CALCUL DES OPÉRATEURS DE HECKE SUR LES CLASSES D'ISOMORPHISME DE RÉSEAUX PAIRS DE DÉTERMINANT 2 EN DIMENSION 23 ET 25.

THOMAS MÉGARBANÉ

Résumé. Dans cet article, nous calculons l'opérateur de Hecke T_2 associé aux 2-voisins de Kneser défini sur les classes d'isomorphisme des réseaux pairs de déterminant 2 en dimension 23 et 25. Grâce aux résultats de [24], on en déduit l'expression de nombreux autres opérateurs de Hecke. Ceci nous permet de déterminer pour tout p premier le graphe de Kneser associé aux p-voisins des réseaux de dimension 23 ou 25. Nos résultats permettent aussi d'améliorer une conjecture de Harder, et de démontrer de nombreuses autres congruences faisant intervenir les paramètres de Satake des représentations automorphes des groupes linéaires découvertes par Chenevier et Renard.

1. Introduction.

Fixons $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$ un entier strictement positif, et considérons un espace euclidien V de dimension n. On définit l'ensemble $\mathcal{L}_n$ des réseaux pairs $L \subset V$ tels que $\det(L) = 1$ si n est pair, et $\det(L) = 2$ sinon. L'ensemble $\mathcal{L}_n$ est muni d'une action du groupe orthogonal euclidien $\mathrm{O}(V) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et on note $X_n = \mathrm{O}(V) \setminus \mathcal{L}_n$: il s'agit de l'ensemble des classes d'isomorphisme des réseaux pairs de dimension n de déterminant 1 ou 2 (selon la valeur de n), qui est un ensemble fini.

Suivant Kneser, si l'on se donne A un groupe abélien fini, on dit que les réseaux $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ sont des A-voisins si :

$$L_1/(L_1 \cap L_2) \simeq L_2/(L_1 \cap L_2) \simeq A.$$

On parle plus simplement des d-voisins lorsque $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$: c'est le cas qui nous intéresse le plus. Une fois un réseau $L \in \mathcal{L}_n$ donné, il est facile de construire tous ses d-voisins, comme rappelé à la proposition 2.2.2.

Cette notion de A-voisin, et plus particulièrement celle de p-voisins (pour p un nombre premier), nous permet de définir à n fixé un endomorphisme T_p sur le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}[X_n]$ engendré par X_n. On le définit par $\mathrm{T}_p(\overline{L}) = \sum \overline{L'}$, la somme portant sur les p-voisins L' de L, et $\overline{L}$ (respectivement $\overline{L'}$) désignant la classe dans X_n de L (respectivement L').

L'étude de l'endomorphisme $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ passe par la compréhension de l'ensemble X_n.

Lorsque $n \leq 9$, on sait d'après Mordell (pour $n = 8$) et par exemple d'après Conway–Sloane [13] (pour $n \in \{1, 7, 9\}$) que $|X_n| = 1$, et l'opérateur T_p n'est pas très pertinent.

Lorsque $n \in \{15, 16, 17\}$, les ensembles X_n ont été déterminés par Witt (pour $n = 16$) et Conway–Sloane (pour $n = 15, 17$). Suivant les résultats de Chenevier–Lannes [10], l'opérateur T_p se déduit de l'étude des formes modulaires paraboliques pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La connaissance de T_p est équivalente à la donnée, pour tous $L, L' \in \mathcal{L}_n$, du nombre de p-voisins de L isomorphes à L'. Ces quantités font intervenir des polynômes en p ainsi que le p-ème terme du q-développement des formes modulaires normalisées paraboliques pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids 12 ou de poids 16. Pour une étude détaillée, nous renvoyons à [10, ch. I, Théorème A] lorsque $n = 16$, et à [10, Annexe B, §5] lorsque $n = 15, 17$.

Lorsque $n \in \{23, 24, 25\}$, la classification des éléments de X_n est le produit des travaux de Niemeier (pour $n = 24$, ce qui donne aussi la classification pour $n = 23$) et de Borcherds (pour $n = 25$). On prendra bien garde au fait que $|X_{23}| = 32$, $|X_{24}| = 24$ et $|X_{25}| = 121$, et il est facile de se tromper sur les indices qui interviennent dans la suite.

