x_i \pmod{pL}$  qui vérifient les congruences :

$$\begin{cases} v_i \cdot v_i \equiv v'_i \cdot v'_i \equiv 0 \pmod{2p^2}, \\ v_i \cdot v_j \equiv v'_i \cdot v'_j \equiv 0 \pmod{p^2} \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

On pose  $v'_i = v_i + p \cdot w_i$ , avec  $w_i \in L$ . Les  $v'_i$  vérifient les congruences précédentes si, et seulement si, les  $w_i$  vérifient :

$$\begin{cases} w_i \cdot x_i \equiv 0 \pmod{p}, \\ w_i \cdot x_j + w_j \cdot x_i \equiv 0 \pmod{p} \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

Enfin, les réseaux  $L'((v_i)_i)$  et  $L'((v'_i)_i)$  sont égaux si, et seulement si :  $(\forall i) w_i \in M$ , c'est-à-dire si, et seulement si :

$$(\forall i, j) w_i \cdot x_j \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ainsi, la matrice  $(w_i \cdot x_j \pmod{p})_{i,j}$  est une matrice antisymétrique à diagonale nulle. De plus, elle est nulle si, et seulement si, les réseaux  $L'((v_i)_i)$  et  $L'((v'_i)_i)$  sont égaux.

Il reste donc à montrer que toutes les matrices antisymétriques à diagonale nulle de taille  $r \times r$  et à coefficients dans  $\mathbb{Z}/p$  peuvent être ainsi obtenues, ce qui vient du fait que le produit scalaire est non dégénéré dans  $L/pL$ . Au final, on déduit qu'il y a exactement autant de  $A$ -voisins  $L'$  de  $L$  tels que  $L \cap L' = M$  que de lagrangiens de  $H(A)$  transverses à  $A$ .

De même que dans la démonstration de la proposition-définition 2.2.6, il est facile de voir que, pour  $\gamma \in O(L)$ , on a l'égalité :  $\gamma(L'((v_i)_i)) = L'(\gamma(v_i)_i)$ . On en déduit finalement que la bijection entre les  $A$ -voisins de  $L$  et les couples de la forme  $(X, I)$ , où  $X$  est un espace totalement isotrope de  $L/pL$  de dimension  $r$ , et  $I$  un lagrangien de  $H(L/M)$  (avec  $M$  l'image réciproque de  $X^\perp$  par  $L \rightarrow L/pL$ ) commute bien aux actions naturelles de  $O(L)$ .  $\square$

**Proposition-Définition 2.2.6** (La création des  $d$ -voisins). *Soient  $L$  un réseau de  $\mathcal{L}_n$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . Si l'on se donne une droite isotrope  $x \in C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ , on peut lui associer le module  $M$ , image inverse de  $x^\perp$  par l'homomorphisme  $L \rightarrow L/dL$ . Choisissons enfin  $v \in L$ , dont l'image dans  $L/dL$  engendre  $x$ , et tel que  $v \cdot v \equiv 0 \pmod{2d^2}$ . Alors le réseau  $L'(x)$  défini par :*

$$L'(x) = \mathbb{Z} \cdot \frac{v}{d} + M$$

*est un  $d$ -voisin de  $L$  qui ne dépend que du choix de  $x$ .*

*De plus, l'application  $x \mapsto L'(x)$  est une bijection entre  $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  et l'ensemble  $\text{Vois}_d(L)$  des  $d$ -voisins de  $L$ .*

*Démonstration.* La nature bijective de cette application est développée dans [13, Ch. III, §1, Propositions 1.4 et 1.5]. Il suffit de vérifier que cette bijection commute aux actions de  $O(L)$ . Si l'on se donne  $\gamma \in O(L)$ , alors  $\gamma$  conserve l'orthogonalité ainsi que le produit scalaire, et on a les implications suivantes :

$$\begin{cases} M = x^\perp \Rightarrow \gamma(M) = (\gamma(x))^\perp, \\ v \cdot v \equiv 0 \pmod{2d^2} \Rightarrow \gamma(v) \cdot \gamma(v) \equiv 0 \pmod{2d^2}, \\ (\forall p|d) v \notin pL \Rightarrow (\forall p|d) \gamma(v) \notin pL. \end{cases}$$

Ainsi, on a l'égalité :  $\gamma(L'(x)) = L'(\gamma(x))$ .  $\square$

2.2.3. *L'anneau des opérateurs de Hecke associé aux  $A$ -voisins.* On rappelle qu'on désigne ici par  $\mathbb{A}$ -groupe un  $\mathbb{A}$ -schéma en groupes affine et de type fini. On donne ici quelques rappels classiques qui suivent la présentation et les notations de [13, Ch. IV, §2].

**Définition 2.2.7** (L'anneau des opérateurs de Hecke). *Soit  $\Gamma$  un groupe, et soit  $X$  un  $\Gamma$ -ensemble transitif. On définit l'anneau des opérateurs de Hecke de  $X$  comme le sous-anneau  $H(X) \subset \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X])$  des endomorphismes commutant à l'action de  $\Gamma$ .*

**Définition 2.2.8** (L'anneau de Hecke d'un  $\mathbb{Z}$ -groupe). *Soit  $G$  un  $\mathbb{Z}$ -groupe. Si l'on note  $P$  l'ensemble des nombres premiers, on note  $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ , et  $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$  l'anneau des adèles finis de  $\mathbb{Q}$ . On définit alors le  $G(\mathbb{A}_f)$ -ensemble :  $\mathcal{R}(G) = G(\mathbb{A}_f)/G(\widehat{\mathbb{Z}})$ . L'anneau de Hecke de  $G$  est alors défini comme :*

$$H(G) = H(\mathcal{R}(G))$$

où  $G(\mathbb{A}_f)$  joue le rôle de  $\Gamma$  dans la définition précédente.

**Proposition-Définition 2.2.9.** *On considère  $G$  un  $\mathbb{Z}_p$ -groupe, et on garde les notations précédentes. Pour  $p \in P$ , on définit alors le  $G(\mathbb{Q}_p)$ -ensemble :  $\mathcal{R}_p(G) = G(\mathbb{Q}_p)/G(\mathbb{Z}_p)$ . On pose :*

$$H_p(G) = H(\mathcal{R}_p(G))$$

où  $G(\mathbb{Q}_p)$  joue le rôle de  $\Gamma$ .

On a un homomorphisme d'anneaux injectif canonique :  $H_p(G) \rightarrow H(G)$ , et on verra donc simplement  $H_p(G)$  comme un sous-ensemble de  $H(G)$ .

On a alors l'isomorphisme suivant :

$$\bigotimes_{p \in P} H_p(G) \xrightarrow{\sim} H(G).$$

*Démonstration.* Voir [13, Ch. IV, §2.5]. □

On s'intéressera aux cas où  $G$  est le  $\mathbb{Z}$ -groupe  $O_n$  ou  $SO_n$ , définis au paragraphe 2.2. Dans ces cas, les anneaux  $H(G)$  sont décrits en détail dans [13, Ch.IV, §2], et on rappelle ici quelques points importants pour nous.

Fixons  $G$  l'un des deux  $\mathbb{Z}$ -groupes  $O_n$  ou  $SO_n$ . On rappelle que  $G$  a été défini au moyen d'un réseau  $L_0 \in \mathcal{L}_n$ . On vérifie facilement que  $\mathcal{R}(G)$  s'identifie naturellement à l'ensemble  $\{L \in \mathcal{L}_n \mid L \subset L_0 \otimes \mathbb{Q}\}$  (voir [13, Ch. IV, §1.2 et 4.4]).

On montre ensuite que l'application  $G(\mathbb{R}) \times \mathcal{R}(G) \rightarrow \mathcal{L}_n$ ,  $(g, L) \mapsto g^{-1}L$  induit une bijection :

$$G(\mathbb{Q}) \setminus (G(\mathbb{R}) \times \mathcal{R}(G)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_n,$$

d'après [13, Ch. IV, §4.5].

L'action naturelle de  $H(G)$  sur  $\mathbb{Z}[\mathcal{R}(G)]$  induit une action naturelle de  $H(G)$  sur  $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n]$  (par endomorphismes  $G(\mathbb{R})$ -équivariants). Cette action est très concrète. Par exemple, pour tout groupe abélien fini  $A$ , on dispose d'un opérateur  $T_A$  associé à la notion de  $A$ -voisin (voir [13, Ch.IV, §2.6]) :

**Définition 2.2.10** (Les opérateurs de Hecke sur les réseaux). *Soit  $A$  un groupe abélien fini. On dispose d'un opérateur de Hecke  $T_A \in H(O_n)$  associé à  $A$  dont l'action sur  $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n]$  est définie par :*

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n) T_A(L) = \sum_{L' \text{ } A\text{-voisin de } L} L'.$$

De plus, l'inclusion  $SO_n \rightarrow O_n$  identifie canoniquement  $H(O_n)$  à un sous-anneau de  $H(SO_n)$ . L'opérateur  $T_A$  défini ci-dessus peut donc aussi être vu comme un élément de  $H(SO_n)$ .

Si l'on se donne  $f \in \mathcal{M}_W(SO_n)$ , on peut voir  $f$  comme une application  $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n] \rightarrow W$ , donc on peut faire agir à droite l'opérateur de Hecke  $T_A$  sur  $f$ . Il s'agit de l'action de  $T_A$  sur  $\mathcal{M}_W(SO_n)$  donnée en introduction.

### 3. DÉTERMINATION D'UNE FORMULE POUR CALCULER LA TRACE D'UN OPÉRATEUR DE HECKE.

Notre but est de calculer la trace des opérateurs de Hecke  $T_A$  agissant sur l'espace  $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$  des formes automorphes de poids  $W$ , où  $W$  est une représentation irréductible de  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ .

**3.1. La méthode utilisée.** Soient  $n \equiv 0, \pm 1 \pmod{8}$ , et  $W$  une représentation de  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ .

On pose  $L_1, \dots, L_h$  des représentants de chaque classe de  $\widetilde{X}_n$ . Si l'on se donne  $f \in \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ , alors chacun des  $f(L_i)$  est un élément de  $W$  invariant par  $\mathrm{SO}(L_i)$  (où  $\mathrm{SO}(L_i) = \{\gamma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \mid \gamma L_i = L_i\}$ ). Pour  $i = 1, \dots, h$ , on pose  $W^{\mathrm{SO}(L_i)} = \{v \in W \mid (\forall \gamma \in \mathrm{SO}(L_i)) \rho(\gamma)(v) = v\}$  l'espace des éléments de  $W$  stables par l'action de  $\mathrm{SO}(L_i)$ . On dispose d'une application  $\mathbb{C}$ -linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n) &\longrightarrow \prod_{i=1}^h W^{\mathrm{SO}(L_i)} \\ f &\longmapsto (f(L_i))_{i \in \{1, \dots, h\}}. \end{aligned}$$

Le lemme suivant est évident :

**Lemme 3.1.1.** *Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.*

La formule qui sera notre point de départ est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 3.1.2.** *Soient  $n \geq 1$ ,  $(W, \rho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{C}$ , et  $A$  un groupe abélien fini. Pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ , on pose  $\mathrm{vois}_A(L_i)$  l'ensemble des  $A$ -voisins de  $L_i$ , et  $\mathcal{V}_i$  le sous ensemble de  $\mathrm{vois}_A(L_i)$  des  $A$ -voisins de  $L_i$  isomorphes à  $L_i$ . L'ensemble  $\mathcal{V}_i$  est stable pour l'action de  $\mathrm{SO}(L_i)$ . On peut donc écrire  $\mathcal{V}_i$  comme réunion de ses orbites par l'action de  $\mathrm{SO}(L_i)$  :*

$$\mathcal{V}_i = \coprod_{j \in J_i} \mathrm{SO}(L_i) g_{i,j} L_i = \coprod_{j \in J_i} \mathcal{V}_{i,j}$$

où  $g_{i,j} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ , et  $\mathcal{V}_{i,j}$  est l'orbite des  $A$ -voisins de  $L_i$  pour l'action de  $\mathrm{SO}(L_i)$  contenant  $g_{i,j} L_i$ . On a l'égalité :

$$\mathrm{tr}(T_A | \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)) = \sum_{i=1}^h \left( \frac{1}{|\mathrm{SO}(L_i)|} \cdot \left( \sum_{j \in J_i} |\mathcal{V}_{i,j}| \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{SO}(L_i)} \mathrm{tr}(\gamma g_{i,j} | W) \right) \right).$$

*Démonstration.* Soit  $i \in \{1, \dots, h\}$ . On choisit une famille  $\gamma_{i,k}$  d'éléments de  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ , et  $a_{i,k}$  une famille d'éléments de  $\{1, \dots, h\}$  telles que l'on ait l'écriture :

$$\mathrm{vois}_A(L_i) = \{\gamma_{i,k} L_{a_{i,k}} \mid k \in K_i\},$$

où  $K_i$  est un ensemble quelconque de même cardinal que  $\mathrm{vois}_A(L_i)$ . Avec ces notations, notons que l'on a l'égalité :  $\mathcal{V}_i = \{\gamma_{i,k} L_{a_{i,k}} \mid k \in K_i \text{ et } a_{i,k} = i\}$ . Si  $f$  est dans  $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$ , on a alors :

$$T_A(f)(L_i) = \sum_{L \in \mathrm{vois}_A(L_i)} f(L) = \sum_{k \in K_i} f(\gamma_{i,k} \cdot L_{a_{i,k}}) = \sum_{k \in K_i} \rho(\gamma_{i,k}) \cdot f(L_{a_{i,k}}).$$

Pour  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, h\}$ , on définit les endomorphismes :

$$\sum_{\substack{k \in K_{i_1} \\ a_{i_1, k} = i_2}} \rho(\gamma_{i_1, k}) = u_{i_1, i_2} \in \mathrm{End}(W).$$

En particulier,  $u_{i_1, i_2}$  satisfait  $u_{i_1, i_2} \left( W^{\text{SO}(L_{i_1})} \right) \subset W^{\text{SO}(L_{i_2})}$  et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_W(\text{SO}_n) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^h W^{\text{SO}(L_i)} \\ \text{T}_A \downarrow & & \downarrow (u_{i_1, i_2})_{i_1, i_2 \in \{1, \dots, h\}} \\ \mathcal{M}_W(\text{SO}_n) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^h W^{\text{SO}(L_i)} \end{array}$$

Pour  $i \in \{1, \dots, h\}$ , on définit les projecteurs  $p_i \in \text{End}(W)$  par :

$$p_i = \frac{1}{|\text{SO}(L_i)|} \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \rho(\gamma).$$

L'image de  $p_i$  est  $W^{\text{SO}(L_i)}$ , et  $\text{Ker}(p_i)$  en est un supplémentaire dans  $W$ .

Dans le calcul de la trace qui nous intéresse, seuls les termes diagonaux (c'est-à-dire les  $u_{i,i}$ ) interviendront. De plus, ils vérifient les égalités :

$$\begin{cases} (u_{i,i} \circ p_i)|_{W^{\text{SO}(L_i)}} = u_{i,i}|_{W^{\text{SO}(L_i)}} \\ (u_{i,i} \circ p_i)|_{\text{Ker}(p_i)} = 0 \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\text{tr}(u_{i,i}|_{W^{\text{SO}(L_i)}}) = \text{tr}(u_{i,i} \circ p_i|_W) = \text{tr}(p_i \circ u_{i,i}|_W).$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{T}_A|_{\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)}) &= \text{tr} \left( (u_{i_1, i_2})_{i_1, i_2 \in \{1, \dots, h\}} \Big| \prod_{i=1}^h W^{\text{SO}(L_i)} \right) = \sum_{i=1}^h \text{tr} \left( u_{i,i}|_{W^{\text{SO}(L_i)}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^h \text{tr} (p_i \circ u_{i,i}|_W) = \sum_{i=1}^h \left( \frac{1}{|\text{SO}(L_i)|} \cdot \left( \sum_{\substack{k \in K_i \\ a_{i,k}=i}} \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \text{tr}(\gamma \cdot \gamma_{i,k}|_W) \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^h \left( \frac{1}{|\text{SO}(L_i)|} \cdot \left( \sum_{j \in J_i} |\mathcal{V}_{i,j}| \cdot \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \text{tr}(\gamma \cdot g_{i,j}|_W) \right) \right). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de la constatation suivante. Si on se donne  $j \in J_i$ , et  $L'_1, L'_2 \in \mathcal{V}_{i,j}$  tels que  $L'_1 = g_1 L_i$  et  $L'_2 = g_2 L_i$ , alors on a l'égalité :  $\sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \text{tr}(\gamma \cdot g_1|_W) = \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \text{tr}(\gamma \cdot g_2|_W)$ .

D'où finalement le résultat cherché.  $\square$

Après que ce travail a été effectué, Lassina Dembélé nous a fait remarqué qu'une formule comparable avait déjà été obtenue par Neil Dummigan dans l'article [19].

On peut regarder ce que devient cette formule lorsque  $A$  est trivial (c'est-à-dire lorsque  $\text{T}_A$  est l'identité). Dans ce cas, pour tout  $i$ , on a l'égalité  $\text{vois}_A(L_i) = \{L_i\} = \mathcal{V}_i$ , et la formule précédente devient :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Id}|_{\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)}) &= \sum_{i=1}^h \left( \frac{1}{|\text{SO}(L_i)|} \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \text{tr}(\gamma|_W) \right) \\ &= \sum_{i=1}^h \dim \left( W^{\text{SO}(L_i)} \right) = \dim \left( \mathcal{M}_W(\text{SO}_n) \right), \end{aligned}$$

où les égalités  $\dim(W^{\text{SO}(L_i)}) = \frac{1}{|\text{SO}(L_i)|} \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \text{tr}(\gamma|W)$  sont des résultats classiques.

Lorsque  $h = 1$ , c'est-à-dire lorsque  $n = 7, 8, 9$ , on retrouve la proposition 1.0.1 de l'introduction. Si l'on suppose de plus que  $A$  est de la forme  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , on a le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1.3.** *On suppose que  $\widetilde{X}_n$  est réduit à un élément. Soient  $(W, \rho)$  une représentation de  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ ,  $q$  une puissance d'un nombre premier  $p$ ,  $A = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , et  $L_0$  un élément de  $\mathcal{L}_n$ . On considère la quadrique projective  $C = C_{L_0}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ . On rappelle qu'il existe une bijection entre  $\text{vois}_A(L_0)$  et  $C$  qui commute aux actions de  $\text{SO}(L_0)$  (voir proposition-définition 2.2.6). Pour tout élément  $x \in C$ , on associe le  $q$ -voisin  $L_x$  (d'après la méthode expliquée en proposition-définition 2.2.6), que l'on écrit  $L_x = g_x \cdot L_0$ , où  $g_x \in \text{SO}_n(\mathbb{Q})$ .*

*Le groupe spécial orthogonal  $\text{SO}(L_0)$  agit sur  $C$ . On considère  $Y$  un système de représentants des orbites de  $C$  pour l'action de  $\text{SO}(L_0)$ , et pour  $y \in Y$  on note  $\Omega_y$  l'orbite associée. Alors :*

$$\text{tr}(T_q|\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)) = \frac{1}{|\text{SO}(L_0)|} \cdot \left( \sum_{y \in Y} |\Omega_y| \cdot \sum_{\gamma \in \text{SO}(L_i)} \text{tr}(\gamma g_y|W) \right).$$

Les corollaires précédents réduisent le calcul de  $\text{tr}(T_A|\mathcal{M}_W(\text{SO}_n))$  aux calculs des quantités suivantes :

- $\text{tr}(g|W)$ , où  $g \in \text{SO}_n(\mathbb{Q})$  et  $W$  une représentation irréductible de  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ , ce qui fait l'objet du paragraphe 3.2.
- les orbites de  $\text{vois}_A(L_i)$  pour l'action de  $\text{SO}(L_i)$  (dont il suffit de connaître un représentant et le cardinal), ce qui fait l'objet des chapitres 4 et 5.

**3.2. Les poids dominants et la formule des caractères de Weyl.** On reprend ici le raisonnement fait dans [12, Ch. 1] pour exprimer la version dégénérée de la formule des caractères de Weyl. Rappelons quelques notations utilisées dans cette référence.

On se donne  $n \geq 1$  et note  $G$  le groupe de Lie semi-simple connexe  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ , et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. On pose pour simplifier  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ . On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire usuel, que l'on décompose en somme orthogonale :

$$\mathbb{R}^n = \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^m P_i & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \bigoplus_{i=1}^m P_i \oplus D & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

où les  $P_i$  sont des plans deux-à-deux orthogonaux de  $\mathbb{R}^n$  fixés, et  $D$  est l'unique droite orthogonale à tous les  $P_i$  lorsque  $n$  est impair.

On définit le tore maximal  $T \subset G$  comme :

$$T = \begin{cases} \{g \in G \mid (\forall i) g(P_i) \subset P_i \text{ et } \det(g|_{P_i}) = 1\} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \{g \in G \mid (\forall i) g(P_i) \subset P_i, \det(g|_{P_i}) = 1 \text{ et } \det(g|_D) = 1\} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

de telle sorte qu'on a un isomorphisme naturel  $T \xrightarrow{\sim} \prod_i \text{SO}(P_i)$ . Fixons une fois pour toute des isomorphismes  $\text{SO}(L_i) \simeq \mathbb{S}^1$ , et donc l'isomorphisme  $T \simeq (\mathbb{S}^1)^m$ . On note  $(t_1, \dots, t_m)$  les éléments de  $T$ , pour  $t_i \in \mathbb{S}^1$ .

On note  $\Phi$  le système de racines de  $(G, T)$ , et  $\mathcal{W}$  son groupe de Weyl. Par définition,  $\Phi$  est un système de racines dans  $X \otimes \mathbb{R}$ , où  $X$  désigne le groupe abélien libre des morphismes continus de groupe  $T \rightarrow \mathbb{S}^1$ . On rappelle que  $\Phi$  est le sous-ensemble de  $X^*(T)$  constitué des caractères non triviaux de  $T$  intervenant dans  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . On note de plus  $\Phi^+ \subset \Phi$  un système de racines positives. Selon la parité de  $n$ , les ensembles  $\Phi, \Phi^+$  peuvent être choisis comme étant les sous-ensemble suivants de  $\mathbb{R}^m$  (muni de sa base canonique  $(e_i)_i$ ) :

- si  $n$  est pair :  $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$ ,  $\Phi^+ = \{e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$ , et  $\mathcal{W} = \mathcal{S}_m \times (\{\pm 1\}^m)^0$  (où  $\mathcal{S}_m$  désigne le groupe des permutations d'un ensemble à  $m$  éléments, et  $(\{\pm 1\}^m)^0$  le sous-groupe des éléments  $(\varepsilon_i) \in \{\pm 1\}^m$  tels que  $\prod \varepsilon_i = 1$ );
- si  $n$  est impair :  $\Phi = \{\pm e_i\}_{1 \leq i \leq m} \cup \{\pm e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$ ,  $\Phi^+ = \{e_i\}_{1 \leq i \leq m} \cup \{e_i \pm e_j\}_{1 \leq i < j \leq m}$ , et  $\mathcal{W} = \mathcal{S}_m \times \{\pm 1\}^m$ .

On fixe un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  sur  $X \otimes \mathbb{R}$  invariant par  $\mathcal{W}$ . Un poids dominant de  $G$  est un élément  $\lambda \in X$  tel que  $(\lambda, \alpha) \geq 0$  pour tout élément  $\alpha \in \Phi^+$ . La théorie de Cartan–Weyl définit une bijection canonique  $\lambda \mapsto V_\lambda$  entre les poids dominants de  $G$  et les représentations irréductibles de  $G$  à isomorphisme près. Le poids dominant  $\lambda$  est appelé le plus haut poids de  $V_\lambda$ . Si  $\lambda \in X$  et  $i \in T$ , on pose  $t^\lambda = \lambda(t)$ .

Enfin, pour  $t \in T$ , on note  $M = C_G(t)^0$  la composante neutre du centralisateur de  $t$  dans  $G$  (en particulier,  $T$  est un tore maximal dans  $M$ , et  $t \in M$ ). On associe à  $M$  les sous-ensembles de  $\Phi^+$  et de  $\mathcal{W}$  suivants :

$$\begin{aligned}\Phi_M^+ &= \{\alpha \in \Phi^+ | t^\alpha = 1\}, \\ \mathcal{W}^M &= \{w \in \mathcal{W} | w^{-1}(\Phi_M^+) \subset \Phi^+\}.\end{aligned}$$

On note  $\rho$  et  $\rho_M$  la demi-somme respectivement des éléments de  $\Phi^+$  et de  $\Phi_M^+$ . On définit enfin pour  $v \in X \otimes \mathbb{R}$  :

$$P_M(v) = \prod_{\alpha \in \Phi_M^+} \frac{(\alpha, v + \rho_M)}{(\alpha, \rho_M)}.$$

On a la proposition suivante d'après [12, Ch. 1, Proposition 1.9] :

**Proposition 3.2.1** (Version dégénérée de la formule des caractères de Weyl). *Soient  $\lambda \in X$  un poids dominant,  $t \in T$  et  $M = C_G(t)^0$ . Alors le caractère de  $t$  sur la représentation  $V_\lambda$  de plus haut poids  $\lambda$  est donné par :*

$$\chi_{V_\lambda}(t) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}^M} \varepsilon(w) \cdot t^{w(\lambda + \rho) - \rho} \cdot P_M(w(\lambda + \rho) - \rho_M)}{\prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_M^+} (1 - t^{-\alpha})}$$

où  $\varepsilon : \mathcal{W} \rightarrow \{\pm 1\}$  désigne la signature sur le groupe  $\mathcal{W}$ .

Pour terminer ce paragraphe, expliquons comment utiliser concrètement cette formule pour l'application au calcul des quantités  $\text{tr}(g|W)$ , qui est fondamental pour calculer la trace de  $T_A$  (suivant les résultats du paragraphe 3.1). La question que l'on se pose est la suivante : si l'on se donne  $g \in \text{SO}_n(\mathbb{Q})$ , comment trouver  $t \in T$  conjugué à  $g$  dans  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ .

On calcule le déterminant  $\det(X\text{Id} - g)$ , qui est de la forme :

$$(X - 1)^{n-2m} \cdot \prod_{i=1}^m (X - t_i)(X - \bar{t}_i),$$

et on pose  $t = (t_1, \dots, t_m) \in T$ .

Si  $n$  est impair,  $g$  est conjugué à  $t$ , et le problème est résolu : il suffit de déterminer des  $t_i$  satisfaisant l'égalité précédente. C'est encore vrai si  $n$  est pair et que l'un des  $t_i$  vaut  $\pm 1$ .

En revanche, dans le cas général, on a seulement que  $g$  est conjugué dans  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  à  $t$  ou à  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{m-1}, \bar{t}_m)$ . On a la relation :  $\text{tr}(\bar{t}|W) = \text{tr}(t|W^c)$ , où la représentation  $(\rho^c, W^c)$  est définie par  $(g \mapsto \rho(cgc^{-1}), W)$ , pour  $c \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbb{R})$ . En terme de plus hauts poids, on a :  $V_\lambda^c = V_{\bar{\lambda}}$ , où  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, -\lambda_m)$  si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

On peut donc calculer pour tout  $g \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  la quantité :  $\text{tr}(g|V_\lambda) + \text{tr}(g|V_\lambda^c)$ , et donc  $\text{tr}(T_A|\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)) + \text{tr}(T_A|\mathcal{M}_{W^c}(\text{SO}_n))$ .

Le lemme suivant montre qu'on a l'égalité :  $\text{tr}(T_A|\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)) = \text{tr}(T_A|\mathcal{M}_{W^c}(\text{SO}_n))$ , et donc  $\text{tr}(T_A|\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)) = \frac{\text{tr}(T_A|\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)) + \text{tr}(T_A|\mathcal{M}_{W^c}(\text{SO}_n))}{2}$ .

**Lemme 3.2.2.** *Soient  $s \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbb{R})$ , et  $W$  une représentation de  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ . L'application  $f \mapsto (L \mapsto f(s(L)))$  induit une bijection  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\mathcal{M}_W(\text{SO}_n) \rightarrow \mathcal{M}_{W^s}(\text{SO}_n)$ . Cette bijection commute à l'opérateur de Hecke  $T_A$  pour tout  $A$ .*



*Démonstration.* Pour simplifier, on note  $\varphi$  l'application définie par  $\varphi(L) = f(s(L))$ . Pour tout  $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$\varphi(gL) = f(sgL) = f(sgs^{-1} \cdot sL) = \rho^s(g)\varphi(L).$$

L'application introduite dans le lemme est donc bien une application  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_n)$  dans  $\mathcal{M}_{W^s}(\mathrm{SO}_n)$ . Elle est évidemment bijective, de réciproque  $f \mapsto (L \mapsto f(s^{-1}L))$ .

On voit dans la définition des  $A$ -voisins que :  $s(\mathrm{vois}_A(L)) = \mathrm{vois}_A(s(L))$ , ce qui conclut que l'application précédente commute bien à l'opérateur  $T_A$ .  $\square$

#### 4. ALGORITHMES DE CALCULS ET RÉSULTATS POUR $p$ IMPAIR.

Soient  $L$  un réseau pair de  $\mathbb{R}^n$ ,  $R = R(L)$  son ensemble de racines, et  $W$  son groupe de Weyl. Pour les réseaux étudiés dans cette partie (à savoir  $E_7$ ,  $E_8$  et  $E_8 \oplus A_1$ ),  $R$  est un système de racines qui engendre  $\mathbb{Z}$ -linéairement le réseau  $L$ , et le groupe  $W$  est égal au groupe  $O(L)$  (d'après la proposition 2.1.5). On note  $W^+ = \mathrm{SO}(L)$  le sous-groupe de  $W$  des éléments de déterminant 1.

On désigne par  $q$  la puissance d'un nombre premier  $p$  (dont la parité sera précisée lorsque cela sera nécessaire).

**4.1. Présentation des algorithmes de calculs.** Les algorithmes que l'on construit ci-dessous ont trois objectifs :

- (i) Donner une description facile à manipuler du groupe de Weyl  $W$ .
- (ii) Regrouper les orbites de  $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action du groupe  $W^+$ , et pour chaque orbite donner un représentant et le cardinal de l'orbite.
- (iii) Pour chaque représentant d'une orbite trouvée à l'étape (ii), expliciter le  $q$ -voisin associé  $L'$  et une transformation  $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $L' = g(L)$ .

Les parties (i) et (iii) sont utilisées aussi bien pour le cas où  $p = 2$  que pour le cas où  $p$  est impair. La partie (ii) n'est utilisée que pour le cas où  $p$  est impair (et on détaille au chapitre 5 le cas où  $p = 2$ ).

#### 4.2. La création du groupe de Weyl.

**4.2.1. Principe utilisé.** On souhaite pouvoir utiliser dans nos algorithmes le groupe de Weyl de  $R$ . On cherche un moyen de parcourir tout le groupe  $W$  rapidement et sans avoir à allouer une mémoire trop conséquente.

On suppose donné l'ensemble  $R$  des racines du réseau  $L$ , ainsi qu'un système de racines simples  $(v_1, \dots, v_n)$ . On associe à ces racines simples les réflexions  $(s_1, \dots, s_n)$ , la chambre de Weyl  $C$  dont les murs sont les hyperplans laissés stables par un des  $s_i$ ,  $\rho$  un élément quelconque de  $C$ , et  $l : W \rightarrow \mathbb{N}$  la longueur associée à ces racines simples. Le groupe  $W$  est engendré par les réflexions  $s_i$ , et on suppose connu le cardinal de  $W$ .

On suppose aussi que l'on possède un sous-groupe  $W'$  de  $W$ , dont les éléments sont faciles à expliciter, et dont on connaît le cardinal. Pour tout élément  $w \in W$ , on définit son image dans le quotient  $W' \backslash W$  comme l'ensemble :  $\overline{w} = \{\gamma \circ w \mid \gamma \in W'\}$ . On suppose qu'il existe une fonction  $\Phi_n$  suffisamment simple au sens algorithmique, définie sur  $W$  et à valeurs dans un ensemble que l'on précisera, telle que :

$$(\forall w_1, w_2 \in W) \overline{w_1} = \overline{w_2} \Leftrightarrow \Phi_n(w_1) = \Phi_n(w_2).$$

L'algorithme expliqué ci-dessous nous donne un ensemble  $H_n$  de représentants du quotient  $W' \backslash W$  (le cardinal de  $H_n$  étant connu, avec :  $|H_n| = |W|/|W'|$ ). L'objectif final est de pouvoir écrire les éléments de  $W$  sous la forme  $w \circ h$ , pour  $w \in W'$  et  $h \in H_n$ .

#### Description de l'algorithme :

Pour créer notre ensemble  $H_n$ , on va construire une suite d'ensembles  $(S_i)$  avec  $\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_r = H_n$ , avec  $|S_i| = i$ , et donc  $r = |H_n| = |W|/|W'|$ . La construction des  $S_i$  se

fait récursivement. On suppose que l'on a déjà construit l'ensemble  $S_i$  (avec  $0 \leq i \leq r-1$ ), et on parcourt le groupe  $W$  en commençant par les éléments de plus petites longueurs. Pour chaque élément  $w$  parcouru par notre algorithme, on regarde son image  $\bar{w} \in W' \setminus W$  :

- si  $\bar{w} \in \{\bar{h} \mid h \in S_i\}$  (c'est-à-dire si  $\Phi_n(w) \in \{\Phi_n(h) \mid h \in S_i\}$ ) : on passe à l'élément suivant dans  $W$ .
- si  $\bar{w} \notin \{\bar{h} \mid h \in S_i\}$  (c'est-à-dire si  $\Phi_n(w) \notin \{\Phi_n(h) \mid h \in S_i\}$ ) : on pose  $S_{i+1} = S_i \cup \{w\}$ .

On arrête notre algorithme lorsque l'on a construit l'ensemble  $S_r$ , et on pose  $H_n = S_r$ . L'ensemble  $H_n$  ainsi créé correspond à l'ensemble des représentants de  $W' \setminus W$  de plus petites longueurs.

Notre seul problème est donc de parcourir  $W$ . Pour cela, on pose pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :  $W_j = \{w \in W \mid l(w) = j\}$ . On connaît déjà les ensembles  $W_0$  et  $W_1$  (qui correspondent respectivement à  $\{\text{id}\}$  et à  $\{s_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ). On détermine récursivement tous les ensembles  $W_i$  grâce à l'application :

$$\begin{aligned} W_j \times W_1 &\rightarrow W_{j-1} \cup W_{j+1} \\ (w, s_i) &\mapsto s_i \circ w \end{aligned}$$

dont l'image contient  $W_{j+1}$ . Pour savoir si l'image d'un élément est bien dans  $W_{j+1}$ , on utilise le lemme suivant (conséquence immédiate de [8, Ch. V, §3, Théorème 1 (ii)]) :

**Lemme 4.2.1.** *Soient  $j \in \mathbb{N}$ ,  $w \in W_j$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors on a l'équivalence :*

$$l(s_i \circ w) = j + 1 \Leftrightarrow (v_i \cdot w(\rho)) \cdot (v_i \cdot \rho) \geq 0.$$

Un élément de  $W_{j+1}$  peut s'écrire de différentes manières sous la forme  $s \circ w$  (avec  $s \in W_1$  et  $w \in W_j$ ). Afin de ne pas parcourir plusieurs fois le même élément de  $W_{j+1}$ , on utilise la proposition 2.1.4 :

$$(\forall w_1, w_2 \in W_j)(\forall s_{i_1}, s_{i_2} \in W_1) s_{i_1} \circ w_1 = s_{i_2} \circ w_2 \Leftrightarrow s_{i_1} \circ w_1(\rho) = s_{i_2} \circ w_2(\rho).$$

Concrètement, si on écrit les éléments  $w$  de  $W_j$  sous la forme  $w = s_{a_j} \circ \dots \circ s_{a_1}$  pour  $a = (a_1, \dots, a_j) \in \{1, \dots, n\}^j$ , alors on gardera seulement l'écriture où  $a$  est le plus petit pour l'ordre lexicographique.

Afin de ne pas surcharger la mémoire allouée, et de limiter les calculs, on représentera tout élément  $w \in W_j$  sous la forme d'un couple  $(a, v)$ , où  $a$  est de forme énoncée ci-dessus, et  $v = w(\rho) \in \mathbb{R}^n$ .

On détaille cette méthode dans le cas de  $E_7$  et de  $E_8$  pour aider à mieux comprendre.

**4.2.2. Le cas de  $E_7$ .** Dans la description faite de  $E_7$  au paragraphe 2.1, on constate que l'on a l'inclusion  $A_7 \subset E_7$ . Le groupe des permutations  $\mathcal{S}_8$  agit sur  $A_7$  et sur  $E_7$  par permutation des coordonnées. On a en fait  $O(A_7) = \{\pm \text{id}\} \times \mathcal{S}_8$ .

On note  $W' = \{\pm \text{id}\} \times \mathcal{S}_8 = O(A_7) \subset W$ . L'ensemble  $W' \setminus W$  possède  $|W|/(2 \cdot 8!) = 36$  éléments (comme  $|W| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ , d'après [8, Planche VI] par exemple). Le système de racines simples que l'on choisit est donné par les  $v_i$  avec :

$$\begin{cases} v_1 = 1/2 \cdot (-1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1) \\ v_2 = 1/2 \cdot (-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1) \\ v_3 = 1/2 \cdot (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1) \\ v_4 = 1/2 \cdot (1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1) \\ v_5 = 1/2 \cdot (-1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) \\ v_6 = 1/2 \cdot (1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1) \\ v_7 = 1/2 \cdot (-1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1) \end{cases}$$

L'élément  $\rho$  que l'on fixe est la demi-somme des racines positives associé à ce système de racines simples, et est donné par :

$$2 \rho = (29, 21, 13, 5, -3, -11, -19, -35).$$

Il est par exemple facile de vérifier que  $\rho$  est bien un élément de la chambre  $C$ , en vérifiant que le produit scalaire de  $\rho$  avec chacun des  $v_i$  est strictement positif.

La fonction  $\Phi_7$  que l'on va utiliser est donnée par la proposition-définition évidente suivante :

**Proposition-Définition 4.2.2.** *Soit  $E$  l'ensemble des multi ensembles de  $\mathbb{R}$ . On définit la fonction  $\phi_7 : \mathbb{R}^8 \rightarrow E$  par :*

$$\phi_7((v_1, \dots, v_8)) = \{\{v_1, \dots, v_8\}\},$$

où la notation  $\{\{\dots\}\}$  désigne ici un multi ensemble.

Si on se donne  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^8$ , on a l'équivalence :

$$\{w(v_1) \mid w \in W'\} = \{w(v_2) \mid w \in W'\} \Leftrightarrow \phi_7(\pm v_1) = \phi_7(\pm v_2).$$

Ainsi, la fonction  $\Phi_7 : W \rightarrow \{\{e_1, e_2\} \mid e_1, e_2 \in E\}$  donnée par :

$$\Phi_7(w) = \{\phi_7(w(\rho)), \phi_7(-w(\rho))\}$$

vérifie l'équivalence :

$$(\forall w_1, w_2 \in W) \overline{w_1} = \overline{w_2} \Leftrightarrow \Phi_7(w_1) = \Phi_7(w_2).$$

Notons  $s_1, \dots, s_7$  les symétries orthogonales associées à  $v_1, \dots, v_7$ . On note  $[i_1, \dots, i_j]$  l'élément  $s_{i_j} \circ \dots \circ s_{i_1}$  (avec la notation  $[ ]$  pour id). Alors notre algorithme donne pour  $H_7$  l'ensemble :

$$\begin{aligned} & \{[ ], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [1, 2], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [2, 3], [2, 6], [3, 5], [3, 6], [3, 7], [4, 6], \\ & [4, 7], [1, 2, 6], [1, 4, 6], [1, 4, 7], [2, 3, 6], [3, 1, 4], [4, 2, 3], [4, 3, 5], [5, 4, 6], [1, 5, 4, 6], [3, 1, 4, 6], \\ & [3, 1, 4, 7], [4, 2, 3, 6], [3, 1, 5, 4, 6], [5, 4, 2, 3, 6], [4, 3, 1, 5, 4, 6], [2, 4, 3, 1, 5, 4, 6] \} \end{aligned}$$

Dans la suite, lorsque l'on utilisera le groupe  $W(E_7)$ , on écrira ses éléments grâce à la bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_8 \times \{\pm \text{id}\} \times H_7 & \xrightarrow{\sim} W \\ (\sigma, \varepsilon, h) & \mapsto \sigma \circ \varepsilon \circ h. \end{aligned}$$

**4.2.3. Le cas de  $E_8$ .** Dans la description de  $E_8$  faite au paragraphe 2.1, on constate que l'on a l'inclusion  $D_8 \subset E_8$ . Le groupe  $\mathcal{S}_8$  agit sur  $D_8$  et sur  $E_8$  par permutation des coordonnées. On a :  $W(D_8) = \mathcal{S}_8 \times (\{\pm 1\}^8)^0$ , où  $(\{\pm 1\}^8)^0$  désigne le groupe de matrices diagonales de  $M_8(\mathbb{Z})$  de déterminant 1.

On note  $W' = \mathcal{S}_8 \times (\{\pm 1\}^8)^0 = W(D_8) \subset W$ . L'ensemble  $W' \setminus W$  possède  $|W|/(2^7 \cdot 8!) = 135$  éléments (comme  $|W| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ , d'après [8, Planche VII] par exemple). On pose enfin  $W'' = \mathcal{S}_8 \times \{\pm 1\}^8 = O(D_8) \supset W'$ . Le système de racines simples que l'on choisit est donné par les  $v_i$  avec :

- les  $v_i$  pour  $i = 1, \dots, 7$  sont les mêmes que pour  $E_7$ ,
- le vecteur  $v_8$  est :  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ .

L'élément  $\rho$  choisi est encore la demi-somme des racines positives, et est donné par :

$$2\rho = (29, 25, 21, 17, 13, 9, 5, -3).$$

On prendra garde au fait que :  $W'' \not\subset W$ . Si on voit  $W$  comme un sous-ensemble de  $O(V)$ , alors les groupes  $W'$  et  $W''$  ont une action bien définie sur  $W$  par composition à gauche. L'action de  $W''$  est cependant plus facile à comprendre que celle de  $W'$ , et le lemme suivant est évident légitime le choix de  $W''$  :

**Lemme 4.2.3.** *Soient  $w_1, w_2 \in W$ . On a l'équivalence :*

$$W' \cdot w_1 = W' \cdot w_2 \Leftrightarrow W'' \cdot w_1 = W'' \cdot w_2.$$

La fonction  $\Phi_8$  que l'on va utiliser est donnée par la proposition-définition suivante :

**Proposition-Définition 4.2.4.** Soit  $E$  l'ensemble des multi ensembles de  $\mathbb{R}$ . On définit la fonction  $\phi_8 : \mathbb{R}^8 \rightarrow E$  par :

$$\phi_8((v_1, \dots, v_8)) = \{\{v_1^2, \dots, v_8^2\}\}.$$

Si on se donne  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^8$ , on a l'équivalence :

$$\{\gamma(v_1) \mid \gamma \in W''\} = \{\gamma(v_2) \mid \gamma \in W''\} \Leftrightarrow \phi_8(v_1) = \phi_8(v_2).$$

Ainsi, la fonction  $\Phi_8 : W \rightarrow E$  donnée par :

$$\Phi_8(w) = \phi_8(w(\rho))$$

vérifie l'équivalence :

$$(\forall w_1, w_2 \in W) \overline{w_1} = \overline{w_2} \Leftrightarrow \Phi_8(w_1) = \Phi_8(w_2).$$

Comme pour  $E_7$ , on arrive ainsi à construire l'ensemble  $H_8$  qui nous intéresse. Dans la suite, lorsque l'on utilisera le groupe  $W(E_8)$ , on écrira ses éléments grâce à la bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_8 \times (\{\pm 1\}^8)^0 \times H_8 & \xrightarrow{\sim} & W \\ (\sigma, \varepsilon, h) & \mapsto & \sigma \circ \varepsilon \circ h \end{array}$$

### 4.3. La détermination des orbites de $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ par l'action du groupe de Weyl $W$ et par $W^+$ pour $q$ une puissance de $p$ premier impair.

4.3.1. *Méthode utilisée.* On reprend les notations du corollaire 3.1.3. Soient  $n = 7, 8$  ou  $9$ ,  $L \in \mathcal{L}_n$ ,  $q$  une puissance d'un nombre premier  $p$  impair,  $C = C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ , et  $R$  l'ensemble des racines de  $L$  (qui est un système de racines de  $\mathbb{R}^n$ ). On note  $W$  le groupe de Weyl de  $R$ , et  $W'$  un sous-groupe bien choisi de  $W$  (que l'on précisera à chaque cas).

Notre algorithme effectue les étapes suivantes :

**Première étape :** on cherche les orbites de  $C$  par l'action de  $W'$ . On donne pour chaque orbite un représentant ainsi que le cardinal de l'orbite.

**Deuxième étape :** on rappelle que l'on connaît le sous-ensemble  $H_n \subset W$  des représentants de  $W' \setminus W$  de plus petites longueurs. On cherche les orbites de  $C$  pour l'action de  $W$  en faisant agir  $H_n$  sur les représentants des orbites de  $C$  pour l'action de  $W'$  choisis à la première étape. On donne pour chaque orbite un représentant et son cardinal.

**Troisième étape :** on cherche les orbites de  $C$  pour l'action de  $W^+$ . Ces orbites sont obtenues grâce aux orbites trouvées à la deuxième étape. Notons que cette étape n'a d'intérêt que pour  $n = 8$ . En effet, pour  $n = 7$  ou  $9$ , l'élément  $-\text{id}$  est un élément de  $W \setminus W^+$  qui a une action triviale sur  $C$ .

On présente en détail ces étapes dans les cas où  $8$ , et on se contente de donner quelques résultats lorsque  $n = 7$  ou  $9$ . Dans ces cas, le réseau  $L$  désignera respectivement les réseaux  $E_7$ ,  $E_8$  et  $E_8 \oplus A_1$ .

Dans la suite, si on se donne  $\Gamma$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$ , on note pour  $x \in X$  l'orbite  $\mathcal{O}_\Gamma(x)$  de l'élément  $x$  sous l'action de  $\Gamma$ .

On fixe enfin  $p$  un nombre premier impair, et on note par  $q$  une puissance de  $p$ .

4.3.2. *Le cas de  $E_8$ .* **Première étape :** On reprend la définition de  $E_8$  donnée au paragraphe 2.1. Comme  $q$  est impair, il est premier à  $|E_8/D_8| = 2$ . Ainsi, l'inclusion naturelle  $D_8 \rightarrow E_8$  induit une bijection  $D_8/qD_8 \xrightarrow{\sim} E_8/qE_8$ . Au final, la quadrique  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  s'identifie à l'ensemble des  $\mathbb{Z}/q$ -droites  $\mathbb{Z}/q \cdot (x_1, \dots, x_8)$  de  $(\mathbb{Z}/q)^8$  vérifiant :  $\sum x_i^2 = 0$ .