Si les ensembles X_{23}, X_{24} et X_{25} sont plus ou moins bien connus, il n'y a que pour $n = 24$ que des opérateurs $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ ont été déterminés. Le calcul de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$ résulte des travaux de Borcherds [4] [13], repris ensuite par Nebe–Venkov dans [28]. L'étude faite par Chenevier–Lannes dans [10] repose sur la "codiagonalisation" des opérateurs $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_{24}])$, c'est-à-dire qu'il existe un base commune de vecteurs propres pour ces opérateurs. Ceci permet d'en déduire pour $p \leq 113$ l'opérateur T_p sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$. Ils utilisent pour cela que les valeurs propres de l'opérateur T_2 sont toutes distinctes, et la diagonalisation de T_2 fournit une base de codiagonalisation pour tous les T_p.

Le premier but de notre travail est de déterminer un maximum d'opérateurs T_p pour $n = 23$ et $n = 25$.

Notre point de départ est la détermination de l'opérateur T_2 lorsque $n = 23$ et $n = 25$, ce qui fait l'objet du chapitre 3.

Au paragraphe 3.1, on étudie les ensembles X_{23} et X_{25}. On étudie le rôle fondamental que jouent les systèmes de racines des réseaux de $\mathcal{L}_{23}$ et $\mathcal{L}_{25}$ dans la compréhension de X_{23} et X_{25}, détaillé à la proposition 3.1.1, et certainement déjà connu de Borcherds : si $n = 23$ ou 25, deux réseaux $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ sont isomorphes si, et seulement si, leurs systèmes de racines $R(L_1), R(L_2)$ sont isomorphes. On possède un résultat analogue lorsque $n = 24$, qui se déduit des travaux de Niemeier [29] et Venkov [35].

Au paragraphe 3.2, on explique comment déterminer la classe d'un réseau $L' \in \mathcal{L}_n$ dans X_n, où les données sont les suivantes : on possède un réseau $L \in \mathcal{L}_n$ (défini par une $\mathbb{Z}$-base), et L' est un 2-voisin de L (déterminé suivant la construction de [10, Annexe B, propositions 3.3 et 3.4] par un vecteur isotrope non-nul de $L/2L$). L'algorithme présenté dans ce paragraphe nous rend une $\mathbb{Z}$-base de L', ainsi que sa classe d'isomorphisme dans X_n.

Au paragraphe 3.3, on détaille l'algorithme permettant de calculer T_2 sur X_{23} et X_{25}. Il se déduit directement des paragraphes précédents : il suffit de parcourir, une fois donnés des réseaux $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}_n$ d'images distinctes dans X_n (avec $|X_n| = k$) tous leurs 2-voisins, et d'en déterminer les classes d'isomorphisme. La connexité du graphe de Kneser $\mathrm{K}_n(2)$ facilite grandement notre tâche. Il suffit de considérer un élément quelconque de $\mathcal{L}_n$, et de parcourir ses 2-voisins. En réitérant ce procédé aux 2-voisins des réseaux ainsi construits, on arrive à parcourir tous les éléments de X_n. On construit ainsi une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ satisfaisant les conditions ci-dessus, à l'aide uniquement de la donnée d'un élément de $\mathcal{L}_n$ quelconque.

Au final, nous obtenons les matrices de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$ et $\mathbb{Z}[X_{25}]$, exprimées dans les base de $\mathbb{Z}[X_{23}]$ et $\mathbb{Z}[X_{25}]$ correspondant respectivement à la numérotation des tables 2 et 3. Ces matrices sont données dans [25]. Notons au passage que cette même méthode permettrait aussi de recalculer la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$.

À n fixé, la codiagonalisation sur $\mathbb{C}$ des opérateurs de Hecke (et donc de leurs matrices associées) permet de décrire les matrices des opérateurs T_p pour p suffisamment petit, ce que l'on présente au paragraphe 4.1.

La méthode qu'on utilise est la même que celle déjà utilisée par Chenevier–Lannes [10] en dimension 24. L'opérateur T_2 a ses valeurs propres deux à deux distinctes, et est connu explicitement. On possède ainsi une base de diagonalisation de T_2, qui est aussi une base de codiagonalisation pour tous les opérateurs T_p, vus comme des endomorphismes de $\mathbb{C}[X_n]$. Il suffit ensuite d'exprimer les valeurs propres associées à cette base de diagonalisation, ce qui se déduit des résultats de Chenevier–Lannes [10, Table C.7] et de Chenevier–Renard [11, Appendix D], et que l'on détaille aux propositions 4.1.2 et 4.1.3.