Par construction, cette identification commute aux actions des groupes orthogonaux considérés. Cependant, l'action de  $W' = \mathcal{S}_8 \times (\{\pm 1\}^8)^0$  n'est pas agréable. On considère plutôt le groupe  $W'' = \mathcal{S}_8 \times \{\pm 1\}^8$ , dont l'action est bien définie. On a notamment les lemmes suivants, dont la vérification est évidente :

**Lemme 4.3.1.** Soit  $x \in C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ . Alors l'orbite de  $x$  par l'action de  $W''$  possède un élément  $x' = \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v)$  pour  $v \in E_8$ , où  $v = (v_1, \dots, v_8)$  vérifie :

- (i)  $v_i \in \{0, \dots, (q-1)/2\}$
- (ii)  $v_1 \leq \dots \leq v_8$
- (iii)  $\inf\{v_i \mid v_i > 0\} = 1$

Pour savoir si deux droites de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  correspondent à une même orbite pour l'action de  $W''$ , on utilise le lemme suivant dont la vérification est laissée au lecteur :

**Lemme 4.3.2.** Soient  $x, x' \in C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ , et  $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$  des générateurs de  $x$  et  $x'$ . Alors  $x$  et  $x'$  sont dans la même orbite de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W''$  si, et seulement si :

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{v'})$$

où  $\phi_8$  est la fonction introduite au paragraphe précédent, et où on a noté par  $\bar{v}$  l'unique élément de  $\{\frac{1-q}{2}, \dots, \frac{q-1}{2}\}^8$  ayant même image que  $v$  par le passage au quotient :  $\mathbb{Z}^8 \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ .

On aura ainsi pour chaque orbite pour l'action de  $W''$  un représentant. Le cardinal de l'orbite est donné par le lemme suivant :

**Lemme 4.3.3.** Soit  $x \in C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  une droite isotrope, et  $v = (v_1, \dots, v_8)$  un générateur de  $x$ . Alors le cardinal de l'orbite de  $x$  par l'action de  $W''$  est donné par :

$$\text{card}(\mathcal{O}_{W''}(x)) = \frac{2^{8-|\{j \in \{1, \dots, 8\} \mid v_j=0\}|} \cdot 8!}{|\{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{v})\}| \cdot \prod_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j \in \{1, \dots, 8\} \mid v_j = i\}|!)}$$

Enfin, le lien entre les orbites de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour les actions de  $W''$  et de  $W'$  est donné par le lemme suivant :

**Lemme 4.3.4.** On définit la fonction  $\text{signe}_q : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  par :

$$\text{signe}_q(v_1, \dots, v_8) = \prod_{i=1}^8 \varepsilon_i,$$

avec :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \in \{(q+1)/2, \dots, q-1\}. \\ 0 & \text{si } v_i = 0. \\ 1 & \text{si } v_i \in \{1, \dots, (q-1)/2\}. \end{cases}$$

Alors si  $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$  vérifient  $\mathcal{O}_{W''}(v) = \mathcal{O}_{W''}(v')$ , on a l'équivalence :

$$\mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v') \Leftrightarrow \text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v').$$

*Démonstration.* Soient  $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ . On suppose pour simplifier que les images des coordonnées de  $v$  et de  $v'$  dans  $\{0, \dots, q-1\}^8$  sont rangées par ordre croissant (ce qui ne change rien à la généralité du problème, comme  $\mathcal{S}_8 \subset W' \subset W''$ ).

On constate que la fonction  $\text{signe}_q$  est invariante par l'action de  $W'$  ce qui donne déjà l'implication :

$$\mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v') \Rightarrow \text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v').$$

En reprenant l'élément  $d$  introduit à la démonstration du lemme 4.2.3, on utilise l'écriture  $W'' = W' \cup (W' \circ d)$  et l'égalité  $\text{signe}_q(d(v)) = -\text{signe}_q(v)$ . On a ainsi deux possibilités :

- si  $v_1 = 0$  : alors on a  $d(v) = v$ , donc  $\mathcal{O}_{W''}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v')$ , et  $\text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v') = 0$ .

- si  $v_1 \neq 0$  : alors on a  $\text{signe}_q(d(v)) \neq \text{signe}_q(v)$ . Ainsi on peut écrire l'union disjointe :  $\mathcal{O}_{W''}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v) \sqcup \mathcal{O}_{W'}(d(v))$ . Comme  $v' \in \mathcal{O}_{W''}(v)$ , alors on a  $v' \in \mathcal{O}_{W'}(v)$  ou  $\mathcal{O}_{W'}(d(v))$ . Comme la fonction  $\text{signe}_q$  est constante sur les orbites de  $W'$ , on déduit que :

$$\mathcal{O}_{W'}(v) = \mathcal{O}_{W'}(v') \Leftrightarrow v' \in \mathcal{O}_{W'}(v) \Leftrightarrow \text{signe}_q(v) = \text{signe}_q(v').$$

D'où le résultat cherché.  $\square$

Le lemme suivant se déduit alors facilement :

**Lemme 4.3.5.** *Soit  $O$  une orbite de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W''$ . Alors  $O$  correspond à une ou deux orbites pour l'action de  $W'$ .*

*S'il existe  $(v_1, \dots, v_8) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$  avec  $x = \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_8) \in O$  tel que  $\text{signe}_q(v) = 0$ , alors  $O$  ne correspond qu'à une seule orbite pour l'action de  $W'$ .*

*S'il n'existe pas de tel élément, alors  $O$  sera la réunion de deux orbites  $O^+$  et  $O^-$  pour l'action de  $W'$ . Si l'on se donne  $x = \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_8) \in O$  quelconque, alors  $O^+$  et  $O^-$  peuvent être définies par :*

$$\begin{cases} \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_8) \in O^+ \\ \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(-v_1, \dots, v_8) \in O^- \\ \text{card}(O^+) = \text{card}(O^-) = \frac{\text{card}(O)}{2} \end{cases}$$

### Deuxième étape :

On possède ainsi pour chaque orbite de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  sous l'action de  $W'$  un représentant et le cardinal de l'orbite. Il suffit d'utiliser l'ensemble  $H_8$  construit au paragraphe 4.2 pour savoir si des orbites différentes pour l'action de  $W'$  sont dans la même orbite pour l'action de  $W$ . Le lemme suivant se déduit facilement de la définition de l'ensemble  $H_8$  :

**Lemme 4.3.6.** *Soient  $x, x' \in C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ , et  $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$  des générateurs de  $x$  et  $x'$ . Alors  $x$  et  $x'$  sont sur la même orbite de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W$  si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})(\exists h \in H_8) \begin{cases} \phi_8(i \cdot v) = \phi_8(\overline{h(v')}) \\ \text{signe}_q(i \cdot v) = \text{signe}_q(h(v')) \end{cases}$$

où les notations sont les mêmes qu'aux lemmes précédents.

**Troisième étape :** Les orbites de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour  $W$  et pour  $W^+$  sont en général différentes. Soit  $\tau_{1,2} \in \mathcal{S}_8 \cap (W \setminus W^+)$  la transposition qui échange les deux premières coordonnées : l'application définie sur  $W$  par composition à gauche par  $\tau_{1,2}$  est une involution qui échange  $W^+$  et  $W \setminus W^+$ . Le lien entre les orbites de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour les actions de  $W$  et de  $W^+$  se comprend par le lemme facile suivant :

**Lemme 4.3.7.** *Soit  $O$  une orbite de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W$ . On pose  $v = (v_1, \dots, v_8)$  tel que  $x = \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v) \in O$ .*

*Alors  $O$  correspond à une seule orbite pour l'action de  $W^+$  si, et seulement si, un des  $h(v)$  pour  $h \in H_8$  possède deux coordonnées égales ou opposées.*

*Dans le cas contraire,  $O$  est la réunion de deux orbites  $O^+$  et  $O^-$  pour l'action de  $W^+$ . Les orbites  $O^+$  et  $O^-$  sont entièrement déterminées par les relations :*

$$\begin{cases} \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, v_2, \dots, v_8) \in O^+ \\ \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_2, v_1, \dots, v_8) \in O^- \\ \text{card}(O^+) = \text{card}(O^-) = \frac{\text{card}(O)}{2} \end{cases}$$



### 4.3.3. Le cas de $E_7$ . Première étape :

On reprend la définition de  $E_7$  donnée au paragraphe 2.1. De la même manière que pour  $E_8$ , on considère l'inclusion  $A_7 \subset E_7$ . L'inclusion naturelle  $A_7 \rightarrow E_7$  induit une bijection :  $A_7/qA_7 \xrightarrow{\sim} E_7/qE_7$ . Au final, la quadrique  $C_{E_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  s'identifie à l'ensemble des  $\mathbb{Z}/q$ -droites  $\mathbb{Z}/q \cdot (x_1, \dots, x_8)$  de  $(\mathbb{Z}/q)^8$  vérifiant :  $\sum x_i = \sum x_i^2 = 0$ .

On a alors le lemme suivant :

**Lemme 4.3.8.** *Soit  $x \in C_{E_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  une droite isotrope, et  $v = (v_1, \dots, v_8)$  un générateur de  $x$ . Alors le cardinal de l'orbite de  $x$  par l'action de  $W'$  est donné par :*

$$\text{card}(\mathcal{O}_{W'}(x)) = \frac{8!}{|\{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid \phi_7(\overline{i \cdot v}) = \phi_7(\overline{v})\}| \cdot \prod_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j \in \{1, \dots, 8\} \mid v_j = i\}|!)}$$

où  $\phi_7$  désigne la fonction introduite au paragraphe précédent, et où on a noté par  $\overline{v}$  l'unique élément de  $\{\frac{1-q}{2}, \dots, \frac{q-1}{2}\}^8$  ayant même image que  $v$  par le passage au quotient :  $\mathbb{Z}^8 \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ .

### Deuxième étape :

**Lemme 4.3.9.** *Soient  $x, x' \in C_{E_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ , et  $v, v' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$  des générateurs de  $x$  et  $x'$ . Alors  $x$  et  $x'$  sont sur la même orbite de  $C_{E_7}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W$  si, et seulement si :*

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})(\exists h \in H_7) \phi_7(\overline{i \cdot v}) = \phi_7(\overline{h(v')})$$

où les notations sont les mêmes qu'aux lemmes précédents.

4.3.4. Le cas de  $E_8 \oplus A_1$ . Première étape : La quadrique  $C_{E_8 \oplus A_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  s'identifie naturellement aux  $\mathbb{Z}/q$ -droites de la forme  $\mathbb{Z}/q \cdot (v, w)$ , où  $v = (v_1, \dots, v_8) \in (\mathbb{Z}/q)^8$  et  $w \in \mathbb{Z}/q$ , vérifiant :  $(\sum v_i^2) + 2w^2 = 0$ .

On définit les groupes :  $W' = (\mathcal{S}_8 \times (\{\pm 1\}^8)^0) \times \{\pm \text{id}\}$  et  $W'' = (\mathcal{S}_8 \times \{\pm 1\}^8) \times \{\pm 1\}$ .

On a les inclusions :  $W' \subset W$  et  $W' \subset W''$ .

On a alors les lemmes suivants :

**Lemme 4.3.10.** *Soit  $x \in C_{E_8 \oplus A_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  une droite isotrope, et  $(v, w) = ((v_1, \dots, v_8), w)$  un générateur de  $x$ . Alors le cardinal de l'orbite de  $x$  par l'action de  $W''$  est donné par :*

$$\text{card}(\mathcal{O}_{W''}(x)) = \begin{cases} \frac{2^{8-|\{j \in \{1, \dots, 8\} \mid v_j=0\}|} \cdot 8!}{|\{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{v})\}| \cdot \prod_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j \in \{1, \dots, 8\} \mid v_j = i\}|!)} & \text{si } w = 0 \\ \frac{2^{8-|\{j \in \{1, \dots, 8\} \mid v_j=0\}|} \cdot 8! \cdot 2}{|\{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid (\phi_8(\overline{i \cdot v}), (iw)^2) = (\phi_8(\overline{v}), w^2)\}| \cdot \prod_{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} (|\{j \in \{1, \dots, 8\} \mid v_j = i\}|!)} & \text{si } w \neq 0 \end{cases}$$

où  $\phi_8$  est la fonction définie au paragraphe précédent, et où on a noté par  $\overline{v}$  l'unique élément de  $\{\frac{1-q}{2}, \dots, \frac{q-1}{2}\}^8$  ayant même image que  $v$  par le passage au quotient :  $\mathbb{Z}^8 \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$ .

**Lemme 4.3.11.** *Soit  $O$  une orbite de  $C_{E_8 \oplus A_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W''$ . Alors  $O$  correspond à une ou deux orbites pour l'action de  $W'$ .*

*S'il existe  $v = (v_1, \dots, v_8) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8$  et  $w \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  avec  $x = \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v, w) \in O$  tel que  $v_1 = 0$ , alors  $O$  ne correspond qu'à une seule orbite pour l'action de  $W'$ .*

*S'il n'existe pas de tel élément, alors  $O$  sera la réunion de deux orbites  $O^+$  et  $O^-$  pour l'action de  $W'$ . On note  $x = \text{vect}_{\mathbb{F}_p}((v_1, \dots, v_8), w) \in O$ , alors  $O^+$  et  $O^-$  peuvent être*

définies par :

$$\begin{cases} \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_8) \in O^+. \\ \text{vect}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(-v_1, \dots, v_8) \in O^-. \\ \text{card}(O^+) = \text{card}(O^-) = \frac{\text{card}(O)}{2}. \end{cases}$$

**Deuxième étape :**

**Lemme 4.3.12.** Soient  $x, x' \in C_{E_8 \oplus A_1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ , et  $(v, w), (v', w') \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^8 \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  des générateurs de  $x$  et  $x'$ . Alors  $x$  et  $x'$  sont sur la même orbite de  $C_{E_8}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W$  si, et seulement si :

$$(\exists i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})(\exists h \in H_8) \begin{cases} \phi_8(\overline{i \cdot v}) = \phi_8(\overline{h(v')}) \\ (i \cdot w)^2 = w'^2 \\ \text{signe}_q(i \cdot v) = \text{signe}_q(h(v')) \end{cases}$$

où les notations sont les mêmes qu'aux lemmes précédents.

**4.4. La détermination d'une transformation de  $SO_n(\mathbb{R})$  transformant  $L$  en un  $q$ -voisin donné.** Au paragraphe précédent, on a montré comment trouver, pour chaque orbite de  $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  pour l'action de  $W^+ = SO(L)$ , un représentant ainsi que le cardinal de l'orbite. La formule trouvée au corollaire 3.1.3 fait intervenir, pour chacun des représentants  $x$  trouvé au paragraphe précédent, un élément  $g_x \in SO_n(\mathbb{Q})$  tel que le  $q$ -voisin  $L_x$  de  $L$  associé à  $x$  par la proposition-définition 2.2.6 s'écrive :  $L_x = g_x L$ .

La méthode qui suit explique comment, à partir d'une droite isotrope  $x$  engendrée par un vecteur  $v$ , construire le réseau  $L_x$  associé (en exhibant une famille génératrice), puis comment trouver un élément  $g_x \in SO_n(\mathbb{Q})$  tel que  $L_x = g_x L$ .

**4.4.1. La construction du  $q$ -voisin à partir d'une droite isotrope.** On reprend la construction de la proposition-définition 2.2.6. Soient  $L \in \mathcal{L}_n$ ,  $x$  la droite isotrope de  $C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  engendrée par le vecteur  $v \in L$ , et  $L_x$  le  $q$ -voisin de  $L$  associé à  $x$  d'après la proposition-définition 2.2.6. On souhaite déterminer une famille génératrice de  $L_x$ , ce qui se fait par la proposition suivante :

**Proposition 4.4.1.** Soient  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $L$ , et  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $(\alpha_{i_0} \cdot v) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ . Le réseau  $L_x$  possède une famille  $\mathbb{Z}$ -génératrice à  $2n$  éléments, à savoir :

$$\begin{aligned} & \{(\alpha_{i_0} \cdot v) \alpha_i - (\alpha_i \cdot v) \alpha_{i_0} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus i_0\} \\ & \cup \{q \alpha_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \left\{ \frac{1}{q} \left( v - \frac{v \cdot v}{2} m \alpha_{i_0} \right) \right\}, \end{aligned}$$

où  $m$  est un entier tel que  $m(v \cdot \alpha_{i_0}) \equiv 1 \pmod{q}$  (qui existe bien comme  $(\alpha_{i_0} \cdot v) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ ).

*Démonstration.* L'existence de l'indice  $i_0$  est assurée par la non dégénérescence du produit scalaire sur  $L$ . Ainsi, l'image de la famille  $\{(\alpha_{i_0} \cdot v) \alpha_i - (\alpha_i \cdot v) \alpha_{i_0} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus i_0\}$  dans  $L/qL$  est une base de  $x^\perp$ . On en déduit que l'on possède une famille génératrice de  $M$ , à savoir la famille  $\{(\alpha_{i_0} \cdot v) \alpha_i - (\alpha_i \cdot v) \alpha_{i_0} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus i_0\} \cup \{q \alpha_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

Comme  $v$  est isotrope, alors  $v$  et  $v' = v - \frac{v \cdot v}{2} m \alpha_{i_0}$  ont bien même image dans  $L/qL$ , et  $v'$  vérifie  $(v' \cdot v') \equiv 0 \pmod{2q^2}$ . Suivant la construction de la proposition-définition 2.2.6, le réseau  $L_x$  est donné par :  $L_x = M + \mathbb{Z} \frac{v'}{q}$ .  $\square$

**4.4.2. Détermination d'une transformation entre  $L$  et  $L_x$ .** On suppose que  $n \leq 9$ . En particulier, on a les deux propriétés suivantes :

- deux réseaux  $L, L' \in \mathcal{L}_n$  sont nécessairement isomorphes ;
- soit  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  un système de racines simples de  $L \in \mathcal{L}_n$  : c'est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $L$ .

De ces deux constatations, on déduit le lemme facile suivant :

**Lemme 4.4.2.** Soient  $n \leq 9$ , et  $L, L' \in \mathcal{L}_n$  deux réseaux. On note  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  un système de racines simples de  $L$ , et  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  un système de racines simples de  $L'$ . Ce sont respectivement des bases de  $L$  et  $L'$ . On suppose que les  $\alpha_i$  et les  $\beta_j$  sont numérotés de manière à donner le même diagramme de Dynkin, c'est-à-dire que les matrices  $(\alpha_i \cdot \alpha_j)_{i,j}$  et  $(\beta_i \cdot \beta_j)_{i,j}$  sont égales (ce qui est bien possible comme les réseaux  $L$  et  $L'$  sont isomorphes).

Alors l'unique application linéaire  $g$  donnée par :

$$g : L \rightarrow L' \\ \alpha_i \mapsto \beta_i$$

est un élément de  $O_n(\mathbb{R})$  tel que  $g(L) = L'$ .

De plus, si  $g \notin SO_n(\mathbb{R})$ , alors  $g' = g \circ s_{\alpha_1} \in SO_n(\mathbb{R})$  et vérifie  $L' = g'(L)$ .

On souhaite construire un élément  $g \in SO_n(\mathbb{R})$  tel que  $L_x = g(L)$  (où  $L_x$  est le  $q$ -voisin de  $L$  associé à l'élément  $x \in C_L(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  d'après la proposition-définition 2.2.6). Grâce à l'étude faite au paragraphe précédent, on possède déjà une famille génératrice pour  $L_x$ . D'après le lemme précédent, il suffit de déterminer un système de racines simples pour  $L_x$ , puis de l'ordonner correctement, et enfin de créer la transformation  $g$  associée. L'algorithme qui fait cela se fait selon les étapes suivantes :

**Première étape :** à l'aide d'une famille  $\mathbb{Z}$ -génératrice de  $L_x$  (par exemple celle trouvée au paragraphe précédent), on trouve une  $\mathbb{Z}$ -base de  $L_x$  grâce à la fonction `qfll` de PARI qui repose sur l'algorithme LLL (on pourrait aussi utiliser une forme normale de Hermite).

**Deuxième étape :** la forme bilinéaire sur  $L_x$  est entièrement déterminée par sa valeur sur la base trouvée à la première étape. On en déduit l'ensemble des racines de  $L_x$ . La fonction `qfminim` de Pari-GP nous donne directement un ensemble  $R^+$  de racines positives.

**Troisième étape :** en posant  $\rho = (1/2) \cdot \sum_{\beta \in R^+} \beta$ , on déduit le système de racines simples  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  associé à la chambre de Weyl contenant  $\rho$ .

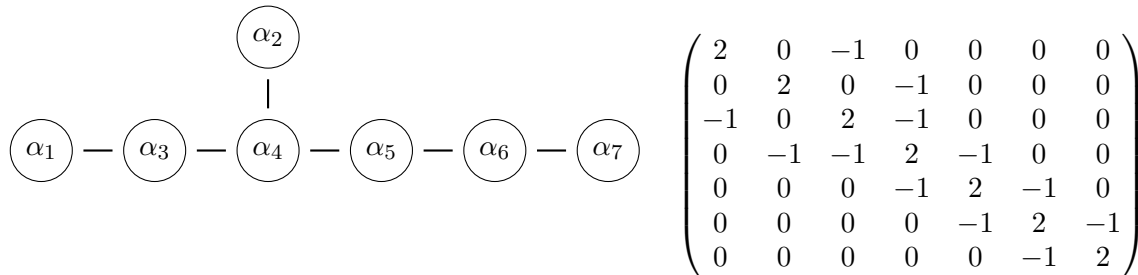
**Quatrième étape :** on réordonne ensuite les indices des  $\beta_i$  pour qu'ils donnent le même diagramme de Dynkin que les  $\alpha_i$  (où les  $\alpha_i$  sont un système de racines simples de  $L$ , ordonnées comme dans [8, Planches VI et VII] par exemple).

**Cinquième étape :** on construit l'application  $g$  définie au lemme précédent.

Seules les quatrième et cinquième étapes diffèrent selon les réseaux considérés. On les détaille ci-dessous dans le cas où  $L = E_7$  :

**L'exemple de  $E_7$  :**

On reprend les notations des paragraphes 2.1 et 4.2. On pose  $\alpha_i = v_i$  pour  $i = 1, \dots, 7$  (qui est bien un système de racines simples de  $E_7$ ). Le diagramme de Dynkin et la matrice de Gram associés sont donnés par :



Donnons-nous un système de racines simples  $\{\beta_1, \dots, \beta_7\}$  de  $L_x$  (celui qu'on a trouvé à la troisième étape grâce à Pari-GP). On pose  $B = (b_{i,j}) = (\beta_i \cdot \beta_j)$  la matrice de Gram associée. On explique ci-dessous comment trouver les entier  $i_1, \dots, i_7$  tels que :

(i)  $\{i_1, \dots, i_7\} = \{1, \dots, 7\}$ .

(ii) les matrices  $B' = (\beta_{i_l} \cdot \beta_{i_m})_{l,m}$  et  $A = (\alpha_l \cdot \alpha_m)_{l,m}$  sont égales.

Et une telle numérotation est unique.

On procède comme suit :

- l'entier  $i_4$  est l'indice de l'unique ligne de  $B$  dont la somme des coefficients est  $-1$ .
- on définit les ensembles  $I_1, I_2, I_3, I_4 \subset \{1, \dots, 7\}$  par :

$$I_1 = \{j \in \{1, \dots, 7\} \mid b_{i_4, j} = -1\}, \quad I_2 = \{j \in \{1, \dots, 7\} \mid \sum_i b_{i, j} = 1\},$$

$$I_3 = \{j \in \{1, \dots, 7\} \mid \sum_i b_{i, j} = 0\}, \quad I_4 = \{j \in \{1, \dots, 7\} \mid (\exists i \in I_1) b_{i, j} = -1\}.$$

- d'après la numérotation du diagramme de Dynkin de  $E_7$ , on a les égalités :

$$\{i_2, i_3, i_5\} = I_1, \quad \{i_1, i_2, i_7\} = I_2, \quad \{i_3, i_5, i_6\} = I_3, \quad \{i_1, i_4, i_6\} = I_4.$$

- dans un premier temps, on déduit :  $\{i_1\} = I_2 \cap I_4$ ,  $\{i_2\} = I_1 \cap I_2$  et  $\{i_6\} = I_3 \cap I_4$ .
- on déduit ensuite :  $\{i_7\} = I_2 \setminus \{i_1, i_2\}$ .
- enfin on trouve  $\{i_3\} = \{j \in \{1, \dots, 7\} \mid b_{i_1, j} = -1\}$ , et  $i_5$  est le dernier indice restant.

## 5. L'ÉTUDE DE $T_A$ POUR $A$ UN 2-GROUPE.

Dans cette partie, on considère  $A$  un 2-groupe de la forme  $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$  (avec  $i \leq n/2$ ) ou  $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Soient  $n = 7, 8$  ou  $9$ , et  $L \in \mathcal{L}_n$ . On note  $R = R(L)$  l'ensemble des racines de  $L$ ,  $W$  son groupe de Weyl, et  $W^+ = \text{SO}(L)$  le sous-groupe de  $W$  des éléments de déterminant 1. On souhaite déterminer les orbites de  $A$ -voisins du réseau  $L$  sous l'action du groupe  $W^+$ .

Une particularité du cas  $p = 2$  repose sur le lemme suivant :

**Lemme 5.0.3.** *Soit  $L$  un réseau du type  $E_7$  ou  $E_8$ . On pose  $\tilde{q}$  la forme quadratique obtenue à partir de  $q$  par passage au quotient dans  $L/2L$ . L'homomorphisme naturel suivant :*

$$W \rightarrow \text{O}(\tilde{q}) = \text{O}(L/2L)$$

*est surjectif.*

*Démonstration.* Voir [8, Ch.VI, §4, Exercices 1 et 3]. □

### 5.1. Détermination des orbites de $A$ -voisins pour les actions des groupes $W$ et $W^+$ .

5.1.1. *Les orbites des 2-voisins et des 4-voisins pour l'action de  $W^+$ .* D'après la proposition 2.2.4 et la proposition-définition 2.2.6, les orbites des 2-voisins ou des 4-voisins pour l'action de  $W^+$  se comprennent par l'étude des orbites des droites isotropes de  $L/2L$  ou de  $L/4L$  pour l'action de  $W^+$ .

Les orbites de droites isotropes de  $L/2L$  pour l'action de  $W^+$  sont expliquées par les corollaires suivants du lemme 5.0.3 :

**Corollaire 5.1.1.** *Soit  $L$  le réseau  $E_7$  ou  $E_8$ , et  $W$  son groupe de Weyl. Soit  $\tilde{q}$  la forme quadratique obtenue à partir de  $q$  par passage au quotient dans  $L/2L$ . Alors  $L \otimes \mathbb{F}_2 - \{0\}$  ne possède que deux orbites pour l'action de  $W^+$ , à savoir :  $\tilde{q}^{-1}(0) - \{0\}$  et  $\tilde{q}^{-1}(1)$ .*

*Démonstration.* Découle du lemme 5.0.3 et du théorème de Witt. En effet, si on se donne deux éléments non nuls  $u, v \in L \otimes \mathbb{F}_2$  avec  $\tilde{q}(u) = \tilde{q}(v)$ , le théorème de Witt nous donne un élément  $s \in \text{O}(\tilde{q})$  tel que  $s(u) = v$ . Et un tel élément  $s$  provient d'un élément  $w \in W$  d'après le lemme 5.0.3. Ainsi,  $L \otimes \mathbb{F}_2 - \{0\}$  ne possède que deux orbites pour l'action de  $W$ , à savoir :  $\tilde{q}^{-1}(0) - \{0\}$  et  $\tilde{q}^{-1}(1)$ .

Si  $u \in \tilde{q}^{-1}(0) - \{0\}$  ou si  $u \in \tilde{q}^{-1}(1)$ , on peut toujours trouver un vecteur  $u' \in L$  laissé stable par un élément  $\sigma \in W \setminus W^+$ , dont l'image par  $L \rightarrow L/2L$  est  $u$ . Par exemple, si  $\sigma$  désigne la permutation des deux dernières coordonnées dans  $\mathbb{R}^8$ , on peut voir que les

vecteurs  $u' = (1, -1, 0, \dots, 0)$  et  $u'(1, 1, -1, -1, 0, \dots, 0)$  conviennent. Ainsi, les orbites de  $L \otimes \mathbb{F}_2 - \{0\}$  pour les actions de  $W$  et de  $W^+$  coïncident. D'où le résultat.  $\square$

Les corollaires suivants se déduisent du fait que les 2-voisins du réseau  $L$  sont en bijection avec les éléments de  $C_L(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , et que cette bijection commute aux actions de  $W^+$  :

**Corollaire 5.1.2.** *Soient  $L = E_7$  ou  $E_8$ ,  $W$  son groupe de Weyl, et  $W^+ = \text{SO}(L)$ . Le groupe  $W^+$  agit transitivement sur  $C_L(\mathbb{F}_2)$  ainsi que sur l'ensemble des 2-voisins de  $L$ .*

**Corollaire 5.1.3.** *Soient  $L = E_8 \oplus A_1$ ,  $W$  son groupe de Weyl, et  $W^+ = \text{SO}(L)$ . Notons  $q_1$  et  $q_2$  les formes quadratiques associées à la projection de  $L$  sur  $E_8$  et  $A_1$  respectivement. Alors  $C_L(\mathbb{F}_2)$  possède exactement deux orbites sous l'action de  $W^+$ , qui sont :*

$$\begin{aligned} & (q_1^{-1}(0) - \{0\}) \times \{0\} \\ & (q_1^{-1}(1)) \times (q_2^{-1}(1)) \end{aligned}$$

*Il y a donc deux orbites de 2-voisins de  $L$  sous l'action de  $W^+$ , qui sont associées aux deux orbites de  $C_L(\mathbb{F}_2)$  par la bijection de la proposition-définition 2.2.6.*

De même, nous allons voir que, pour  $L = E_7$  ou  $L = E_8$ , le groupe  $W^+ = \text{SO}(L)$  agit transitivement sur  $C_L(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ , et donc sur l'ensemble des 4-voisins de  $L$ .

Pour cela, posons  $X = \{x \in E_7 \setminus 2E_7 \mid (x \cdot x) = 8\}$ . On a les lemmes suivants :

**Lemme 5.1.4.** *On a les propriétés suivantes :*

(i)  $|X| = 4032 = 2 \cdot 2^5 \cdot 63.$

(ii) *l'action de  $W^+$  sur  $X$  est transitive.*

*Démonstration.* Le point (i) se vérifie facilement à la main, car il est élémentaire d'énumérer tous les éléments de  $X$ . On pourrait aussi utiliser un argument de série thêta, en utilisant le développement suivant :

$$\theta_{E_7}(q) = 1 + 126 \cdot q + 756 \cdot q^2 + 2072 \cdot q^3 + 4158 \cdot q^4 + 7560 \cdot q^5 + \dots$$

Pour le (ii), on utilise la description faite de  $W$  au paragraphe 4.2. Il est alors facile de vérifier qu'il n'y a qu'une seule orbite d'éléments de  $X$  pour l'action de  $W$ . Comme le vecteur  $(2, 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0) \in X$  est invariant par la permutation  $\sigma \in W \setminus W^+$  qui échange les deux dernières coordonnées, on déduit qu'il n'y a qu'une seule orbite d'éléments de  $X$  pour l'action de  $W^+$ .  $\square$

On veut montrer que toute droite de la quadrique  $C_{E_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  est engendrée par un vecteur de  $X$ , ce qui découle du lemme suivant :

**Lemme 5.1.5.** *L'application de réduction modulo 4 :  $X \rightarrow E_7/4E_7$  est injective. De plus, elle induit une bijection :*

$$\begin{aligned} \{\{x, -x\} \mid x \in X\} & \rightarrow C_{E_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}). \\ \{x, -x\} & \mapsto \text{vect}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(x). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord l'injectivité de l'application de réduction modulo 4 :  $X \rightarrow E_7/4E_7$ . Soient  $x \in X$ , et  $u$  non nul dans  $E_7$  tels que  $(x - 4 \cdot u) \in X$ . En particulier, on a les égalités :  $(x - 4u) \cdot (x - 4u) = 8$  et  $x \cdot x = 8$ , donc  $4u \cdot u = x \cdot u$ .

Le théorème de Cauchy-Schwarz nous dit que :  $4(u \cdot u)^2 \leq 8(u \cdot u)$ , puis  $u \cdot u \leq 2$ . Comme  $u \in E_7$  et que  $u \neq 0$ , on déduit que  $u \cdot u = 2$ . Ainsi, toutes les inégalités précédentes sont des égalités, et les vecteurs  $x$  et  $u$  sont  $\mathbb{R}$ -proportionnels. En cherchant  $x$  de la forme  $\lambda \cdot u$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on trouve facilement que  $x = 2u$ , ce qui est impossible par définition de  $X$ . D'où l'injectivité cherchée.

Il reste à déterminer le caractère bijectif de l'application  $\{x, -x\} \mapsto \text{vect}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(x)$ . Cette application est déjà injective d'après le premier point du lemme. Pour voir qu'elle est surjective, il suffit de voir que  $|X| = 2 \cdot |C_{E_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})|$ . C'est un exercice de vérifier que  $|C_{E_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 2^5 \cdot |C_{E_7}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})| = 2^5 \cdot (2^6 - 1) = 2^5 \cdot 63$ .  $\square$

**Corollaire 5.1.6.** *L'action naturelle du groupe  $W^+ = \text{SO}(E_7)$  sur l'ensemble des 4-voisins de  $E_7$  est transitive.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des lemmes précédents. On sait déjà que  $W^+$  agit transitivement sur l'ensemble  $X$ , et on voit facilement que la bijection  $\{x, -x\} \mapsto \text{vect}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(x)$  commute avec les actions de  $W^+$  sur  $X$  et sur  $C_{E_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ . Ainsi,  $W^+$  agit transitivement sur  $C_{E_7}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ , donc sur l'ensemble des 4-voisins de  $E_7$ .  $\square$

La même méthode s'applique à l'étude des 4-voisins de  $E_8$ . On se contente d'exposer les résultats analogues au cas de  $E_7$ , en laissant les démonstrations au lecteur.

Posons  $Y = \{y \in E_8 \setminus 2E_8 \mid (y \cdot y) = 8\}$ . On a les lemmes suivants :

**Lemme 5.1.7.** *On a les propriétés suivantes :*

(i)  $|Y| = 17280 = 2 \cdot 2^6 \cdot 135$ .

(ii) *l'action de  $W^+$  sur  $Y$  est transitive.*

**Lemme 5.1.8.** *L'application de réduction modulo 4 :  $Y \rightarrow E_8/4E_8$  est injective. De plus, elle induit une bijection :*

$$\begin{aligned} \{\{y, -y\} \mid y \in Y\} &\rightarrow C_{E_8}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}). \\ \{y, -y\} &\mapsto \text{vect}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(y). \end{aligned}$$

**Corollaire 5.1.9.** *L'action naturelle du groupe  $W^+ = \text{SO}(E_8)$  sur l'ensemble des 4-voisins de  $E_8$  est transitive.*

5.1.2. *Les orbites des 2, ..., 2-voisins pour l'action de  $W^+$ .* Dans cette partie, on ne considère que les cas où  $L = E_7$  ou  $L = E_8$ . On pose  $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ , et on s'intéresse aux  $A$ -voisins de  $L$ . Notre but est d'étudier les orbites de  $A$ -voisins de  $L$  pour l'action de  $W^+ = \text{SO}(L)$ , ce qui repose sur les lemmes suivants :

**Lemme 5.1.10.** *Soient  $n = 7$  ou  $8$ , et  $1 \leq i \leq n/2$ . À isomorphisme près, il existe un unique réseau  $M \subset \mathbb{R}^n$  pair et tel que :*

$$\text{rés } M \simeq \text{H}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i) \oplus \text{rés } L_0,$$

où  $L_0$  est un élément quelconque de  $\mathcal{L}_n$ .

*Démonstration.* Soient  $I, I'$  deux espaces isotropes isomorphes à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$  et en somme directe dans  $\text{rés } M$  (qui existent bien par hypothèse). Considérons  $L$  et  $L'$  les images réciproques respectives de  $I$  et  $I'$  par l'application naturelle  $M^\sharp \rightarrow \text{rés } M$  : ce sont deux éléments de  $\mathcal{L}_n$ , qui sont des  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ -voisins.

À isométrie près,  $\mathcal{L}_n$  ne possède qu'un seul élément, et on peut donc supposer que  $L = E_7$  ou  $L = E_8$  (selon le choix de  $n$ ). D'après la proposition 2.2.4,  $M$  est l'image réciproque via l'application naturelle  $L \rightarrow L/2L$  de l'orthogonal d'un sous-espace isotrope de dimension  $i$ . Comme  $\text{O}(L)$  permute transitivement ces sous-espaces (par le théorème de Witt et le lemme 5.0.3),  $M$  est bien unique à isomorphisme près.

Il reste à montrer l'existence de tels réseaux  $M$  : celle-ci est claire grâce à l'existence de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$ -voisins. On donnera dans la suite des exemples de  $M$  satisfaisant les propriétés de l'énoncé du lemme.  $\square$

**Lemme 5.1.11.** *Soient  $n, i$  et  $M$  comme dans le lemme 5.1.10. Alors le groupe  $\text{O}(M)$  agit transitivement sur l'ensemble des couples  $(I, I')$ , où  $I$  et  $I'$  sont des sous-espaces isotropes de dimension  $i$  en somme directe dans  $\text{rés } M$ .*

*Démonstration.* On procède cas par cas. Comme le réseau  $M$  est unique à isomorphisme près, on comprend qu'il suffit de montrer le lemme pour les différentes valeurs possibles pour  $i$  et  $n$ , mais à chaque fois pour un seul réseau  $M$  tel que  $\text{rés } M \simeq \text{H}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i) + \text{rés } L_0$ . On se contente de le démontrer dans le cas où  $n = 7$  et  $i = 3$  (qui est un cas particulièrement élégant et assez représentatif), et on se contente de donner dans les autres cas un réseau  $M$  qui convient à la démonstration.



*Démonstration du cas  $n = 7$  et  $i = 3$ .* Posons  $M = (A_1)^7$  (d'après les notations du paragraphe 2.1). Notons  $\varepsilon_k = (1/2, -1/2) \in A_1^\sharp$ , qui est un générateur du  $k$ -ème terme  $A_1^\sharp/A_1$  apparaissant dans l'écriture de rés  $M$ . On a les égalités :

$$\begin{aligned} \text{rés } M &= \bigoplus_{k=1}^7 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\varepsilon_k = \left( \bigoplus_{k=2}^7 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_k) \right) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \left( \sum_{k=1}^7 \varepsilon_k \right) \\ &\simeq H((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3) \oplus \text{rés } E_7 \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de [13, Ch. II, Proposition 2.1] : il suffit de constater que l'espace  $I_0$  engendré par les vecteurs  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6$  et  $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7$  est un lagrangien de  $\bigoplus_{k=2}^7 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_k)$ .

Par définition de  $M$ , on a :  $O(M) = \mathcal{S}_7 \ltimes \{\pm 1\}^7$ , où  $\{\pm 1\}^7$  agit sur chaque  $A_1$  par  $\varepsilon_k \mapsto \pm \varepsilon_k$  (et a donc une action triviale sur rés  $M$ ), tandis que  $\mathcal{S}_7$  agit par permutation des  $\varepsilon_k$ . On déduit déjà que l'action de  $O(M)$  sur rés  $E_7 \subset \text{rés } M$  est triviale. La compréhension des espaces isotropes de dimension 3 de rés  $M$  se déduit de la compréhension des lagrangiens de  $H((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3)$  donnée par le lemme suivant :

**Lemme 5.1.12.** *Soit  $\phi$  l'application définie sur  $\mathcal{S}_7$  par :*

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{S}_7 &\rightarrow B_I \\ \sigma &\mapsto (\text{vect}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_3)) \end{aligned}$$

où  $B_I$  est l'ensemble des couples  $(I, b)$ , où  $I$  est un lagrangien de  $H((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3)$ ,  $b$  est une base de  $I$ , et où les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  sont donnés par :

$$\begin{cases} v_1 = \varepsilon_{\sigma(1)} + \varepsilon_{\sigma(2)} + \varepsilon_{\sigma(3)} + \varepsilon_{\sigma(4)} \\ v_2 = \varepsilon_{\sigma(1)} + \varepsilon_{\sigma(2)} + \varepsilon_{\sigma(5)} + \varepsilon_{\sigma(6)} \\ v_3 = \varepsilon_{\sigma(1)} + \varepsilon_{\sigma(3)} + \varepsilon_{\sigma(5)} + \varepsilon_{\sigma(7)} \end{cases}$$

Alors  $\phi$  est une bijection.

*Démonstration du lemme.* Il est immédiat que  $\phi$  est bien à valeurs dans  $B_I$ . Il suffit en effet de voir que les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  sont isotropes, orthogonaux, et forment une famille libre.

Réciproquement, donnons-nous  $(v_1, v_2, v_3)$  une base d'un lagrangien  $I$ . Pour simplifier, on note  $I_i$  les sous-ensembles de  $\{1, \dots, 7\}$  tels que :  $v_i = \sum_{j \in I_i} \varepsilon_j$ . Les  $I_i$  sont deux-à-deux distincts. Comme  $I$  est un lagrangien, on a en particulier que :

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) |I_i| \equiv 0 \pmod{4},$$

$$(\forall i, j \in \{1, 2, 3\}) |I_i \cap I_j| \equiv 0 \pmod{2}.$$

Comme les  $I_i$  sont des sous-ensembles de  $\{1, \dots, 7\}$ , les congruences ci-dessus donnent les égalités :

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) |I_i| = 4,$$

$$(\forall i \neq j \in \{1, 2, 3\}) |I_i \cap I_j| = 2.$$

Il est alors facile de voir que l'on a l'égalité :

$$|I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 1.$$

En effet, les seules autres valeurs possibles sont 0 ou 2. Mais ces deux cas sont impossibles :

- si  $|I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 0$  : alors on voit facilement que  $I_3 = I_1 \cup I_2 \setminus I_1 \cap I_2$ , ce qui veut dire que :  $v_3 = v_1 + v_2$ , ce qui contredit que  $(v_1, v_2, v_3)$  forme une base de  $I$ .
- si  $|I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 2$ , alors  $I_1 \cap I_2 = I_2 \cap I_3 = I_3 \cap I_1 = J$ , et les ensembles  $I_i \setminus J$  formeraient trois ensembles disjoints à deux éléments de  $\{1, \dots, 7\} \setminus J$ , qui ne possède que 5 éléments, ce qui est impossible.

On peut ainsi définir une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_7$  avec :

$$\begin{aligned} \{\sigma(1)\} &= I_1 \cap I_2 \cap I_3, & \{\sigma(2)\} &= I_1 \cap I_2 \setminus \{\sigma(1)\}, & \{\sigma(3)\} &= I_1 \cap I_3 \setminus \{\sigma(1)\}, \\ \{\sigma(4)\} &= I_1 \setminus \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\}, & \{\sigma(5)\} &= I_2 \cap I_3 \setminus \{\sigma(1)\}, \\ \{\sigma(6)\} &= I_2 \setminus \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(5)\}, & \{\sigma(7)\} &= I_3 \setminus \{\sigma(1), \sigma(3), \sigma(5)\}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que pour notre élément  $\sigma$  défini ci-dessus on a :  $\phi(\sigma) = (I, (v_1, v_2, v_3))$ . L'application  $\phi$  est une bijection, et sa réciproque est donnée par le processus précédent qui nous a permis de trouver  $\sigma$ .  $\square$

Revenons à la démonstration du lemme 5.1.11 dans le cas  $n = 7$  et  $i = 3$ . Soit  $I$  un espace isotrope de dimension 3 de rés  $M$  : on peut le voir comme un lagrangien de  $\bigoplus_{k=2}^7 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_k) \simeq \mathbb{H}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3)$ , et d'après le lemme précédent il existe un élément  $\sigma \in \mathcal{S}_7$  associé à une de ses bases. Il est facile de voir que  $I = \sigma(I_0)$  (avec l'inclusion  $\mathcal{S}_7 \subset O(M)$ ), donc  $O(M)$  agit transitivement sur l'ensemble des espaces isotropes de dimension 3 de rés  $M$ .

On souhaite vérifier que  $O(M)$  agit bien transitivement sur les couples d'espaces isotropes de dimension 3 en somme directe dans rés  $M$ . Soit  $(I, J)$  un tel couple. On peut supposer que  $I = I_0$  (comme  $O(M)$  agit transitivement sur les espaces isotropes de dimension 3 de rés  $M$ ). L'espace isotrope  $J_0$  associé par  $\phi$  au 4-cycle  $\sigma = (4576)$  est bien en somme directe avec  $I_0$ . Soit  $S$  le sous-groupe des éléments de  $\mathcal{S}_7$  qui préserve  $I$  : pour montrer notre résultat, il suffit de vérifier que  $J$  est de la forme  $s(J_0)$  pour  $s \in S$ . On vérifie facilement à la main qu'il existe 8 éléments de la forme  $s(J_0)$ , c'est-à-dire autant que d'espaces isotropes de dimension 3 en somme directe avec  $I_0$  dans rés  $M$ , d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration des autres cas.* Pour  $n = 7$  et  $i = 1, 2$ , des réseaux  $M$  qui vérifient les conditions du lemme 5.1.10 sont respectivement :  $A_1 \oplus D_6$  et  $(A_1)^3 \oplus D_4$ . Pour  $n = 8$  et  $i = 1, 2, 3, 4$ , des réseaux  $M$  qui vérifient les conditions du lemme 5.1.10 sont respectivement :  $D_8$ ,  $D_4 \oplus D_4$ ,  $\sqrt{2}D_8^\sharp$  et  $\sqrt{2}E_8^\sharp$ .  $\square$

On déduit des lemmes 5.1.10 et 5.1.11 la proposition 1.0.1 de l'introduction, dont on explicite ici la démonstration :

*Démonstration de la proposition 1.0.1.* Soient  $L$  et  $A$  comme dans l'énoncé de la proposition. D'après la proposition 2.2.4, les orbites de  $A$ -voisins de  $L$  pour l'action de  $SO(L)$  sont en bijection avec les orbites de couples de la forme  $(X, I)$ , où  $X$  est un espace totalement isotrope de  $L/pL$  de dimension  $i$ , et  $I$  est un lagrangien de  $\mathbb{H}(L/M)$  (avec  $M$  l'image réciproque de  $X^\perp$  par  $L \rightarrow L/pL$ ) transverse à  $L/M$ .

Le théorème de Witt nous dit déjà que  $O(L)$  agit transitivement sur les espaces isotropes  $X$  de dimension  $i$  de  $L/pL$ . Les lemmes 5.1.10 et 5.1.11 nous disent que, une fois  $X$  fixé (et donc une fois le réseau  $M$  fixé), le groupe  $O(L)$  agit transitivement sur l'ensemble des espaces isotropes de dimension  $i$  en somme directe avec  $L/M$  dans rés  $M$ . Ainsi, le groupe  $O(L)$  agit transitivement sur l'ensemble des  $A$ -voisins de  $L$ .

Pour passer aux orbites pour l'action de  $SO(L)$ , on a deux cas à traiter :

- si  $i \leq 3$  : alors il est facile de trouver pour un couple  $(X, I)$  de la forme précédente un élément  $\sigma \in O(L) \setminus SO(L)$  tel que  $\sigma(X, I) = (X, I)$ . Par exemple, pour  $L = E_7$ , il suffit de prendre  $\sigma = -\text{id}$ . On déduit dans ce cas que le groupe  $SO(L)$  agit transitivement sur l'ensemble des couples  $(X, I)$  de la forme précédente, et donc sur l'ensemble des  $A$ -voisins.
- si  $i = 4$  (et donc  $L = E_8$ ) : il existe exactement deux orbites d'espaces isotropes de dimension 4 dans  $E_8/2E_8$ . Ainsi, il y a exactement deux orbites de couples  $(X, I)$  de la forme précédente pour l'action de  $SO(E_8)$ . Il y a donc exactement deux orbites de  $2, 2, 2, 2$ -voisins de  $E_8$  pour l'action de  $SO(E_8)$ . En particulier, si on se donne  $\sigma \in O(E_8) \setminus SO(E_8)$  et  $L$  un  $2, 2, 2, 2$ -voisin de  $E_8$ , alors les réseaux  $L$  et  $\sigma(L)$  sont des  $2, 2, 2, 2$ -voisins de  $E_8$  dans des orbites différentes pour l'action de  $SO(E_8)$ .