Suivant les notations de [11] ou [10], notons $\Pi_{\mathrm{alg}}^{\perp}(\mathrm{PGL}_m)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations automorphes cuspidales autoduales de PGL_m sur $\mathbb{Q}$, telles que π_p est non ramifiée pour tout p, et que π_∞ est algébrique régulière. Alors les valeurs propres de l'opérateur T_p sur $\mathbb{Z}[X_n]$ s'expriment grâce à la trace du p-ème paramètre de Satake d'éléments de $\Pi_{\mathrm{alg}}^{\perp}(\mathrm{PGL}_m)$, avec $m \in \{2,3,4\}$ pour $n = 23$ et $m \in \{2,3,4,6\}$ pour $n = 25$. Pour $m = 2$ ou 3, ces quantités sont bien connues pour tout p premier, et se déduisent des coefficients du q-développement des formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids ≤ 23. Pour $m = 4$ et $n = 23$, ces quantités s'expriment grâce aux paramètres de Satake de formes modulaires de Siegel de genre 2, et plus précisément des "coefficients $\tau_{j,k}(p)$" (suivant les notations de Chenevier–Lannes [10]) qui ont été calculés jusqu'à $p \leq 113$ par ces auteurs. Enfin, pour $m = 4$ ou 6, et $n = 25$, ces quantités ont été calculées dans [24] pour $p \leq 67$.

Nos résultats permettent ainsi d'expliciter de nombreux opérateurs T_p sur $\mathbb{Z}[X_n]$, et on a le théorème suivant :

Théorème 1.0.1. *Pour $n = 23$ et $p \leq 113$, ou $n = 25$ et $p \leq 67$, l'endomorphisme $\mathrm{T}_p \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[X_n])$ est donné dans [25].*

Une première application de nos résultats est la détermination, pour $n = 23$ et $p \leq 113$, ou $n = 25$ et $p \leq 67$, du graphe $\mathrm{K}_n(p)$, défini au paragraphe 2.2. Rappelons que le graphe de Kneser $\mathrm{K}_n(p)$ est défini comme le graphe dont les sommets sont les éléments de X_n, et dont les arêtes sont les $\{\overline{L}_1, \overline{L}_2\}$ pour $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ des p-voisins. Au paragraphe 4.1, on démontre que l'on a le théorème suivant :

Théorème 1.0.2. *Soit p un nombre premier :*

(i) le graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est complet si, et seulement si, $p \geq 23$;

(ii) le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est complet si, et seulement si, $p \geq 67$.

Où un graphe est dit "complet" s'il possède une arête entre chaque couple de sommets.

Ainsi, nos résultats donnent pour tout p premier les graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ et $\mathrm{K}_{25}(p)$.

Une deuxième application de nos résultats provient de l'étude de la base de codiagonalisation des opérateurs de Hecke trouvée grâce aux vecteurs propres de T_2, ce qui fait l'objet du paragraphe 4.3.

À la manière de Chenevier–Lannes [10], on peut étudier les propriétés arithmétiques sur les espaces propres de l'opérateur T_2. L'idée principale est d'exhiber une égalité "modulo m" entre deux droites d_1 et d_2 stables pour T_2. Les droites d_1 et d_2 constituent aussi des sous-espaces stables pour chacun des opérateurs T_p. En notant $\lambda_i(p)$, pour $i = 1, 2$, la valeur propre de T_p associée à d_i, l'égalité "modulo m" induira une congruence de la forme :

$$(\forall\ p \text{ premier })\ \ \lambda_1(p) \equiv \lambda_2(p) \bmod m.$$

C'est déjà de cette manière que Chenevier et Lannes [10, Introduction, Théorème I] avaient démontré une conjecture de Harder [19], rappelée au Théorème 4.3.1. Nos résultat permettent de redémontrer cette congruence, et même de l'améliorer au Théorème 4.3.3.