□

**5.2. La création de  $A$ -voisins dans des cas particuliers.** Les calculs de la trace de  $T_A$  (pour  $A$  de la forme  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$  ou  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ) sont ainsi faciles à réaliser dans les cas précédents : comme on connaît bien les orbites, il suffit de chercher un voisin correspondant à chacune des orbites (c'est-à-dire au plus deux voisins), et de prendre en considération le cardinal de chaque orbite ensuite.

Une autre subtilité des cas où  $L = E_7, E_8$  ou  $E_8 \oplus A_1$  est que tout élément isotrope  $x \in L/2L$  possède un relèvement  $v \in L$  tel que  $v \cdot v = 4$ .

On détaille dans la suite des cas particuliers où il est facile de construire une transformations  $\sigma \in O_n(\mathbb{Q})$  qui transforme  $L$  en un de ses  $A$ -voisins. Dans les cas étudiés, chaque orbite de  $A$ -voisins de  $L$  pour l'action de  $SO(L)$  possède un élément de la forme  $\sigma(L)$  pour de tels éléments  $\sigma$ .

**Lemme 5.2.1** (Création d'un 2-voisin). *Soit  $x \in L$  tel que  $x \cdot x = 4$ . On définit la symétrie  $\sigma \in O_n(\mathbb{Q})$  par :*

$$\sigma(y) = y - \frac{(x \cdot y)}{2} x.$$

*Alors  $\sigma(L)$  est un 2-voisin de  $L$ . C'est même le 2-voisin associé à la droite isotrope  $\text{vect}(x) \subset L/2L$ .*

*Démonstration.* Posons  $L' = \sigma(L)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} L \cap L' &= \{y \in L \mid \sigma^{-1}(y) \in L\} = \{y \in L \mid \sigma(y) \in L\} \\ &= \{y \in L \mid (x \cdot y) \in 2\mathbb{Z}\} \text{ comme } x \notin 2L \end{aligned}$$

On déduit ainsi facilement que  $L/(L \cap L') \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et que  $M = L \cap L'$  est bien l'image réciproque de  $x^\perp$  par  $L \rightarrow L/2L$ . Si l'on se donne  $y \in L$  tel que  $(x \cdot y) \equiv 1 \pmod{2}$ , alors :

$$L' = M + \mathbb{Z} \sigma(y) = M + \mathbb{Z} \left( y - \frac{x}{2} \right) = M + \mathbb{Z} \frac{x + 2y}{2}$$

et on a bien la forme voulue, comme  $(x + 2y)$  a même image que  $x$  dans  $L/2L$  et vérifie  $(x + 2y) \cdot (x + 2y) \equiv 0 \pmod{8}$ . □

On peut étendre cette construction aux  $2, \dots, 2$ -voisins grâce au lemme suivant, dont la démonstration est assez proche :

**Lemme 5.2.2** (Création de  $2, \dots, 2$  voisins). *Soit  $I = \{1, \dots, m\}$ , et  $(x_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $L$  vérifiant les conditions suivantes :*

- (i)  $(\forall i \in I) x_i \cdot x_i = 4$ ,
- (ii)  $(\forall i, j \in I) i \neq j \Rightarrow x_i \cdot x_j = 0$ ,
- (iii) la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est libre dans  $L/2L$ .

*Alors, en définissant les  $\sigma_i$  par :  $\sigma_i(y) = y - \frac{(x_i \cdot y)}{2} x_i$ , on obtient que :*

$$\begin{cases} L \cap \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1(L) = L \cap \sigma_m(L) \cap \dots \cap \sigma_1(L), \\ \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1(L) \text{ est un } 2, \dots, 2\text{-voisin de } L. \end{cases}$$

Lorsque  $m = 2$ , on a le résultat plus général suivant :

**Lemme 5.2.3.** *Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments de  $L$  tels que  $(x_1 \cdot x_1) = (x_2 \cdot x_2) = 4$ . On définit comme précédemment les symétries :*

$$\sigma_i(y) = y - \frac{(x_i \cdot y)}{2} x_i,$$

*qui transforment chacune  $L$  en un 2-voisin.*

*Alors selon la valeur de  $(x_1 \cdot x_2) \pmod{2}$ , on déduit la nature de  $L' = \sigma_1 \circ \sigma_2(L)$  :*

- si  $(x_1 \cdot x_2) \equiv 0 \pmod{2}$  avec  $x_1 = \pm x_2$  : alors  $L' = L$ .

- si  $(x_1 \cdot x_2) \equiv 0 \pmod{2}$  avec  $x_1 \neq \pm x_2$  : alors  $L'$  est un 2,2-voisin de  $L$ .
- si  $(x_1 \cdot x_2) \equiv 1 \pmod{2}$  : alors  $L'$  est un 4-voisin de  $L$ .

## 6. RÉSULTATS OBTENUS POUR LES CALCULS DE TRACES D'OPÉRATEURS DE HECKE.

**6.1. Tables des résultats obtenus.** Si l'on se donne  $A$  et  $n$  un groupe abélien et un entier bien choisis, pour  $\lambda$  un poids dominant arbitraire de  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ , les résultats précédents nous permettent de calculer :  $\mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n))$ . On a regroupé certains de ces résultats sous forme de tables disponibles à [34]. Les théorèmes suivants détaillent les résultats en question :

**Théorème 6.1.1.** Soient  $A$  le groupe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$  ( $i \leq 3$ ),  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  ( $p \leq 67$  premier) ou  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  ( $q \in \{4, 9, 25, 27, 49\}$ ), et  $\lambda = (a, b, c)$  ( $13 \geq a \geq b \geq c \geq 0$ ) un poids dominant de  $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R})$ . Alors les quantités :

$$(2a + 5, 2b + 3, 2c + 1, |A|^{a \mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_7))})$$

sont données par les tables de [34].

**Théorème 6.1.2.** Soient  $A$  le groupe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$  ( $i \leq 4$ ),  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  ( $p \leq 23$  premier) ou  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , et  $\lambda = (a, b, c, d)$  ( $12 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ ) un poids dominant de  $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$ . Alors les quantités :

$$(2a + 6, 2b + 4, 2c + 2, 2d, |A|^{a \mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_8))})$$

sont données par les tables de [34].

**Théorème 6.1.3.** Soient  $A$  le groupe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  ( $p \leq 13$  premier), et  $\lambda = (a, b, c, d)$  ( $12 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ ) un poids dominant de  $\mathrm{SO}_9(\mathbb{R})$ . Alors les quantités :

$$(2a + 7, 2b + 5, 2c + 3, 2d + 1, |A|^{a \mathrm{tr}(\mathrm{T}_A | \mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_9))})$$

sont données par les tables de [34].

Notons au passage que dans ces tables, de nombreux poids  $\lambda$  ne sont pas représentés : ce sont ceux pour lesquels la dimension de l'espace  $\mathcal{M}_{V_\lambda}(\mathrm{SO}_n)$  est nulle.

**6.2. Premières constatations autour de quelques exemples.** Partons de l'exemple de  $\mathrm{SO}_7$ . D'après [14, Table 12], si l'on exclut la représentation triviale  $W = \mathbb{C}$  (c'est-à-dire  $W = V_\lambda$  pour  $\lambda = (0, 0, 0)$ ), le "premier"  $W = V_\lambda$  tel que  $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) \neq 0$  est obtenu pour  $\lambda = (4, 4, 4)$ , auquel cas on a d'après [14] :  $\dim \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) = 1$ . Sur cet espace, la valeur propre de  $p^4 \mathrm{T}_p$  est :

$$(1 + p + p^2)\tau(p),$$

où  $\tau$  désigne la fonction de Ramanujan. On constate que c'est bien le résultat que l'on a trouvé.

Toujours d'après [14, Table 12], le "deuxième"  $W = V_\lambda$  tel que  $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) \neq 0$  est obtenu pour  $\lambda = (6, 0, 0)$ , et on a là encore d'après [14]  $\dim \mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) = 1$  dans ce cas. Sur cet espace, la valeur propre de  $p^6 \mathrm{T}_p$  est :

$$\tau_{18}(p) + (1 + p + p^2 + p^3)p^7,$$

où les coefficients  $\tau_k(p)$  sont les coefficients en  $q^p$  des formes modulaires normalisées pour  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  de poids  $k \leq 22$  (et en particulier  $\tau = \tau_{12}$ ). Là encore, on constate que c'est bien le résultat que l'on a trouvé.

De manière plus générale, donnons-nous  $W$  une représentation irréductible de  $\mathrm{SO}_7$ , et notons  $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C} F_i$ , où les  $F_i$  sont des éléments de  $\mathcal{M}_W(\mathrm{SO}_7)$  propres pour tous les opérateurs de Hecke  $\mathrm{T}_A$  (ce qui a bien un sens car les opérateurs de Hecke sont tous co-diagonalisables d'après [13, Ch. IV, §4]).

Certaines de ces formes  $F_i$  sont en fait associées à des formes automorphes pour des  $\mathbb{Z}$ -groupes "plus petits" que  $\mathrm{SO}_7$ , au sens de la théorie de l'endoscopie (nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le chapitre suivant). C'est par exemple le cas des deux

exemples précédents, où les valeurs propres recherchées se déduisent des valeurs propres de formes modulaires pour  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Dans d'autres cas, ce sont des valeurs propres de formes modulaires de Siegel de genre 2 pour  $Sp_4(\mathbb{Z})$  qui interviennent (voir [43], [44], [22], [1] et [52]). Contrairement aux cas des formes modulaires pour  $SL_2(\mathbb{Z})$ , leurs valeurs propres sont déjà difficiles à calculer, et ont fait l'objet de nombreux travaux récents (Raum–Ryan–Skoruppa–Tornaria [41], Faber–van der Geer [21], Chenevier–Lannes [13]).

Par exemple, d'après un résultat de Tsushima, si  $(j, k) \in \{(6, 8), (8, 8), (4, 10), (12, 6)\}$ , alors la dimension de l'espace des formes modulaires de Siegel de poids  $\text{Sym}^j \mathbb{C}^2 \otimes \det^k$  est 1. Suivant [13, Ch. IX], notons  $\tau_{j,k}(p)$  la valeur propre de l'opérateur  $p^{\frac{j+2k-6}{2}} K_p$  sur cet espace (l'opérateur  $K_p$  est assez proche de l'opérateur  $T_p$ , mais il serait trop long d'expliquer ici les subtilités de leurs différences). Ces valeurs propres ont été calculées par Faber–van der Geer pour  $p \leq 37$ , et par une méthode différente dans [13] pour  $p \leq 113$ .

D'autre part, d'après [14, Table 12], pour  $\lambda = (j + 2k - 3, 15, j + 1) = (a, b, c)$  et  $W = V_\lambda$  où  $(j, k)$  est l'un des 4 couples précédents, on a  $\dim \mathcal{M}_W(\text{SO}_7) = 1$ , et la valeur propre de  $p^a T_p$  sur cet espace est :

$$\tau_{j,k}(p) + p^{\frac{j+2k-18}{2}} \tau_{16}(p),$$

où  $\tau_{16}$  a été introduit précédemment. En particulier, nos calculs permettent de retrouver les valeurs de  $\tau_{j,k}(p)$  pour  $p \leq 67$  pour une méthode différente.

Nos calculs ne se limitent évidemment pas à des vérifications de résultats déjà obtenus. Leur intérêt principal est qu'ils permettent de calculer la trace de  $T_p$  sur l'espace  $\mathcal{M}_W^{\text{ne}}(\text{SO}_7) \subset \mathcal{M}_W(\text{SO}_7)$  engendré par les formes non-endoscopiques, qu'on explique plus en détail dans les chapitres suivants, et qu'on présente succinctement ici.

Le "premier"  $\lambda$  pour lequel  $\mathcal{M}_{V_\lambda}^{\text{ne}}(\text{SO}_7) \neq 0$  est  $\lambda = (9, 5, 2)$ . On a alors  $\dim(\mathcal{M}_{V_\lambda}^{\text{ne}}(\text{SO}_7)) = 1$ . Si on note  $\lambda_p$  la valeur propre de  $p^9 T_p$  sur  $\mathcal{M}_{V_\lambda}^{\text{ne}}(\text{SO}_7)$ , on a les résultats suivants :

$p$	2	3	5	7	11	13
$\lambda_p$	0	-304668	874314	452588136	-1090903017204	1624277793138

Les autres valeurs propres sont données dans les tables 2 à 5.

Ces calculs suggèrent que la représentation de Galois de dimension 6 mise en évidence par Bergström, Faber et van der Geer est associée à cette forme automorphe pour  $\text{SO}_7$ , ce qui répond à une question de ces auteurs (ce qui était une des motivations principales de ce travail).

Dans le chapitre suivant, nous rappelons plus en détail suivant [13] et [14] la contribution des formes endoscopiques dans  $\mathcal{M}_W(\text{SO}_n)$ .

Au final, nous ne donnerons des tables (équivalentes aux tables des théorèmes 6.1.1, 6.1.2 et 6.1.3) que pour les contributions non-endoscopiques.

Suivant Arthur, ces contributions s'expriment mieux en terme de certaines représentations automorphes pour les groupes linéaires  $\text{PGL}_m$ . Nos calculs permettent de donner des informations sur les "paramètres de Satake" de ces représentations automorphes.

## 7. LA PARAMÉTRISATION DE LANGLANDS–SATAKE

### 7.1. Les formules de Gross et la paramétrisation de Satake.

7.1.1. *La formule de Gross dans le cas général.* Nous renvoyons à Borel [7] et à Springer [50] pour les notions de groupe dual et de données radicielles des groupes réductifs. Nous renvoyons aussi aux études de l'isomorphisme de Satake faites par Gross [25] et par Satake [42]. Enfin, on suivra les notations utilisées dans [14, Ch. 3] et [13, Ch. VI].

On considère  $G$  un  $\mathbb{Z}_p$ -groupe semi-simple, et  $\widehat{G}$  son dual de Langlands (qui est un groupe semi-simple sur  $\mathbb{C}$ ). On note  $\Psi(G) = (X, \Phi, \Delta, X^\vee, \Phi^\vee, \Delta^\vee)$  sa donnée radicielle basée,

$\Psi(\widehat{G}) = (X^\vee, \Phi^\vee, \Delta^\vee, X, \Phi, \Delta)$  la donnée duale, et on note  $X_+ \subset X^\vee$  l'ensemble des poids dominants de  $G$ .

On rappelle que l'isomorphisme de Satake, introduit dans [42] et revisité par Langlands dans [31, §2], est un isomorphisme d'anneaux canonique :

$$\text{Sat} : \mathbb{H}_p(G) \otimes \mathbb{Z}[p^{-\frac{1}{2}}] \xrightarrow{\sim} \text{Rep}(\widehat{G}) \otimes \mathbb{Z}[p^{-\frac{1}{2}}],$$

où  $\text{Rep}(\widehat{G})$  désigne l'anneau de Grothendieck des représentations polynomiales de dimension finie de  $\widehat{G}$ .

Si l'on désigne par  $\widehat{G}(\mathbb{C})_{\text{ss}}$  l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semi-simples de  $\widehat{G}(\mathbb{C})$ , alors pour  $c \in \widehat{G}(\mathbb{C})_{\text{ss}}$  on possède une application  $V \mapsto \text{trace}(c|V)$  qui associe à une  $\mathbb{C}$ -représentation de dimension finie  $V$  de  $\widehat{G}$  la trace de  $c$  dans  $V$ . Cette application s'étend en un homomorphisme d'anneaux  $\text{tr}(c) : \text{Rep}(\widehat{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ . D'après un résultat de Chevalley, l'application  $\text{tr} : \widehat{G}(\mathbb{C})_{\text{ss}} \rightarrow \text{Hom}_{\text{anneaux}}(\text{Rep}(\widehat{G}), \mathbb{C})$  est une bijection. On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 7.1.1.** *L'application  $c \mapsto \text{tr}(c) \circ \text{Sat}$  définit une bijection :*

$$\widehat{G}(\mathbb{C})_{\text{ss}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{anneaux}}(\mathbb{H}_p(G), \mathbb{C}).$$

La théorie de Cartan–Weyl pour les représentations de plus haut poids nous donne une première  $\mathbb{Z}$ -base naturelle de  $\text{Rep}(\widehat{G})$  indexée par  $X_+$ , à savoir les représentations irréductibles de la forme  $V_\lambda$ .

Pour  $\lambda \in X_+$ , on note  $[V_\lambda]$  la classe de  $V_\lambda$  dans  $\text{Rep}(\widehat{G})$ . De plus, si l'on se donne  $\widehat{T}$  un tore maximal de  $\widehat{G}$ , et  $\widehat{B}$  un sous-groupe de Borel de  $\widehat{G}$  contenant  $\widehat{T}$  (de sorte que  $\Psi(\widehat{G})$  s'identifie à  $\Psi(\widehat{G}, \widehat{T}, \widehat{B})$ ), et si  $\mu \in X$ , on désigne par  $V_\lambda(\mu) \subset V_\lambda$  le sous-espace propre de  $V_\lambda$  pour  $\mu$  sous l'action de  $\widehat{T}$ .

Comme  $G$  est réductif sur  $\mathbb{Z}_p$ , il existe une décomposition de Cartan de la forme :

$$G(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{\lambda \in X_+} G(\mathbb{Z}_p)\lambda(p)G(\mathbb{Z}_p).$$

Pour  $\lambda \in X$ , on note  $c_\lambda \in \mathbb{H}_p(G)$  la fonction caractéristique de la double classe  $G(\mathbb{Z}_p)\lambda(p)G(\mathbb{Z}_p)$ . Les  $c_\lambda$  ainsi définis forment une  $\mathbb{Z}_p$ -base de  $\mathbb{H}_p(G)$  pour  $\lambda$  décrivant  $X_+$ , avec des relations de la forme :

$$(\forall \lambda, \mu \in X_+)(\exists (n_{\lambda, \mu, \nu}) \in \mathbb{Z}) \quad c_\lambda \cdot c_\mu = c_{\lambda+\mu} + \sum_{\nu < \lambda+\mu} n_{\lambda, \mu, \nu} c_\nu.$$

Le lien entre ces deux  $\mathbb{Z}_p$ -bases de  $\mathbb{H}_p(G)$  et  $\text{Rep}(\widehat{G})$  est donné grâce à l'isomorphisme de Satake comme suit :

**Proposition 7.1.2** (La formule de Gross). *Soit  $G$  un  $\mathbb{Z}_p$ -groupe semi simple déployé et  $X_+$  l'ensemble ordonné des poids dominants de  $\widehat{G}$ . Soit  $\lambda \in X_+$ . On note  $\rho$  la demi somme des racines positives de  $G$ . Alors on dispose d'une identité de la forme :*

$$p^{(\rho, \lambda)} [V_\lambda] = \text{Sat}(c_\lambda) + \sum_{\{\mu \in X_+, \mu < \lambda\}} d_\lambda(\mu) \text{Sat}(c_\mu)$$

pour certains entiers  $d_\lambda(\mu)$  dépendant de  $p$ , qu'on détaille plus loin.

En particulier, on a les résultats suivants :

- (i) Si  $\lambda$  est un élément minimal, alors :  $p^{(\rho, \lambda)} [V_\lambda] = \text{Sat}(c_\lambda)$ .
- (ii) Si  $\mu \in X_+$  tel que  $\dim(V_\lambda(\mu)) = 1$ , alors  $d_\lambda(\mu) = 1$ .
- (iii) Si  $V_\lambda = \text{Lie}(G)$  est la représentation adjointe de  $\widehat{G}$ , alors :  $d_\lambda(0) = \sum_i p^{m_i-1}$ , où les  $m_i$  sont les exposants du groupe de Weyl de  $G$  (voir [8, Ch. V, §6.2]).



*Démonstration.* Le cas où  $G$  est adjoint avait déjà été traité par Gross dans [25], et Chenevier et Lannes ont étendu ce résultat au cas où  $G$  est semi-simple dans [13, Ch. VI, lemme 2.7], en se ramenant au cas du groupe adjoint  $G/Z(G)$ , où  $Z(G)$  désigne le centre de  $G$ .  $\square$

Les coefficients  $d_\lambda(\mu)$  qui interviennent dans la proposition précédente ont été calculés par Lusztig et Kato. On a le résultat suivant :

**Proposition 7.1.3.** *On reprend les mêmes notations qu'à la proposition précédente. On note  $\rho$  la demi somme des racines positives de  $G$ , et  $\rho^\vee$  celles des coracines positives de  $G$ . Pour  $\mu \in X_+$ , on définit le polynôme  $\widehat{P}$  comme :*

$$\widehat{P}(\mu) = \sum_{\substack{\mu = \sum_{\alpha \in \Phi^+} n(\alpha^\vee) \alpha^\vee}} p^{-\sum n(\alpha^\vee)},$$

qui est un polynôme en  $p^{-1}$  qui considère le nombre d'expressions de  $\mu$  comme somme à coefficients positifs de coracines de  $G$ . Si  $\mu$  ne peut pas s'écrire sous cette forme (ce qui est le cas si  $\mu$  est combinaison linéaire non-nulle à coefficients négatifs d'éléments de  $\Phi^{\vee+}$  par exemple), alors  $\widehat{P}(\mu) = 0$ . Comme on considère la somme vide dans les possibilités, alors  $\widehat{P}(0) = 1$ .

Les coefficients  $d_\lambda(\mu)$  sont alors donnés par la formule suivante :

$$d_\lambda(\mu) = p^{\langle \rho, \lambda - \mu \rangle} \sum_{\sigma \in W} \varepsilon(\sigma) \cdot \widehat{P}(\sigma(\lambda + \rho^\vee) - (\mu + \rho^\vee)),$$

où  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature sur le groupe de Weyl  $W$  de  $\widehat{G}$ .

*Démonstration.* Voir Kato dans [29], qui reprend des résultats de Lusztig [33], Kostant [23, p. 421] et Brylinski [9].  $\square$

On donne dans [36] le programme informatique que l'on a utilisé pour calculer explicitement les quantités  $d_\lambda(\mu)$  selon le choix de  $G$ .

**7.1.2. Le groupe spécial orthogonal de dimension paire.** Soit  $r \geq 2$  un entier,  $U = (\mathbb{Z}_p)^r$ , et  $V = \mathrm{H}(U)$  le module hyperbolique sur  $U$ . On pose  $G = \mathrm{SO}_V$  le sous-groupe des automorphismes de  $V$  préservant la forme quadratique définie sur  $V$  et de déterminant 1. On désigne par  $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$  une  $\mathbb{Z}_p$ -base de  $U$ , et  $(e_i^*)$  sa base duale. Alors on peut définir une donnée radicielle basée de  $G$  en se donnant :

- pour le tore  $T$  : le sous-groupe de  $G$  des éléments préservant les droites engendrées par les  $e_i$  et celles engendrées par les  $e_j^*$ .
- pour le groupe de Borel  $B$  : le sous- $\mathbb{Z}_p$ -groupe de  $G$  des éléments préservant le drapeau complet de  $U$  associé à  $\{e_1\}, \{e_1, e_2\}, \dots, \{e_1, \dots, e_r\}$ .

On pose  $\varepsilon_i \in X^*(T)$  le caractère de  $T$  agissant sur la droite engendrée par  $e_i$  (ce qui veut dire que  $T$  agit sur la droite engendrée par  $e_j^*$  par le caractère  $-\varepsilon_j$ ). On pose enfin  $(\varepsilon_j^*) \in X_*(T)$  la famille duale de  $(\varepsilon_i) \in X^*(T)$ . Alors :

- les ensembles  $X^*(T)$  et  $X_*(T)$  s'identifient respectivement à  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_i \mathbb{Z}$  et à  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_i^* \mathbb{Z}$  (et en particulier sont isomorphes).
- l'ensemble  $\Phi(G, T)$  est constitué des  $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ , avec la dualité :  $(\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j)^\vee = \pm \varepsilon_i^* \pm \varepsilon_j^*$  (pour  $1 \leq i < j \leq r$ ).
- l'ensemble  $\Delta(G, T, B)$  est constitué des  $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  (pour  $1 \leq i \leq r-1$ ) et de  $\varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r$ .
- l'ensemble  $\Phi^+$  est constitué des  $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$  (pour  $1 \leq i < j \leq r$ ).
- les éléments  $\rho$  et  $\rho^\vee$  sont donnés par :  $\rho = (r-1)\varepsilon_1 + (r-2)\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{r-1}$  et  $\rho^\vee = (r-1)\varepsilon_1^* + (r-2)\varepsilon_2^* + \dots + \varepsilon_{r-1}^*$ .
- le dual de Langlands de  $G$  est donné par :  $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$ .
- le groupe de Weyl  $W$  de  $\widehat{G}$  s'identifie à :  $\mathcal{S}_r \times (\{\pm 1\}^r)^0$ .

En particulier, l'ensemble des copoids dominants de  $G$  est donné par :

$$X_+ = \left\{ \sum_i m_i \varepsilon_i^* \mid m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{r-1} \geq |m_r| \right\}.$$

Pour  $1 \leq i \leq r$ , on définit les éléments  $\lambda_i \in X_+$  par :  $\lambda_i = \varepsilon_1^* + \cdots + \varepsilon_i^*$ .

Enfin, on pose  $\tau$  l'automorphisme de  $\Psi(G)$  qui fixe les  $\varepsilon_i$  pour  $1 \leq i \leq r-1$ , et qui envoie  $\varepsilon_r$  sur  $-\varepsilon_r$  (qui est une involution sur  $X_+$ ).

Les opérateurs de Hecke de  $H(G)$  sont donnés par la proposition suivante :

**Proposition 7.1.4.** *Soient  $\lambda = \sum_i m_i \varepsilon_i^* \in X_+$  et  $A_\lambda = \prod_{i=1}^r (\mathbb{Z}/p^{|m_i|}\mathbb{Z})$ .*

*Alors l'opérateur  $T_{A_\lambda} \in H(G)$  est donné par :*

$$T_{A_\lambda} = \sum_{\mu \in \{\lambda, \tau(\lambda)\}} c_\mu.$$

En particulier, on a les égalités :

- (i)  $(\forall 1 \leq i \leq r-1) c_{\lambda_i} = T_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^i}$
- (ii)  $c_{\lambda_r} + c_{\tau(\lambda_r)} = T_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}$
- (iii)  $(\forall m \geq 0) c_{m\lambda_1} = T_{p^m}$

*Démonstration.* Voir [13, Ch. VI, Scholie 2.9]. □

**Proposition 7.1.5** (Le poids de la représentation standard). *On considère  $V_{\text{St}}$  la représentation standard de  $\widehat{G} = \text{SO}_{2r}(\mathbb{C})$ . C'est la représentation de plus haut poids  $\lambda_1$ .*

*De plus, pour  $2 \leq i \leq r-1$ , la représentation  $\Lambda^i V_{\text{St}}$  est irréductible et correspond à la représentation de plus haut poids  $\lambda_i$ .*

*Enfin, la représentation  $\Lambda^r V_{\text{St}}$  correspond à la somme des représentations  $V_{\lambda_r}$  et  $V_{\tau(\lambda_r)}$ .*

*Démonstration.* Découle de [23, Théorème 19.2]. □

On souhaite exprimer, grâce aux formules de Gross, les représentation  $V_{\text{St}}$  et  $\Lambda^i V_{\text{St}}$  en fonction des opérateurs de Hecke  $T_A$ . Pour  $r = 4$  (c'est-à-dire pour  $\widehat{G} = \text{SO}_8(\mathbb{C})$ ), on a la proposition suivante :

**Proposition 7.1.6.** *On reprend les mêmes notations, avec  $r = 4$ . On considère les éléments  $T_A \in H(G)$ . On a alors les égalités suivantes :*

- (i)  $p^3 [V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_p)$
- (ii)  $p^5 [\Lambda^2 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p}) + (p^4 + 2p^2 + 1)$
- (iii)  $p^6 [\Lambda^3 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p,p}) + (p^2 + p + 1) \text{Sat}(T_p)$
- (iv)  $p^6 [\Lambda^4 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p,p,p}) + 2 \text{Sat}(T_{p,p}) + 2(p^4 + p^2 + 1)$

*Démonstration.* On utilise la proposition 7.1.5 et les formules de Gross. On a :

Pour le (i) : il n'y a pas de poids  $\mu < \lambda_1$ , et ainsi on a les égalités :

$$\begin{aligned} p^3 [V_{\text{St}}] &= p^{(\rho, \lambda_1)} [V_{\lambda_1}] = \text{Sat}(c_{\lambda_1}) + \sum_{\{\mu \in X_+, \mu < \lambda_1\}} d_{\lambda_1}(\mu) \text{Sat}(c_\mu) \\ &= \text{Sat}(c_{\lambda_1}) = \text{Sat}(T_p) \end{aligned}$$

Pour le (ii) : il y a un seul poids  $\mu < \lambda_2$ , à savoir  $\mu = 0$ . On déduit ainsi :

$$\begin{aligned} p^5 [\Lambda^2 V_{\text{St}}] &= p^{(\rho, \lambda_2)} [V_{\lambda_2}] = \text{Sat}(c_{\lambda_2}) + \sum_{\{\mu \in X_+, \mu < \lambda_2\}} d_{\lambda_2}(\mu) \text{Sat}(c_\mu) \\ &= \text{Sat}(c_{\lambda_2}) + d_{\lambda_2}(0) = \text{Sat}(T_{p,p}) + (p^4 + 2p^2 + 1) \end{aligned}$$

Pour le (iii) : il y a un seul poids  $\mu < \lambda_3$ , à savoir  $\mu = \lambda_1$ . On déduit ainsi :

$$\begin{aligned} p^6 [\Lambda^3 V_{\text{St}}] &= p^{\langle \rho, \lambda_3 \rangle} [V_{\lambda_3}] = \text{Sat}(c_{\lambda_3}) + \sum_{\{\mu \in X_+, \mu < \lambda_3\}} d_{\lambda_3}(\mu) \text{Sat}(c_\mu) \\ &= \text{Sat}(c_{\lambda_3}) + d_{\lambda_3}(\lambda_1) \text{Sat}(c_{\lambda_1}) = \text{Sat}(T_{p,p,p}) + (p^2 + p + 1) \text{Sat}(T_p) \end{aligned}$$

Pour le (iv) : il y a deux poids  $\mu$  inférieurs à  $\lambda_4$  ou à  $\tau(\lambda_4)$ , à savoir  $\mu = \lambda_2$  ou  $\mu = 0$  dans les deux cas. On déduit ainsi :

$$\begin{aligned} p^6 [\Lambda^4 V_{\text{St}}] &= p^6 ([V_{\lambda_4}] + [V_{\tau(\lambda_4)}]) = p^{\langle \rho, \lambda_4 \rangle} [V_{\lambda_4}] + p^{\langle \rho, \tau(\lambda_4) \rangle} [V_{\tau(\lambda_4)}] \\ &= \text{Sat}(c_{\lambda_4}) + \sum_{\{\mu \in X_+, \mu < \lambda_4\}} d_{\lambda_4}(\mu) \text{Sat}(c_\mu) \\ &\quad + \text{Sat}(c_{\tau(\lambda_4)}) + \sum_{\{\mu \in X_+, \mu < \tau(\lambda_4)\}} d_{\tau(\lambda_4)}(\mu) \text{Sat}(c_\mu) \\ &= \text{Sat}(c_{\lambda_4}) + \text{Sat}(c_{\tau(\lambda_4)}) + (d_{\lambda_4}(\lambda_2) + d_{\tau(\lambda_4)}(\lambda_2)) \text{Sat}(c_{\lambda_2}) \\ &\quad + (d_{\lambda_4}(0) + d_{\tau(\lambda_4)}(0)) \\ &= \text{Sat}(T_{p,p,p,p}) + 2 \text{Sat}(T_{p,p}) + 2 (p^4 + p^2 + 1) \end{aligned}$$

Les coefficients  $d_\lambda(\mu)$  ont été calculés à l'ordinateur grâce à la proposition 7.1.3 et au programme [36].  $\square$

**7.1.3. Le groupe spécial orthogonal en dimension impaire.** Soit  $r \geq 1$  un entier,  $U = (\mathbb{Z}_p)^r$ ,  $H(U)$  le module hyperbolique sur  $U$  et  $V = H(U) \oplus \mathbb{Z}_p$  (où on a muni  $\mathbb{Z}_p$  de la forme quadratique  $x \mapsto x^2$ ). On pose  $G = \text{SO}_V$  le sous-groupe des automorphismes de  $V$  préservant la forme quadratique définie sur  $V$  et de déterminant 1.

De la même manière qu'au paragraphe précédent, les formules de Gross ainsi que [23, Théorème 17.5] permettent d'exprimer les représentation  $V_{\text{St}}$  et  $\Lambda^i V_{\text{St}}$  en fonction des opérateurs de Hecke  $T_A$ . Pour  $r = 3$  ou  $r = 4$  (c'est-à-dire pour  $\widehat{G} = \text{Sp}_6(\mathbb{C})$  ou  $\widehat{G} = \text{Sp}_8(\mathbb{C})$ ), on a les propositions suivantes :

**Proposition 7.1.7.** *On reprend les mêmes notations, avec  $r = 3$ . On considère les éléments  $T_A \in H(G)$ . On a alors les égalités suivantes :*

- (i)  $p^{5/2} [V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_p)$
- (ii)  $p^4 [\Lambda^2 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p}) + (p^4 + p^2 + 1)$
- (iii)  $p^{9/2} [\Lambda^3 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p,p}) + (p^2 + 1) \cdot \text{Sat}(T_p)$

**Proposition 7.1.8.** *On reprend les mêmes notations, avec  $r = 4$ . On considère les éléments  $T_A \in H(G)$ . On a alors les égalités suivantes :*

- (i)  $p^{7/2} [V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_p)$
- (ii)  $p^6 [\Lambda^2 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p}) + (p^6 + p^4 + p^2 + 1)$
- (iii)  $p^{15/2} [\Lambda^3 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p,p}) + (p^4 + p^2 + 1) \cdot \text{Sat}(T_p)$
- (iv)  $p^8 [\Lambda^4 V_{\text{St}}] = \text{Sat}(T_{p,p,p,p}) + (p^2 + 1) \cdot \text{Sat}(T_{p,p}) + (p^8 + p^6 + 2 \cdot p^4 + p^2 + 1)$

**7.2. Les formes automorphes et la paramétrisation de Langlands.** Soient  $G$  un  $\mathbb{C}$ -groupe semi-simple et  $\mathfrak{g}$  sa  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie. On note  $U(\mathfrak{g})$  son algèbre enveloppante,  $Z(U(\mathfrak{g}))$  le centre de  $U(\mathfrak{g})$ . Soient enfin  $\widehat{G}$  le dual de Langlands de  $G$ , et  $\widehat{\mathfrak{g}}$  sa  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie.

Suivant Harish-Chandra et Langlands, on rappelle dans la proposition suivante comment voir les caractères centraux de  $U(\mathfrak{g})$ -modules comme des classes de conjugaison semi-simples dans  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , grâce à l'isomorphisme de Harish-Chandra :

**Proposition 7.2.1** (L'isomorphisme de Harish-Chandra). *Avec les mêmes notations, on pose  $\text{Pol}(\widehat{\mathfrak{g}})$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions polynomiales sur  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Elle est munie d'une action naturelle de  $\widehat{G}(\mathbb{C})$ , et on note  $\text{Pol}(\widehat{\mathfrak{g}})^{\widehat{G}}$  l'algèbre des invariants. L'isomorphisme de Harish-Chandra est un isomorphisme canonique :*

$$\text{HC} : \mathbb{Z}(\mathbb{U}(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\sim} \text{Pol}(\widehat{\mathfrak{g}})^{\widehat{G}}.$$

*L'isomorphisme de Harish-Chandra induit une bijection canonique :*

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{Z}(\mathbb{U}(\mathfrak{g})), \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{g}}_{\text{ss}},$$

où  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{ss}}$  désigne l'ensemble des classes de conjugaisons d'éléments semi-simples de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ .

*Démonstration.* Voir [31, §2]. □

Exemple : Comme expliqué dans [13, Ch. VI, §3.2] par exemple, les éléments de  $X \otimes \mathbb{C}$  peuvent être vus comme des éléments de  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{ss}}$ . Soient  $\lambda$  un poids dominant de  $G$ , et  $W$  la  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible de  $G$  de plus haut poids  $\lambda$ . Cette représentation munit  $W$  d'une structure de  $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ -module. Ce module est simple et admet un caractère central. La classe de conjugaison dans  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{ss}}$  qui correspond à ce caractère est la classe de conjugaison de  $\lambda + \rho$  (où  $\rho$  est la demi-somme des racines positives de  $G$ ).

On définit comme suit les différents ensembles de représentations automorphes :

**Définition 7.2.2.** *Soit  $G$  un  $\mathbb{Z}$ -groupe semi-simple. On définit une représentation du couple  $(G(\mathbb{R}), \mathbb{H}(G))$  comme la donnée d'un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire de  $G(\mathbb{R})$ , et d'une structure de module à droite sur  $\mathbb{H}(G)$  commutant à l'action de  $G(\mathbb{R})$ .*

*On note alors  $\Pi(G)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations du couple  $(G(\mathbb{R}), \mathbb{H}(G))$  de la forme  $\pi = \pi_{\infty} \otimes \pi_V$ , où  $\pi_{\infty}$  est une représentation unitaire irréductible de  $G(\mathbb{R})$ , et  $\pi_V$  est une représentation irréductible complexe de dimension finie de  $\mathbb{H}(G)^{\text{opp}}$  (donc de dimension 1).*

*On note aussi  $\Pi_{\text{disc}}(G)$  l'ensemble des représentations automorphes  $\pi$  discrètes de  $G$  telles que  $\pi_p^{G(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$  (le sous-espace des invariants de  $\pi_p$  sous l'action de  $G(\mathbb{Z}_p)$ ) pour tout  $p$  premier. L'application  $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(G) \mapsto \pi^{G(\widehat{\mathbb{Z}})}$  (le sous-espace des invariants de  $\pi$  sous l'action de  $G(\widehat{\mathbb{Z}})$ ) réalise  $\Pi_{\text{disc}}(G)$  comme un sous-ensemble de  $\Pi(G)$ . On note enfin  $\Pi_{\text{cusp}}(G)$  le sous-ensemble de  $\Pi_{\text{disc}}(G)$  des représentations automorphes cuspidales.*

Si l'on se donne  $H$  un  $\mathbb{C}$ -groupe, on peut lui associer un ensemble  $\mathcal{X}(H)$  de collections de classes de conjugaison semi-simples comme suit :

**Définition 7.2.3.** *Soit  $H$  un  $\mathbb{C}$ -groupe semi-simple, et  $\mathfrak{h}$  son algèbre de Lie complexe. On note  $H(\mathbb{C})_{\text{ss}}$  et  $\mathfrak{h}_{\text{ss}}$  les classes de  $H(\mathbb{C})$ -conjugaison d'éléments semi-simples respectivement de  $H(\mathbb{C})$  et de  $\mathfrak{h}$ .*

*On note alors  $\mathcal{X}(H)$  l'ensemble des familles  $(c_v)_{v \in P \cup \{\infty\}}$ , où  $c_{\infty} \in \mathfrak{h}_{\text{ss}}$  et  $c_p \in H(\mathbb{C})_{\text{ss}}$  pour tout  $p \in P$ .*

*Si on possède un morphisme de  $\mathbb{C}$ -groupe  $r : H \rightarrow H'$ , on note encore par  $r$  l'application définie de  $\mathcal{X}(H)$  dans  $\mathcal{X}(H')$  envoyant  $(c_v)$  sur  $(r(c_v))$ .*

Suivant Langlands dans [31], on possède une application  $\Pi(G) \rightarrow \mathcal{X}(\widehat{G})$  :

**Proposition-Définition 7.2.4** (Paramétrisation de Langlands). *On dispose d'une application canonique :*

$$\begin{aligned} c : \Pi(G) &\rightarrow \mathcal{X}(\widehat{G}) \\ \pi &\mapsto (c_v(\pi)) \end{aligned}$$

*définie comme suit. Si  $\pi = \pi_{\infty} \otimes \pi_V \in \Pi(G)$ , on pose  $c_{\infty}(\pi)$  le caractère infinitésimal de  $\pi_{\infty}$  (d'après Harish-Chandra). De plus, l'isomorphisme de Satake entraîne que  $\mathbb{H}(G)$  est commutative, donc  $\pi_V$  est de dimension 1 et peut être vue comme un homomorphisme*

d'anneaux de  $H(G)$  dans  $\mathbb{C}$ . Sa restriction à  $H_p(G)$  est associée par la proposition 7.1.1 à un unique élément  $c_p(\pi) \in \widehat{G}(\mathbb{C})_{\text{ss}}$ .

L'application  $c$  ainsi définie est à fibres finies.

*Démonstration.* Voir [13, Ch. VI, §4.2]. □

En particulier, le caractère  $c_\infty(\pi)$  nous permet de définir la notion de représentation algébrique ou autoduale dans le cas où  $G$  est le groupe  $\text{PGL}_n$  :

**Définition 7.2.5** (Représentations algébriques). *Soit  $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(\text{PGL}_n)$ . Les valeurs propres du caractère  $c_\infty(\pi)$  sont appelés les poids de  $\pi$ .*

*Une représentation  $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(\text{PGL}_n)$  est dite algébrique si ses poids sont des demi-entiers dont les différences deux à deux sont des entiers. On note  $\Pi_{\text{alg}}(\text{PGL}_n)$  le sous-ensemble de  $\Pi_{\text{cusp}}(\text{PGL}_n)$  des représentations algébriques.*

**Définition 7.2.6** (Représentations autoduales). *Soit  $\pi \in \Pi(\text{PGL}_n)$ . On dit que la représentation  $\pi$  est autoduale si elle est isomorphe à sa contragrédiente.*

*On note respectivement  $\Pi^\perp(\text{PGL}_n)$ ,  $\Pi_{\text{disc}}^\perp(\text{PGL}_n)$ ,  $\Pi_{\text{cusp}}^\perp(\text{PGL}_n)$  et  $\Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_n)$  les sous-ensembles de  $\Pi(\text{PGL}_n)$ ,  $\Pi_{\text{disc}}(\text{PGL}_n)$ ,  $\Pi_{\text{cusp}}(\text{PGL}_n)$  et  $\Pi_{\text{alg}}(\text{PGL}_n)$  constitués des représentations autoduales.*

Suivant [13, Ch. IV, §3.2] par exemple, si l'on se donne une forme automorphe propre pour tous les opérateurs de Hecke, on peut lui associer une représentation automorphe discrète : il s'agit de la représentation automorphe engendrée par la forme automorphe propre considérée. Les formules de Gross et l'isomorphisme d'Harish-Chandra nous permettent de relier les valeurs propres associés aux opérateurs de Hecke d'une forme automorphe propre avec les paramètres de Satake de la représentation automorphe qu'elle engendre. On détaille ci-dessous ce lien dans le cas des représentations automorphes pour  $\text{SO}_8$ .

Exemple : Soient  $G = \text{SO}_8$ ,  $\lambda = \sum_{i=1}^4 m_i \varepsilon_i$  (suivant les notations adoptées précédemment dans le cas du groupe spécial orthogonal en dimension paire, avec  $r = 4$ ), et  $W$  la représentation irréductible de  $\text{SO}_8(\mathbb{C})$  de plus haut poids  $\lambda$ . Soient  $f \in \mathcal{M}_W(\text{SO}_8)$  une forme propre, et  $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(\text{SO}_8)$  la représentation engendrée.

Le caractère infinitésimal  $c_\infty(\pi)$  correspond à la classe de conjugaison de  $\lambda + \rho$ , et ses valeurs propres dans la représentation standard sont les

$$\pm(m_i + 4 - i), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Posons de plus :  $T_p(f) = \lambda_p f, \dots, T_{p, \dots, p}(f) = \lambda_{p, \dots, p} f$ . Alors on a les relations :

$$\begin{aligned} (i) \quad & p^3 \text{Trace}(c_p(\pi) | V_{\text{St}}) = \lambda_p \\ (ii) \quad & p^5 \text{Trace}(c_p(\pi) | \Lambda^2 V_{\text{St}}) = \lambda_{p,p} + (p^4 + 2 \cdot p^2 + 1) \\ (iii) \quad & p^6 \text{Trace}(c_p(\pi) | \Lambda^3 V_{\text{St}}) = \lambda_{p,p,p} + (p^2 + p + 1) \cdot \lambda_p \\ (iv) \quad & p^6 \text{Trace}(c_p(\pi) | \Lambda^4 V_{\text{St}}) = \lambda_{p,p,p,p} + 2 \cdot \lambda_{p,p} + 2 \cdot (p^4 + p^2 + 1) \end{aligned}$$

qui découlent directement de la proposition 7.1.6.

**7.3. La conjecture d'Arthur–Langlands.** Si l'on se donne  $r : \widehat{G} \rightarrow \text{SL}_n$  une  $\mathbb{C}$ -représentation, celle-ci induit une application  $\mathcal{X}(\widehat{G}) \rightarrow \mathcal{X}(\text{SL}_n)$ ,  $(c_v) \mapsto (r(c_v))$  et on notera  $\psi(\pi, r) = r(c(\pi)) \in \mathcal{X}(\text{SL}_n)$  son image, appelée paramètre de Langlands–Satake du couple  $(\pi, r)$ .

À la manière de [13, §IV.4], on définit l'ensemble  $\mathcal{X}_{\text{AL}}(\text{SL}_n)$  comme suit :

**Proposition–Définition 7.3.1.** *On pose  $\mathcal{X}_{\text{AL}}(\text{SL}_n)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{X}(\text{SL}_n)$  des éléments la forme  $\pi_1 [d_1] \oplus \pi_2 [d_2] \oplus \dots \oplus \pi_k [d_k]$ , pour un quadruplet  $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$ , où :*

- les  $n_i$  et les  $d_i$  sont des entiers positifs vérifiant  $\sum_i n_i d_i = n$  ;
- les  $\pi_i$  sont des éléments de  $\Pi_{\text{cusp}}(\text{PGL}_{n_i})$ .

et définis par les égalités :

$$(\oplus_i \pi_i[d_i])_v = \bigoplus c_v(\pi_i) \otimes \text{Sym}^{d_i-1}(e_v)$$

pour tout  $v \in P \cup \{\infty\}$ , avec  $e_\infty = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $e_p = \begin{pmatrix} p^{-1/2} & 0 \\ 0 & p^{1/2} \end{pmatrix}$  pour tout  $p$  premier.

Si on se donne deux écritures  $\oplus_{i=1}^k \pi_i[d_i] = \oplus_{j=1}^l \pi'_j[d'_j]$  dans  $\mathcal{X}(\text{SL}_n)$ , alors  $k = l$  et il existe une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_k$  telle que  $(\pi'_i, d'_i) = (\pi_{\sigma(i)}, d_{\sigma(i)})$ .