Suivant la même méthode, on démontre de nombreuses autres congruences qui font l'objet du théorème 1.0.3. De même que pour la conjecture de Harder, certaines des congruences exposées avaient déjà été démontrées dans [10]. La démonstration qu'on en fait ici est plus facile pour la raison suivante. Dans [10], l'étude des valeurs propres de T_p permettait d'obtenir des "multiplications par $(p+1)$" des congruences cherchées, et le fait de "diviser par $(p+1)$" pose problème lorsque $(p+1)$ n'est pas premier au module de la congruence. Ici, on obtient directement les congruences cherchées, ou des "multiplications par p" de ces congruences, et le fait de "diviser par p" est beaucoup plus facile (car il suffit d'évaluer la congruence pour p divisant le module de la congruence).

La démonstration de ce théorème est faite au paragraphe4.3. Les notations qui sont utilisées ici sont expliquées en détail au paragraphe 2.3. Pour faire court, disons simplement que le coefficient $D_{w_1,\dots,w_r}(p)$ sont la trace normalisée du p-ème paramètre de Satake d'une représentation $\pi \in \Pi_{\mathrm{alg}}^{\perp}(\mathrm{PGL}_{2r})$, dont le caractère infinitésimal est déterminé par les w_i.

Théorème 1.0.3. *Pour tout nombre premier p, les congruences suivantes sont vérifiées :*

(i) $D_{19,7}(p) \equiv D_{19}(p) + p^6 + p^{13} \bmod 8712\ (= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2)$;

(ii) $D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^8 + p^{13} \bmod 9840\ (= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41)$;

(iii) $D_{21,9}(p) \equiv (1 + p^6)\, D_{15}(p) \bmod 12696\ (= 2^3 \cdot 3 \cdot 23^2)$;

(iv) $D_{21,9}(p) \equiv D_{21}(p) + p^6 + p^{15} \bmod 31200\ (= 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13)$;

(v) $D_{21,13}(p) \equiv (1 + p^4)\, D_{17}(p) \bmod 8736\ (= 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13)$;

(vi) $D_{21,13}(p) \equiv D_{21}(p) + p^4 + p^{17} \bmod 10920\ (= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)$;

(vii) $D_{23,7}(p) \equiv (1 + p^8)\, D_{15}(p) \bmod 8972\ (= 2^2 \cdot 2243)$;

(viii) $D_{23,13,5}(p) \equiv D_{23,13}(p) + p^9 + p^{14} \bmod 5472\ (= 2^5 \cdot 3^2 \cdot 19)$;

(ix) $D_{23,15,7}(p) \equiv (1 + p^4)\, D_{19}(p) + p^8 + p^{15} \bmod 2184\ (= 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13)$;

(x) $D_{23,15,7}(p) \equiv D_{23,7}(p) + p^4\, D_{15}(p) \bmod 5856\ (= 2^5 \cdot 3 \cdot 61)$;

(xi) $D_{23,17,9}(p) \equiv D_{23,9}(p) + p^3\, D_{17}(p) \bmod 2976\ (= 2^5 \cdot 3 \cdot 31)$;

(xii) $D_{23,19,3}(p) \equiv (1 + p^2)\, D_{21}(p) + p^{10} + p^{13} \bmod 7872\ (= 2^6 \cdot 3 \cdot 41)$;

(xiii) $D_{23,19,11}(p) \equiv (1 + p^2)\, D_{21}(p) + p^6 + p^{17} \bmod 16224\ (= 2^5 \cdot 3 \cdot 13^2)$.

De plus, mis à part les points $(vi), (vii), (xi)$ et $(xiii)$, les congruences ci-dessus sont optimales, dans le sens où le module qui intervient ne peut pas être remplacé par un de ses multiples.

La “conjecture de Harder” évoquée précédemment est le point (ii) du Théorème 1.0.3. De plus, la congruence $(viii)$ avait déjà été conjecturée dans [3, §6, Example 3] : on la démontre sous la forme d'un résultat plus fort que dans [3], et on vérifie que ce résultat est optimal.

Enfin, nos résultats valident dans certains cas particuliers une conjecture de Gan–Gross–Prasad, exposée en conclusion de [30, Classical groups, the local case]. Cette dernière stipule que les paramètres standards des représentations π, π' de $\mathrm{SO}_m, \mathrm{SO}_{m-1}$ déterminent entièrement si, et seulement si, π' est une restriction de π. On donne plus en détail au paragraphe 4.4 ce critère sur les paramètres standards de π et π'.

Nos résultats permettent de déterminer, lorsque $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ et $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$, ou lorsque $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ et $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$, si π' est une restriction de π. Les paramètres standards de telles représentations ont été déterminés dans [10, Table C.7] pour les éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$, [10, Table C.5] pour les éléments de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ et [11, Appendix D] pour les éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$.