*Démonstration.* Ce résultat avait été conjecturé par Langlands [32] et démontré par Jacquet–Shalika [27].  $\square$

Suivant ces notations, on dira qu'un élément  $\pi$  de  $\mathcal{X}_{\text{AL}}(\text{SL}_n)$  est non endoscopique si son quadruplet  $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$  vérifie  $k = 1$  et  $d_1 = 1$ .

Avec ces notations, on a la conjecture suivante :

**Conjecture 7.3.2** (Conjecture d'Arthur–Langlands). *Soient  $G$  un  $\mathbb{Z}$ -groupe semi-simple et  $r : \widehat{G} \rightarrow \text{SL}_n$  une  $\mathbb{C}$ -représentation. Si  $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(G)$ , alors  $\psi(\pi, r) \in \mathcal{X}_{\text{AL}}(\text{SL}_n)$ .*

**Théorème 7.3.3.** *La conjecture d'Arthur–Langlands est vraie pour  $G = \text{SO}_n$  et  $r = V_{\text{St}}$ .*

*Démonstration.* Ce théorème est le produit de travaux de nombreux auteurs (Arthur [4], Langlands, Kottwitz, Shelstad [47] [48] [49], Waldspurger [54] [55] [39] [30], Ngô [40], Lafforgue, Chaudouard [10] [11], Mœglin, Mezo [37] [38]), culminant par les travaux récents d'Arthur et Waldspurger.

L'énoncé ci-dessus, concernant  $\text{SO}_n$ , est dû à Taïbi [51] et repose sur [3] et les travaux de Kaletha [28] et Arancibia–Mœglin–Renard [2].  $\square$

Lorsque  $G$  est classique et que  $r$  est la représentation standard  $V_{\text{St}}$  de  $\widehat{G}$ , pour tout élément  $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(G)$  on a une égalité de la forme :

$$\psi(\pi, \text{St}) = \bigoplus \pi_i[d_i]$$

où les  $\pi$  sont autoduales. Si  $G = \text{SO}_n$ , on constate sur les caractères infinitésimaux qu'elles sont algébriques, de sorte que les  $\pi_i$  sont des éléments de  $\Pi_{\text{alg}}^{\perp}(\text{PGL}_{n_i})$  (voir [14, Lemma 2.23]) : la condition d'autodualité des  $\pi_i$  a été démontrée par Arthur, et le choix du caractère infinitésimal de  $\pi$  impose que les  $\pi_i$  soient algébriques. De plus, on appellera “poids de  $\pi$ ” les valeurs propres du caractère infinitésimal de  $\psi(\pi, \text{St})$ .

L'étude faite dans [14] a pour but de déterminer pour  $n = 7, 8$  ou  $9$  comment s'exprime tout élément de  $\Pi_{\text{disc}}(\text{SO}_n)$  grâce aux éléments de  $\Pi_{\text{alg}}^{\perp}(\text{PGL}_N)$  ( $N \leq n$ ). Plus précisément, donnons-nous un tel  $n$  et posons  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ . Posons  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_m)$  avec  $w_1 > \dots > w_m \geq 0$  des entiers positifs ou nuls de même parité que  $n$ . On désigne par  $\Pi_{\bar{w}}(\text{SO}_n)$  l'ensemble des éléments de  $\Pi_{\text{disc}}(\text{SO}_n)$  dont les poids sont les  $\pm \frac{w_i}{2}$ . Alors les résultats de [14] permettent de calculer le cardinal de  $\Pi_{\bar{w}}(\text{SO}_n)$ , et d'exprimer pour chacun de ses éléments le quadruplet  $(k, (n_i), (d_i), (\pi_i))$  associé par la conjecture d'Arthur–Langlands. Soulignons au passage que les résultats conditionnels de [14] (les énoncés Theorem\* et Theorem\*\*) sont maintenant inconditionnels grâce aux résultats récents des auteurs cités ci-dessus (notamment [51]).

On renvoie à [14, Tables 12 à 14] pour une liste des représentations ainsi décrites dans les cas où les  $w_i$  sont impairs, avec  $n = 7$  ou  $9$ , pour certaines valeurs de  $\bar{w}$ . La méthode énoncée dans [14, Chapitres 5, 6 et 7] nous permet de trouver l'ensemble des représentations de poids  $\pm \frac{w_i}{2}$  dans les autres cas. On donne dans la table 1 ci-dessous la décomposition de tous les éléments de  $\Pi_{(w_1, w_2, w_3, w_4)}(\text{SO}_9)$ , où les  $w_i$  sont des entiers impairs tels que  $25 = w_1 > w_2 > w_3 > w_4 > 0$ , choisis de telle sorte qu'il existe un élément de  $\Pi_{\text{alg}}^{\perp}(\text{PGL}_8)$  dont les poids sont les  $\pm w_i/2$ .



Les tables de [14] susmentionnées, ainsi que les tables 1 à 10 du présent article, font intervenir les notations suivantes. Donnons-nous  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_m)$  où  $w_1 > \dots > w_m \geq 0$  sont des entiers positifs de même parité. On pose  $\Pi$  l'ensemble des  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_{2m})$  dont les poids sont les  $\pm w_i/2$  (avec 0 de multiplicité double lorsque  $w_m = 0$ ). Si  $|\Pi| = 1$ , on note  $\Delta_{w_1, \dots, w_m}$  son unique élément. Si  $|\Pi| = k$ , on note  $\Delta_{w_1, \dots, w_m}^k$  n'importe lequel de ses éléments. De la même manière, donnons-nous  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_m)$  où  $w_1 > \dots > w_m > 0$  sont des entiers pairs strictement positifs, et posons  $\Pi^*$  l'ensemble des  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_{2m+1})$  dont les poids sont les  $\pm w_i/2$  et 0. Si  $|\Pi^*| = 1$ , on note  $\Delta_{w_1, \dots, w_m}^*$  son unique élément. Si  $|\Pi^*| = k$ , on note  $\Delta_{w_1, \dots, w_m}^{*k}$  n'importe lequel de ses éléments.

**7.4. Résultats obtenus.** Notre but est de déterminer un maximum de paramètres de Langlands–Satake pour des représentations automorphes cuspidales pour les groupes  $\text{GL}_n$ . Grâce à la conjecture d'Arthur–Langlands, ces paramètres apparaissent comme les éléments fondamentaux pour comprendre les formes automorphes discrètes de groupes plus généraux.

Donnons-nous  $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}^\perp(\text{PGL}_m)$  dont on souhaite déterminer les  $c_p(\pi)$ . On procède comme suit :

- on cherche  $\pi' \in \Pi_{\text{disc}}(\text{SO}_n)$  pour  $n \in \{7, 8, 9\}$  tel que  $\pi$  apparaisse dans l'écriture de  $\psi(\pi', \text{St})$  donnée par la conjecture d'Arthur–Langlands. Idéalement, on espère obtenir une égalité de la forme  $\psi(\pi', \text{St}) = \pi$  ou  $\psi(\pi', \text{St}) = \pi \oplus [d]$ .
- on détermine grâce à l'étude de [14] l'ensemble des  $\pi'' \in \Pi_{\text{disc}}(\text{SO}_n)$  ayant les mêmes poids que  $\pi'$ , et on détermine les paramètres  $\psi(\pi'', \text{St})$  associés.
- sous réserve que les paramètres  $\psi(\pi'', \text{St})$  font intervenir uniquement des éléments dont les paramètres de Langlands–Satake sont bien connus, on en déduit les  $c_p(\pi)$  (ou du moins les  $\text{Trace}(c_p(\pi)|\Lambda^i \text{St})$  pour certains  $i$ ).

En guise d'exemple, détaillons comment on a étudié l'élément  $\Delta_{23,15,7} \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_6)$ , qui est un cas assez représentatif. La notation  $\Delta_{w_1, \dots, w_m}$  a été présentée au paragraphe 7.3 (et est notamment utilisée dans [14] ou [13]).

D'après [14, Table 12], on a l'égalité :  $\Pi_{(23,15,7)}(\text{SO}_7) = \{\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15}, \Delta_{23,15,7}\}$ . On pose pour simplifier  $\pi_1 = \Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15}$  et  $\pi_2 = \Delta_{23,15,7}$ . Soit  $W$  la représentation de plus haut poids  $(9, 6, 3)$  de  $\text{SO}_7$ . On pose  $f_1$  et  $f_2$  des formes propres de  $\mathcal{M}_W(\text{SO}_7)$  qui engendrent respectivement  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . On pose de plus, pour  $p$  un nombre premier quelconque, les valeurs propres de  $f_1$  et  $f_2$  pour les opérateurs de Hecke  $T_p, \dots, T_{p, \dots, p}$  comme étant respectivement les  $\mu_p, \dots, \mu_{p, \dots, p}$  et les  $\lambda_p, \dots, \lambda_{p, \dots, p}$ . Les formules de Gross nous donnent alors les égalités :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_p|\mathcal{M}_W(\text{SO}_7)) &= \mu_p + \lambda_p = p^{5/2} \cdot \text{Trace}(c_p(\pi_1)|V_{\text{St}}) + p^{5/2} \cdot \text{Trace}(c_p(\pi_2)|V_{\text{St}}) \\ \text{Tr}(T_{p,p}|\mathcal{M}_W(\text{SO}_7)) &= \mu_{p,p} + \lambda_{p,p} = p^4 \cdot \text{Trace}(c_p(\pi_1)|\Lambda^2 V_{\text{St}}) \\ &\quad + p^4 \cdot \text{Trace}(c_p(\pi_2)|\Lambda^2 V_{\text{St}}) - 2 \cdot (p^4 + p^2 + 1) \\ \text{Tr}(T_{p,p,p}|\mathcal{M}_W(\text{SO}_7)) &= \mu_{p,p,p} + \lambda_{p,p,p} = p^{9/2} \cdot \text{Trace}(c_p(\pi_1)|\Lambda^3 V_{\text{St}}) \\ &\quad + p^{9/2} \cdot \text{Trace}(c_p(\pi_2)|\Lambda^3 V_{\text{St}}) - (p^2 + 1) \cdot \text{Tr}(T_p|\mathcal{M}_W(\text{SO}_7)) \end{aligned}$$

Les quantités qui nous intéressent ici sont les  $\text{Trace}(c_p(\pi_2)|\Lambda^i V_{\text{St}})$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ). Pour les déterminer, on a besoin des traces des opérateurs de Hecke  $T_p, T_{p,p}, T_{p,p,p}$  (qu'on a calculées au paragraphe 6.1), et des quantités  $\text{Trace}(c_p(\pi_1)|\Lambda^i V_{\text{St}})$  (qui sont calculable à l'aide des quantités  $\text{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^i V_{\text{St}})$  et  $\text{Trace}(c_p(\Delta_{15})|\Lambda^i V_{\text{St}})$ ).

Reste donc à calculer les quantités  $\text{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^i V_{\text{St}})$  et  $\text{Trace}(c_p(\Delta_{15})|\Lambda^i V_{\text{St}})$ . Si on note  $V_{(m_1, m_2, m_3)}$  la représentation de  $\text{SO}_7$  de plus haut poids  $(m_1, m_2, m_3)$ , alors les formules



de Gross nous donnent les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(4,4,4)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^{5/2} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{11}[3])|V_{\mathrm{St}}) \\
&= p^{5/2} \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}}) \cdot \mathrm{Trace}(c_p([3])|V_{\mathrm{St}}) \\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(6,6,6)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^{5/2} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{15}[3])|V_{\mathrm{St}}) \\
&= p^{5/2} \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{15})|V_{\mathrm{St}}) \cdot \mathrm{Trace}(c_p([3])|V_{\mathrm{St}}) \\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(9,4,3)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^{5/2} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{11})|V_{\mathrm{St}}) \\
&= p^{5/2} (\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|V_{\mathrm{St}}) + \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}})) \\
\mathrm{Tr}(\mathrm{T}_{p,p}|\mathcal{M}_{V_{(9,4,3)}}(\mathrm{SO}_7)) &= p^4 \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{11})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) + (p^4 + p^2 + 1) \\
&= p^4 (\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) + \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{11})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) \\
&\quad + \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|V_{\mathrm{St}}) \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}}))
\end{aligned}$$

On constate aussi que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{11})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) &= \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{15})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) = 1 \\
\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{11})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}}) &= \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{15})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}}) = 0 \text{ pour } i \geq 3 \\
\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^3 V_{\mathrm{St}}) &= \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}})
\end{aligned}$$

Il suffit enfin de réinjecter ces valeurs dans les égalités précédentes pour calculer les quantités  $\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,15,7})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ , données par les tables 2, 4 et 5. Ces formules sont assez lourdes, et on se contente de donner ici le résultat obtenu pour  $i = 1$ , à savoir :

$$\begin{aligned}
p^{\frac{23}{2}} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,15,7})|V_{\mathrm{St}}) &= p^9 \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(9,6,3)}}(\mathrm{SO}_7)) - p^9 \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(9,4,3)}}(\mathrm{SO}_7)) \\
&\quad + \frac{p^{10}}{p^2 + p + 1} \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(4,4,4)}}(\mathrm{SO}_7)) - \frac{p^{10}}{p^2 + p + 1} \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_p|\mathcal{M}_{V_{(6,6,6)}}(\mathrm{SO}_7)).
\end{aligned}$$

Suivant cette expression, les traces calculées dans [34] suffisent à calculer les propriétés voulues sur les paramètres de Satake de  $\Delta_{23,11,7}$ . On peut toutefois avoir recours aux résultats connus sur les formes modulaires pour  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  et sur les formes modulaires de Siegel de genre 2 pour alléger ces calculs.

L'ensemble des formules obtenues sont détaillées dans le programme [35]. Les fonctions “*triDeltaw1w2... (p)*” y donnent les quantités  $p^{\frac{i-w_1}{2}} \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{w_1, w_2, \dots})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ , et les fonctions “*triDeltaw1w2... pol(p)*” y donnent le polynôme unitaire dont les racines sont les  $p^{\frac{i-w_1}{2}} \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{w_1, w_2, \dots}^2)|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$  (lorsque la notation  $\Delta_{w_1, w_2, \dots}^2$  a bien un sens).

Les résultats obtenus sont décrits par les théorèmes 1.0.3, 1.0.4, 1.0.5 et 1.0.6 présentés en introduction.

Dans le cas particulier où  $p = 2$ , plutôt que les quantités  $\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{w_1, w_2, w_3})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}})$ , on a préféré donner le polynôme  $\det(2^{w_1/2} X \cdot \mathrm{Id} - c_2(\Delta_{w_1, w_2, w_3}))$  lorsque nos résultats le permettaient. Le lien entre ces quantités est donné par la relation suivante :

$$\det(2^{w_1/2} X \cdot \mathrm{Id} - c_2(\Delta_{w_1, w_2, w_3})) = \sum_{i=0}^6 X^i \cdot (-1)^i \cdot 2^{i \cdot w_1/2} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{w_1, w_2, w_3})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}}) = \sum_{i=0}^6 X^i \cdot a_i$$

et les relations  $\mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{w_1, w_2, w_3})|\Lambda^i V_{\mathrm{St}}) = \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{w_1, w_2, w_3})|\Lambda^{6-i} V_{\mathrm{St}})$  pour  $i = 0, 1, 2$  permettent de ne pas avoir à expliciter tous les monômes. En effet, suivant la remarque faite à la fin du théorème 1.0.6, on a la relation :  $a_{6-i} = 2^{(6-2i) \cdot w_1/2} \cdot a_i$  pour  $i = 0, 1, 2$ .

On rappelle que, dans cette remarque, on avait donné des propriétés de symétries très proches sur les coefficients du polynôme  $\det(2^{w/2} X \cdot \mathrm{Id} - c_2(\pi))$ , pour  $\pi \in \Pi_{\mathrm{alg}}^\perp(\mathrm{PGL}_n)$  de plus haut poids  $w$ . Ceci sera utile pour mieux comprendre les tables 7 et 9.

## 8. TABLES DE RÉSULTATS

$(w_1, w_2, w_3, w_4)$	$\Pi_{w_1, w_2, w_3, w_4}(\mathrm{SO}_9)$	$(w_1, w_2, w_3, w_4)$	$\Pi_{w_1, w_2, w_3, w_4}(\mathrm{SO}_9)$
(25, 17, 9, 5)	$\Delta_{25,17,9,5}$	(25, 21, 17, 7)	$\Delta_{25,21,7}^2 \oplus \Delta_{17}, \Delta_{25,21,17,7}$
(25, 17, 13, 5)	$\Delta_{25,17,13,5}$	(25, 21, 17, 9)	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{17},$ $\Delta_{25,17} \oplus \Delta_{21,9}, \Delta_{25,21,17,9}$
(25, 19, 9, 3)	$\Delta_{25,19,9,3}$	(25, 23, 9, 3)	$\Delta_{25,23,9,3}$
(25, 19, 11, 5)	$\Delta_{25,19,5}^2 \oplus \Delta_{11}, \Delta_{25,19,11,5}$	(25, 23, 11, 1)	$\Delta_{25,23,11,1}$
(25, 19, 13, 3)	$\Delta_{25,19,13,3}$	(25, 23, 11, 5)	$\Delta_{25,23,11,5}^2$
(25, 19, 13, 5)	$\Delta_{25,19,13,5}$	(25, 23, 13, 3)	$\Delta_{25,23,13,3}$
(25, 19, 13, 7)	$\Delta_{25,13}^2 \oplus \Delta_{19,7}, \Delta_{25,19,13,7}$	(25, 23, 13, 7)	$\Delta_{25,13}^2 \oplus \Delta_{23,7}, \Delta_{25,23,13,7}$
(25, 19, 13, 9)	$\Delta_{25,19,13,9}$	(25, 23, 15, 1)	$\Delta_{25,23,15,1}$
(25, 19, 15, 5)	$\Delta_{25,19,5}^2 \oplus \Delta_{15}, \Delta_{25,19,15,5}$	(25, 23, 15, 5)	$\Delta_{25,23,15,5}^3$
(25, 21, 11, 7)	$\Delta_{25,21,7}^2 \oplus \Delta_{11}, \Delta_{25,21,11,7}$	(25, 23, 15, 9)	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{23,9},$ $\Delta_{25,15} \oplus \Delta_{23,9}, \Delta_{25,23,15,9}$
(25, 21, 13, 5)	$\Delta_{25,13}^2 \oplus \Delta_{21,5}, \Delta_{25,21,13,5}$	(25, 23, 15, 11)	$\Delta_{25,23,15,11}$
(25, 21, 13, 7)	$\Delta_{25,21,13,7}$	(25, 23, 17, 3)	$\Delta_{25,23,17,3}$
(25, 21, 15, 3)	$\Delta_{25,21,3}^2 \oplus \Delta_{15}, \Delta_{25,21,15,3}$	(25, 23, 17, 5)	$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{25}, \Delta_{25,23,17,5}$
(25, 21, 15, 5)	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{21,5},$ $\Delta_{25,15} \oplus \Delta_{21,5}, \Delta_{25,21,15,5}$	(25, 23, 17, 7)	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{23,7},$ $\Delta_{25,17} \oplus \Delta_{23,7}, \Delta_{25,23,17,7}$
(25, 21, 15, 7)	$\Delta_{25,21,7}^2 \oplus \Delta_{15}, \Delta_{25,21,15,7}^2$	(25, 23, 17, 11)	$\Delta_{25,23,17,11}$
(25, 21, 15, 9)	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{21,9},$ $\Delta_{25,15} \oplus \Delta_{21,9}, \Delta_{25,21,15,9}$	(25, 23, 19, 5)	$\Delta_{25,23,19,5}$
(25, 21, 17, 5)	$\Delta_{25} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{21,5},$ $\Delta_{25,17} \oplus \Delta_{21,5}, \Delta_{25,21,17,5}$		

TABLE 1. Décomposition des éléments de  $\Pi_{(w_1, w_2, w_3, w_4)}(\mathrm{SO}_9)$  pour  $w_1 = 25$  lorsqu'il existe un élément de  $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_8)$  dont les poids sont les  $\pm w_i/2$ .

$(w_1, w_2, w_3)$	$\det(2^{w_1/2}X \cdot \text{Id} - c_2(\Delta_{w_1, w_2, w_3}) V_{\text{St}})$
(23, 13, 5)	$2^{69} \cdot X^6 + \dots - 14948499456 \cdot X^3 - 4472832 \cdot X^2 + 1$
(23, 15, 3)	$2^{69} \cdot X^6 + \dots + 17641242624 \cdot X^3 + 7139328 \cdot X^2 + 3360 \cdot X + 1$
(23, 15, 7)	$2^{69} \cdot X^6 + \dots + 528482304 \cdot X^3 - 4288512 \cdot X^2 + 720 \cdot X + 1$
(23, 17, 5)	$2^{69} \cdot X^6 + \dots - 22246588416 \cdot X^3 + 7323648 \cdot X^2 - 1920 \cdot X + 1$
(23, 17, 9)	$2^{69} \cdot X^6 + \dots + 5190451200 \cdot X^3 - 417792 \cdot X^2 - 1584 \cdot X + 1$
(23, 19, 3)	$2^{69} \cdot X^6 + \dots - 8241807360 \cdot X^3 + 872448 \cdot X^2 + 96 \cdot X + 1$
(23, 19, 11)	$2^{69} \cdot X^6 + \dots - 6259998720 \cdot X^3 - 4288512 \cdot X^2 + 96 \cdot X + 1$
(25, 13, 3)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots - 56170119168 \cdot X^3 + 16023552 \cdot X^2 + 8640 \cdot X + 1$
(25, 13, 7)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots + 1962934272 \cdot X^3 + 5332992 \cdot X^2 - 5040 \cdot X + 1$
(25, 15, 5)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots - 119587995648 \cdot X^3 + 21331968 \cdot X^2 + 1$
(25, 15, 9)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots - 335208775680 \cdot X^3 - 23052288 \cdot X^2 + 6048 \cdot X + 1$
(25, 17, 11)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots + 185377751040 \cdot X^3 - 11071488 \cdot X^2 - 6432 \cdot X + 1$
(25, 19, 1)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots + 443421818880 \cdot X^3 + 72425472 \cdot X^2 + 10752 \cdot X + 1$
(25, 19, 13)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots - 173801472000 \cdot X^3 - 3053568 \cdot X^2 - 672 \cdot X + 1$
(25, 21, 15)	$2^{75} \cdot X^6 + \dots - 106419978240 \cdot X^3 - 14020608 \cdot X^2 - 672 \cdot X + 1$

TABLE 2. Polynômes caractéristiques des  $c_2(\pi)$  pour  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_6)$ 

$(w_1, w_2, w_3)$	$P_{w_1, w_2, w_3}(X)$
(25, 17, 3)	$X^2 + 768 \cdot X - 2764800$
(25, 17, 7)	$X^2 - 5232 \cdot X - 23063040$
(25, 19, 5)	$X^2 - 6624 \cdot X - 38854656$
(25, 19, 9)	$X^2 + 1104 \cdot X - 35306496$
(25, 21, 3)	$X^2 - 2880 \cdot X - 8193024$
(25, 21, 7)	$X^2 + 240 \cdot X - 28491264$
(25, 21, 11)	$X^2 + 1824 \cdot X - 42771456$

TABLE 3. Polynômes annulateurs des  $2^{w_1/2} \cdot \text{Trace}(c_2(\pi)|V_{\text{St}})$  pour  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_6)$