Prasad et Chenevier avaient réalisé une inspection des paramètres standards des éléments de $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$, $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ et $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$. Ils avaient alors remarqué que, en se donnant $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ (respectivement $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$), le sous-ensemble $\Pi' \subset \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ (respectivement $\Pi' \subset \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$) dont les éléments satisfont la conjecture de Gan–Gross–Prasad est non vide. Nos résultats vont dans le sens de cette constatation, puisque l'on a en fait l'égalité $\Pi' = \mathrm{Res}(\pi)$. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 1.0.4. *La conjecture de Gan–Gross–Prasad est bien vérifiée pour $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ et $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$, ou lorsque $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ et $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$.*

Cet article a été écrit dans le cadre de ma thèse sous la direction de Gaëtan Chenevier, que je remercie pour les discussions utiles que nous avons pu avoir. Je remercie aussi Jean Lannes, qui a montré beaucoup d'intérêt pour mes résultats, et avec qui j'ai pu également beaucoup échanger.

Table des matières

2. Résultats préliminaires et notations.

Dans toute la suite, on se place dans un espace euclidien V de dimension n, muni de son produit scalaire $x \cdot y$, et on note $q : V \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x \cdot x}{2}$ la forme quadratique associée. On considèrera souvent le cas où $V = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne, avec pour base canonique associée $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$. On notera alors $(x_i) \cdot (y_i) = \sum_i x_i y_i$ le produit scalaire usuel.

2.1. Les réseaux de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1 (Réseaux entiers et pairs)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau. On dit que L est entier si :*

$$(\forall x, y \in L)\ x \cdot y \in \mathbb{Z}.$$

Si l'on se donne un réseau $L \subset V$ entier, il est dit pair si :

$$(\forall x \in L)\ x \cdot x \in 2\mathbb{Z}.$$

Définition 2.1.2 (Dual et résidu d'un réseau)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau. On définit $L^\sharp$ le dual de L par :*

$$L^\sharp = \{y \in V | (\forall x \in L)\ y \cdot x \in \mathbb{Z}\}.$$

En particulier, L est entier si, et seulement si, $L \subset L^\sharp$. Dans ce cas on définit le résidu de L comme le quotient :

$$\text{rés}\, L = L^\sharp / L.$$

Ce quotient est muni d'une forme quadratique $\text{rés}\, L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *définie par* $x \mapsto q(x) \bmod \mathbb{Z}$ *appelée forme d'enlacement.*

Définition 2.1.3 (Déterminant d'un réseau)**.** *Soit L un réseau entier. On note* $\det(L)$ *son déterminant, qui est encore le déterminant de la matrice de Gram d'une base quelconque de L. On a la relation bien connue :*

$$\det(L) = |\text{rés}\, L|.$$

Définition 2.1.4 (Racines d'un réseau)**.** *Soit $L \subset V$ un réseau entier. On définit le système de racines de L comme l'ensemble $R(L)$ (qui est fini, et éventuellement vide) :*

$$R(L) = \{x \in L | x \cdot x = 2\}.$$

C'est un système de racines du $\mathbb{R}$-espace vectoriel qu'il engendre au sens de [7, ch. VI, §1.1, définition 1]*, ce qui justifie la terminologie (c'est même un système de racines de type ADE).*

Proposition-Définition 2.1.5 (Racines positives et racines simples)**.** *Soient R un système de racines de V, et D un demi-espace. On suppose que l'hyperplan $H = D \cap (-D)$ ne contient aucun élément de R. On définit alors $R^+ = D \cap R$ comme l'ensemble des racines positives de R associé à D.*

L'ensemble $B(R^+) = \{\alpha \in R^+ | \alpha$ ne peut pas s'écrire $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ pour $\alpha_1, \alpha_2 \in R^+\}$ vérifie que tout élément de R est combinaison linéaire à coefficients entiers de même signe de $B(R^+)$. L'ensemble $B(R^+)$ est appelé le système de racines simples de R associé à R^+

Démonstration. Le seul point à vérifier est que tout élément de R est combinaison linéaire à coefficients entiers de même signe de $B(R^+)$, ce qui provient de [7, ch. VI, théorème 3]. □

Les systèmes de racines de réseaux pairs sont toujours isomorphes à des unions disjointes des systèmes de racines des réseaux $\mathrm{A}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_8, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_6$ que l'on décrit ci-dessous.