$\frac{p}{\bar{w}}$	3	5	7	11	13	17	19
(23, 13, 5)	-304668	874314	452588136	-1090903017204	1624277793138	126454166788950	-119149415901516
(23, 15, 3)	-47628	83069994	-4690439544	-412279403844	889868260818	-106699425426090	-312437470082556
(23, 15, 7)	425412	-124558326	-3040958424	352045171116	-4816260369102	99848197859670	129801738947604
(23, 17, 5)	-37548	9957354	-3491256504	1417257011676	-5403644192622	-1644876121770	-824110968459036
(23, 17, 9)	161028	118413450	-3221005656	-1654692256404	-5869020263502	-8093664534186	676095496191060
(23, 19, 3)	-201852	-26872950	4686149544	465927593196	-7534226506062	-90400042234026	392917842132180
(23, 19, 11)	-252252	26651850	6781882344	25215729996	2875236177138	-128845421894826	-41596411782540
(25, 13, 3)	-19764	-391988430	9750417432	13078424975076	-96701634737526	2452876322679990	-2642714743857924
(25, 13, 7)	-112644	-559352430	-1243505928	7826821995636	107438724171114	-2831213421327690	-9749582433259284
(25, 15, 5)	867132	-613050606	5377223544	-3134062555596	51842671522026	814881989695158	-2965210972182228
(25, 15, 9)	-278964	533148210	-7056168168	2683226030436	-15864469792374	968124970032822	-2966903818822020
(25, 17, 3)	-1478088	884141220	-9475591056	1338439935912	-114003342180780	827431528322412	9018803395859736
(25, 17, 7)	1265112	626270820	-13034888016	-3063060887928	-34174702764780	2038338006384492	1506984152124216
(25, 17, 11)	872316	-474730350	-9663808008	6996289229556	-123888344826774	197426191828662	-8092805263108500
(25, 19, 1)	-106596	353216850	-17012565192	10854722172756	24295975183914	-2237898756283722	-1116669445539060
(25, 19, 5)	90072	-334979100	-31105966416	-7883875892088	-105638103433068	-2537945828699796	10159571243517240
(25, 19, 9)	-573192	927204900	62961605616	-3096943985688	-15467475516972	-508393328631444	821432168707800
(25, 19, 13)	-702324	9404850	-14719266408	23152557649956	-10567857144054	3351056484428982	-4267132336471620
(25, 21, 3)	-170280	-823542300	4910286000	-1405391636088	145190225249940	-842678842445460	-6403875311384520
(25, 21, 7)	-108360	433601700	43209490800	12737766447912	-109920761915820	-1119504013993620	9538661136172440
(25, 21, 11)	511128	-401727900	28143226416	98676844455112	90846882696468	2611978425209196	3887087995313400
(25, 21, 15)	411516	-439386990	18155978232	-33156744449164	-10179464734614	657746166515382	19498517165502060

TABLE 4. Liste des  $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \text{Trace}(c_p(\pi) | V_{\text{St}}) | V_{\text{St}}^{\perp}$  pour  $\Pi_{\text{alg}}^{\perp}(\text{PGL}_6)$  et  $3 \leq p \leq 19$

$\frac{p}{\bar{w}}$	23	29	31	37	41
(23, 13, 5)	213729467233464	-48303125789698494	102404919986257056	-854573389531170582	3039963284658810510
(23, 15, 3)	4636605523096344	38242077134129826	62411711982932256	194846871383803338	-2444768682516441330
(23, 15, 7)	-483871286752776	31281904260703746	-99338149426357344	488935778497554858	-761251774743469170
(23, 17, 5)	-1778909130889896	41065622154151266	-49354387962315744	-699393293745596022	675213588259710990
(23, 17, 9)	2740073764616568	9074529911413890	-10651961877753024	-845122486221439446	-2038917131601784434
(23, 19, 3)	9794542472491128	-92800925124117630	-102827107514992224	909641598021211434	-1012591870481195634
(23, 19, 11)	-2457101779651272	74027182945751490	55350292141154976	84118925862153834	-1668889536698238834
(25, 13, 3)	-1193162553976248	253606518017413434	2735597919197168736	4732933858242304146	-149824999263679701570
(25, 13, 7)	20178334110978792	432436992664549914	-3130027620660754464	2522703019906092786	-93544655494895631810
(25, 15, 5)	-88220277023194008	-1155443769692920422	9370888247092906464	-31117677722924636046	-1528438521983962050
(25, 15, 9)	-80036596250977464	-1707876195338103750	-780170604309503904	61060941903027848082	-22751573768921753154
(25, 17, 3)	-104847531874172592	2031320319236853684	-2368965684580243008	5344348460239232868	-74090640376161130884
(25, 17, 7)	-80888535775088112	-5992183465309870476	3003950696884185792	34645711154077546788	-10358280803181806724
(25, 17, 11)	-109137642615383064	1797713610306337050	6528516996995314656	16749083457180770802	6852460464769529406
(25, 19, 1)	-36279912858303576	711971194422472410	2456722774222969056	-37665796944733211982	196046761265779865406
(25, 19, 5)	72168216158130192	2501005156335478260	-1340464530776071488	-20702446507555550556	-18731680328982176388
(25, 19, 9)	31165081511786448	-108342006282833100	-317484792913639488	-27388402339916500764	-76102667868305446788
(25, 19, 13)	-6790004985987384	-76851310696194630	-5659730220769482144	-14458992118594150638	242176317466276764606
(25, 21, 3)	-3967628067667440	1872480211861343220	-2037559218626004288	27487981729794451620	263156609307726841212
(25, 21, 7)	222258068930775120	2495104422809767860	-2498495348289012288	-74513456812450965660	12981476072926873212
(25, 21, 11)	-170808940064948592	376161108771818100	-6240617945672417088	946755778368702756	71026063736978463612
(25, 21, 15)	120369062052633576	-202084440446118630	1398887694440035296	-33770972241982657038	64345458637891946046

TABLE 5. Liste des  $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \text{Trace}(c_p(\pi) | V_{\text{St}})$  pour  $\Pi_{\text{alg}}^{\perp}(\text{PGL}_6)$  et  $23 \leq p \leq 41$

$\bar{w} \backslash p$	2	3	5	7	11	13
(25, 17, 9, 5)	1104	-671328	-35927880	19973315264	-5335735724832	-3680482055848
(25, 17, 13, 5)	1632	492912	-45088680	-45797041696	2383075015248	33191789004920
(25, 19, 9, 3)	-5280	-317520	71568600	36073032800	-12805222897392	44285932903160
(25, 19, 11, 5)	4800	-302400	-765121800	29642547200	7504916409408	85014454568600
(25, 19, 13, 3)	2640	-483840	23969400	3255324800	-4023482030592	77399828612120
(25, 19, 13, 5)	-4416	-913248	-155434440	1629650624	-2070113697312	-65453712446248
(25, 19, 13, 7)	-3840	753840	-132911400	83659503200	-5717909982192	-121774126291720
(25, 19, 13, 9)	960	-498960	-500274600	-34659738400	-7631172082992	-20426432918920
(25, 19, 15, 5)	-6432	444528	985329240	14967875552	-10752412146864	14268919275128
(25, 21, 11, 7)	7920	-274320	181517400	-414752800	-12465606562992	24290803543160
(25, 21, 13, 5)	8928	139968	-181179144	-9742673920	5881787436096	39379660050584
(25, 21, 13, 7)	-1920	58320	-511607400	-7597141600	-866355138192	-3064791839560
(25, 21, 15, 3)	-3072	995568	148022616	-806421280	-5896631391024	32800261532024
(25, 21, 15, 5)	-1152	-994032	-652925160	-48906846688	14528473029936	6628196155448
(25, 21, 15, 7)	-3408	1215360	204437616	15834248704	13526264889984	145095813843376
(25, 21, 15, 9)	-7200	631200	6175800	25981995200	-10717965218592	-79449593007400
(25, 21, 17, 5)	6528	301968	180352536	15716429600	-5694591549264	-55011803012296
(25, 21, 17, 7)	6240	-894240	-877974600	-16347755200	2916734517408	-19035290375080
(25, 21, 17, 9)	480	421920	451865400	12240996800	16633128487008	-10842481297960
(25, 23, 9, 3)	-240	-675360	76659000	-8636958400	-385346474592	-48239650836520
(25, 23, 11, 1)	-7440	-574560	-258371400	45468651200	-13944417967392	890343899480
(25, 23, 11, 5)	2832	758880	16184496	-20980586816	-8139625180896	-63476767806224
(25, 23, 13, 3)	288	843696	80271576	-6565786528	555332964624	42681214957304
(25, 23, 13, 7)	3888	-861984	1188954936	448814912	7760651723424	-126782089453096
(25, 23, 15, 1)	48	-950832	1608216	-5559691360	-1809096069264	12338955157304
(25, 23, 15, 5)	-4608	-495072	94477608	49773071040	-3419262564768	-122200254656760
(25, 23, 15, 9)	-1392	-382032	-172266024	-6105235360	277474254096	132091828360184
(25, 23, 15, 11)	-1056	538272	-360152520	356506304	-16753802859552	65000438276312
(25, 23, 17, 3)	1488	1040256	-758350344	11560030592	-7381775803776	-85267823278696
(25, 23, 17, 5)	-2976	97632	34950840	-31527057856	-3810363336672	-39255611530408
(25, 23, 17, 7)	1488	-1687824	-107874984	26073028832	5420365078224	-39371918645896
(25, 23, 17, 11)	480	-211680	98316600	28990400	810137479008	4892256199640
(25, 23, 19, 5)	-6432	-950832	-477237864	-7262923360	5077742591856	132681867873464

TABLE 6. Liste des  $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \text{Trace}(c_p(\pi)|V_{\text{St}})$  pour  $\Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_8)$  et  $2 \leq p \leq 13$  lorsque les  $w_i$  sont impairs

$(w_1, w_2, w_3)$	$\det(2^{w_1/2}X \cdot \text{Id} - c_2(\Delta_{w_1, w_2, w_3}^*)   V_{\text{St}})$
(24, 16, 8)	$2^{84} \cdot X^7 + \dots - 35053633536 \cdot X^3 - 5300736 \cdot X^2 - 3016 \cdot X - 1$
(26, 16, 10)	$2^{91} \cdot X^7 + \dots + 187711881216 \cdot X^3 + 10444800 \cdot X^2 + 1312 \cdot X - 1$
(26, 20, 6)	$2^{91} \cdot X^7 + \dots - 184113168384 \cdot X^3 - 6881280 \cdot X^2 - 3008 \cdot X - 1$
(26, 20, 10)	$2^{91} \cdot X^7 + \dots + 847484289024 \cdot X^3 - 116293632 \cdot X^2 + 9088 \cdot X - 1$
(26, 20, 14)	$2^{91} \cdot X^7 + \dots - 582362333184 \cdot X^3 + 4546560 \cdot X^2 + 2752 \cdot X - 1$
(26, 24, 10)	$2^{91} \cdot X^7 + \dots + 281257967616 \cdot X^3 + 53460480 \cdot X^2 - 5168 \cdot X - 1$
(26, 24, 14)	$2^{91} \cdot X^7 + \dots - 17485529088 \cdot X^3 - 57698304 \cdot X^2 + 9088 \cdot X - 1$
(26, 24, 18)	$2^{91} \cdot X^7 + \dots + 29700390912 \cdot X^3 + 3495936 \cdot X^2 - 8192 \cdot X - 1$

TABLE 7. Polynômes caractéristiques des  $c_2(\pi)$  pour  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_7)$ 

$\bar{w} \backslash p$	3	5	7	11	13
(24, 16, 8)	-350001	124371575	93528799	-2714242598353	3657301688599
(26, 16, 10)	-624051	-1326755021	16022951833	9888917076709	-93579285696245
(26, 20, 6)	-1721331	905950579	-9930145127	30034826719909	-337487394517685
(26, 20, 10)	-608499	-280183181	84407107225	-11018813856347	-147086616834485
(26, 20, 14)	404109	1190523379	-15973145447	-57600800963291	-151745371034165
(26, 24, 10)	170829	1280278579	-54192968807	27176421262309	-273154746313205
(26, 24, 14)	1183437	-185269325	5344579993	-6837258083483	-80849598511733
(26, 24, 18)	-175923	-813224525	59374762393	40761042089317	560921705611147

TABLE 8. Liste des  $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \text{Trace}(c_p(\pi) | V_{\text{St}})$  pour  $\Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_7)$  et  $3 \leq p \leq 13$ 

$(w_1, w_2, w_3, w_4)$	$\det(2^{w_1/2}X \cdot \text{Id} - c_2(\Delta_{w_1, w_2, w_3, w_4})   V_{\text{St}})$
(24, 18, 10, 4)	$2^{96} \cdot X^8 + \dots - 71176198029312 \cdot X^4 - 5324800 \cdot X^2 + 1$
(24, 20, 14, 2)	$2^{96} \cdot X^8 + \dots + 18937584549888 \cdot X^4 + 34233384960 \cdot X^3 - 3020800 \cdot X^2 + 1440 \cdot X + 1$
(26, 18, 10, 2)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots + 1664854951723008 \cdot X^4 + 96153108480 \cdot X^3 + 33190400 \cdot X^2 + 11880 \cdot X + 1$
(26, 18, 14, 6)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots + 5195343838838784 \cdot X^4 + 113224974336 \cdot X^3 - 89271808 \cdot X^2 - 3672 \cdot X + 1$
(26, 20, 10, 4)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots - 5907882134470656 \cdot X^4 - 380356263936 \cdot X^3 - 2646016 \cdot X^2 + 6336 \cdot X + 1$
(26, 20, 14, 8)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots + 2055025887019008 \cdot X^4 - 320675512320 \cdot X^3 - 63692800 \cdot X^2 + 2880 \cdot X + 1$
(26, 22, 10, 6)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots - 5275597450248192 \cdot X^4 + 586910269440 \cdot X^3 + 29043200 \cdot X^2 - 3960 \cdot X + 1$
(26, 22, 14, 2)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots + 3431375000567808 \cdot X^4 - 183848140800 \cdot X^3 + 70054400 \cdot X^2 - 5400 \cdot X + 1$
(26, 24, 14, 4)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots - 5487318936846336 \cdot X^4 - 113397202944 \cdot X^3 + 101384192 \cdot X^2 + 16128 \cdot X + 1$
(26, 24, 16, 2)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots + 935933503340544 \cdot X^4 - 391440236544 \cdot X^3 + 7104512 \cdot X^2 - 4032 \cdot X + 1$
(26, 24, 18, 8)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots + 5006554256375808 \cdot X^4 - 522171187200 \cdot X^3 + 65446400 \cdot X^2 - 10800 \cdot X + 1$
(26, 24, 20, 6)	$2^{104} \cdot X^8 + \dots - 1289572520558592 \cdot X^4 - 121173442560 \cdot X^3 + 819200 \cdot X^2 + 8640 \cdot X + 1$

TABLE 9. Polynômes caractéristiques des  $c_2(\pi)$  pour  $\pi \in \Pi_{\text{alg}}^\perp(\text{PGL}_8)$  lorsque les  $w_i$  sont pairs



$\bar{w} \backslash p$	3	5	7	11	13
(24, 18, 10, 4)	-453600	-119410200	12572892800	-57063064032	-25198577349400
(24, 20, 14, 2)	-90720	-381691800	15880860800	1429298110368	1852311565160
(26, 18, 10, 2)	-1028160	93177000	-37259756800	24070317594048	-181403983972120
(26, 18, 14, 6)	36288	-407597400	-13480246528	-50783707225152	-553105612803352
(26, 20, 10, 4)	2231712	-2103821496	-49948420480	-33016093688160	297288355585928
(26, 20, 14, 8)	-2086560	-923239800	90060118400	34658502500448	251026605281480
(26, 22, 10, 6)	1321920	611173800	-13077433600	-21930073906752	-207826052609560
(26, 22, 14, 2)	-1166400	156076200	25574009600	-40811535001152	145995515911400
(26, 24, 14, 4)	-1851552	313754760	34598801792	-25141764069792	232075615185608
(26, 24, 16, 2)	-132192	188771400	-162950201728	-32763087987552	180651961034888
(26, 24, 18, 8)	1360800	1350102600	-40839971200	-45290750221152	230082936830600
(26, 24, 20, 6)	-341280	795285000	-117493532800	198712532448	54899265210440

TABLE 10. Liste des  $p^{w_1/2} \cdot \sum_{\pi \in \Pi} \text{Trace}(c_p(\pi)|V_{\text{St}})$  pour  $\Pi_{\text{alg}}^{\perp}(\text{PGL}_8)$  et  $3 \leq p \leq 13$  lorsque les  $w_i$  sont pairs

## RÉFÉRENCES

- [1] A. N. Andrianov, *Quadratic forms and Hecke operators*, Springer Verlag Grundlehren der math. Wiss. 286 (1987).
- [2] N. Arancibia, C. Moeglin et D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires*, disponible à l'url <http://arxiv.org/abs/1507.01432>.
- [3] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations : conjectures*, dans *Orbites unipotentes et représentations II : groupes  $p$ -adiques et réels*, Astérisque 171–172, 13–71 (1989).
- [4] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic groups*, Colloquium Publ. 61, Amer. Math. Soc. (2013).
- [5] J. Bergström, N. Dummigan et T. Mégarbané, *Eisenstein congruences for  $SO(4, 3)$ ,  $SO(4, 4)$ , spinor and triple product  $L$ -values*, et appendice par T. Ibukiyama et H. Katsurada, preprint, 2016, disponible à l'url <http://neil-dummigan.staff.shef.ac.uk/papers.html>.
- [6] A. Borel et H. Jacquet, *Automorphic forms and automorphic representation*, Corvallis, P.S.P.M.33 vol. I (1979).
- [7] A. Borel, *Automorphic  $L$ -functions*, dans [16] vol. II, 27–61 (1977).
- [8] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques, Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV à VI*, Masson, Paris (1981).
- [9] R. K. Brylinski, *Limits of weight spaces, Lusztig's  $q$ -analogs, and fiberings of adjoint orbits*, Journal of the A.M.S. 2, 517-533 (1989).
- [10] P.-H. Chaudouard et G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques*, Compositio Math. 146, 1416–1506 (2010).
- [11] P.-H. Chaudouard et G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré. II. Énoncés cohomologiques*, Annals of Math. 176, 1647–1781 (2012).
- [12] G. Chenevier et L. Clozel, *Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales*, Journal of the A.M.S. 22 Vol 2, 467-519 (2009).
- [13] G. Chenevier et J. Lannes, *Formes automorphes et voisins de Kneser des réseaux de Niemeier*.
- [14] G. Chenevier et D. Renard, *Level one algebraic cusp forms of classical groups of small rank*, Mem. Amer. Math. Soc. 1121, 128p (2015).
- [15] J. Cogdell, *Lectures on  $L$ -functions, converse theorems, and functoriality for  $GL_n$* , in *Lectures on automorphic  $L$ -functions*, A.M.S. , Fields Institute Monographs (2004).
- [16] *Automorphic forms, representations and  $L$ -functions, Part I & II*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII, Oregon State Univ., Corvallis, Ore., Providence, R.I., Amer. Math. Soc. (1977).
- [17] J. Dieudonné, *Sur les groupes classiques*, Hermann (1997).
- [18] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars Éd. (1974).
- [19] N. Dummigan, *A simple trace formula for algebraic modular forms*, Experimental Mathematics 22 (2013), no. 2, 123-131.
- [20] C. Faber, *Modular forms and the cohomology of moduli spaces*, disponible à l'url <https://people.kth.se/~faber/publ.html>.
- [21] C. Faber et G. van der Geer, *Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre 2 et des surfaces abéliennes*, I et II, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 338, 381–384 (2004).
- [22] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 254, Springer Verlag (1983).
- [23] W. Fulton et J. Harris, *Representation theory*, Springer Verlag, New York (1991).
- [24] I. M. Gel'fand, M. I. Graev et I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and automorphic functions*, Academic Press (1990), 1st ed. 1966.
- [25] B. Gross, *On the Satake isomorphism*, dans *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, A. Scholl and R. Taylor Ed., Cambridge Univ. Press (1998).
- [26] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Springer Verlag, Lecture notes in Math. (1968).
- [27] H. Jacquet et J. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations II*, Amer. J. of Math. 103, 777–815 (1981).
- [28] T. Kaletha, *Rigid inner forms of real and  $p$ -adic groups*, disponible à l'url <https://web.math.princeton.edu/~tkaletha/>.

- [29] S.-I. Kato, *Spherical functions and a  $q$ -analog of Kostant's weight multiplicity formula*, Invent. Math. 66, 461-468 (1982).
- [30] J.-P. Labesse et J.-L. Waldspurger, *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*, C. R. M. Monograph Series 31 (2013).
- [31] R. Langlands, *Euler products*, Yale Math. Monographs, Yale Univ. Press, New Haven and London (1971).
- [32] R. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives (Ein Märchen)*, dans [16] vol. II, 205–246 (1979).
- [33] G. Lusztig, *Singularities, character formulas, and a  $q$ -analog of weight multiplicities*, Astérisque 101, 208-227 (1983).
- [34] T. Mègarbané, tables des traces d'opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes disponibles à l'url <http://megarban.perso.math.cnrs.fr>.
- [35] T. Mègarbané, algorithme de calcul des traces de paramètres de Satake des représentations automorphes de  $\mathrm{PGL}_m$  disponible à l'url [http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/traceshecke/Formules\\_Gross/calculdelta.txt](http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/traceshecke/Formules_Gross/calculdelta.txt).
- [36] T. Mègarbané, algorithme de calcul des traces de paramètres de Satake des représentations automorphes de  $\mathrm{PGL}_m$  disponible à l'url [http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/traceshecke/Formules\\_Gross/formules\\_Gross.txt](http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/traceshecke/Formules_Gross/formules_Gross.txt).
- [37] P. Mezo, *Character identities in the twisted endoscopy of real reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 222 (2013).
- [38] P. Mezo, *Tempered spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups*, prépublication disponible à l'url <http://people.math.carleton.ca/~mezo/> (2013).
- [39] C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordue VI & X*, prépublication disponible à l'url <http://webusers.imj-prg.fr/~jean-loup.waldspurger/> (2014).
- [40] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. I.H.É.S. 111, 1–169 (2009).
- [41] M. Raum, N. C. Ryan, N.-P. Skoruppa, G. Tornarà, *Explicit computations of Siegel modular forms of degree two*, prépublication disponible à l'url <http://arxiv.org/abs/1205.6255>.
- [42] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over  $p$ -adic fields*, Publ. Math. I.H.É.S. 18, 5–69 (1963).
- [43] *Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes*, séminaire H. Cartan, tome 6, Éc. Norm. Sup. Paris (1953/54).
- [44] *Fonctions automorphes*, séminaire H. Cartan, tome 10, Éc. Norm. Sup. Paris (1957/58).
- [45] J.-P. Serre, *Complex semisimple Lie algebras*, Springer Verlag, New York (1987).
- [46] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, P.U.F., Paris (1970).
- [47] D. Shelstad, *On geometric transfer in real twisted endoscopy*, Annals of Math. 176, 1919–1985 (2012).
- [48] D. Shelstad, *On the structure of endoscopic transfer factors*, prépublication disponible à l'url <http://andromeda.rutgers.edu/~shelstad/>.
- [49] D. Shelstad, *On spectral transfer factors in real twisted endoscopy*, prépublication disponible à l'url <http://andromeda.rutgers.edu/~shelstad/>.
- [50] T. Springer, *Reductive groups*, dans [16] vol. I, 3–27 (1979).
- [51] O. Taïbi, *Arthur's multiplicity formula for certain inner forms of special orthogonal and symplectic groups*, à paraître dans Journal of the European Mathematical Society.
- [52] G. van der Geer, *Siegel modular forms and their applications*, dans *The 1–2–3 of modular forms*, édité par J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder et D. Zagier, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 181–245 (2008).
- [53] G. van der Geer, *Siegel modular forms*, disponible à l'url <http://arxiv.org/abs/math/0605346>.
- [54] J.-L. Waldspurger, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu 5, 423-525 (2006).
- [55] J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordues I, II, III, IV, V, VII, VIII, IX*, prépublications disponibles à l'url <http://webusers.imj-prg.fr/~jean-loup.waldspurger/> (2014).