- A_n : On pose $\mathrm{A}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^{n+1} | \sum_i x_i = 0\}$. On a $\mathbf{A}_n = R(\mathrm{A}_n) = \{\pm(e_i - e_j) | i \neq j\}$.
- D_n : On pose $\mathrm{D}_n = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^n | \sum_i x_i \equiv 0 \bmod 2\}$. On a $\mathbf{D}_n = R(\mathrm{D}_n) = \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\}$.
- E_8 : On pose $\mathrm{E}_8 = \mathrm{D}_8 + \mathbb{Z} \cdot e$, avec $e = \frac{1}{2}(1, \dots, 1)$. On a $\mathbf{E}_8 = R(\mathrm{E}_8) = R(\mathrm{D}_8) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \dots, \pm 1) | \prod_i x_i > 0\right\}$.

E_7 : On pose $\mathrm{E}_7 = e^\perp \cap \mathrm{E}_8 = \{(x_i) \in \mathrm{E}_8 | \sum_i x_i = 0\}$. On a $\mathbf{E}_7 = R(\mathrm{E}_7) = e^\perp \cap R(\mathrm{E}_8) = R(A_7) \cup \left\{(x_i) = \frac{1}{2}(\pm 1, \ldots, \pm 1) | \sum_i x_i = 0\right\}$.

E_6 : On pose $\mathrm{E}_6 = (e_7 + e_8)^\perp \cap \mathrm{E}_7$. On a $\mathbf{E}_6 = R(\mathrm{E}_6) = (e_7 + e_8)^\perp \cap R(\mathrm{E}_7)$.

Suivant ces notations, on a les isomorphismes : $\mathbf{D}_1 \simeq \mathbf{A}_1$, $\mathbf{D}_2 \simeq (\mathbf{A}_1)^2$ et $\mathbf{D}_3 \simeq \mathbf{A}_3$, donc on n'utilisera la notation $\mathbf{D}_n$ que pour $n \geq 4$.

De plus, les systèmes de racines $\mathbf{A}_n$ $(n \geq 1)$, $\mathbf{D}_n$ $(n \geq 4)$, $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{E}_7$ et $\mathbf{E}_6$ sont deux-à-deux non isomorphes, et ce sont (à isomorphisme près) les seuls systèmes de racines irréductibles de type ADE (au sens de [7, ch. VI, §1]).

Pour $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, les ensembles $\mathcal{L}_n$ et X_n ont été présentés en introduction. On rappelle que $\mathcal{L}_n$ est non vide pour. Par exemple, suivant les notations précédentes, $\mathcal{L}_n$ contient :

- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-7)/8} \oplus \mathrm{E}_7$ si $n \equiv -1 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{n/8}$ si $n \equiv 0 \bmod 8$;
- le réseau $\mathrm{E}_8^{(n-1)/8} \oplus \mathrm{A}_1$ si $n \equiv 1 \bmod 8$.

Lemme 2.1.6. *Soient $L \subset V$ un réseau pair, et $R = R(L)$ son système de racines. Si l'on possède $R^+ \subset R$ un système de racines positives, et que l'on note $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R^+} \alpha$, alors le système de racines simples associé à R^+ est donné par : $\{\alpha \in R^+ \,|\, \alpha \cdot \rho = 1\}$.*

Démonstration. Découle directement de [7, ch.VI, proposition 29]. □

Lemme 2.1.7. *Soient R un système de racine irréductible de type ADE, et $r \in R$. Alors $R \cap r^\perp$ est un système de racine (éventuellement vide) donné par la table suivante :*

R	$R \cap r^\perp$
$\mathbf{A}_n$ $(n \leq 2)$	$\emptyset$
$\mathbf{A}_n$ $(n \geq 3)$	$\mathbf{A}_{n-2}$
$\mathbf{D}_n$ $(n \geq 4)$	$\mathbf{D}_{n-2} \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{E}_8$	$\mathbf{E}_7$
$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{D}_6$
$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{A}_5$

Démonstration. Le groupe de Weyl de R agit transitivement sur l'ensemble des éléments de R. La classe d'isomorphisme de $R \cap r^\perp$ ne dépend donc uniquement de la classe d'isomorphisme de R, et non de la racine r choisie. Il suffit donc de vérifier le tableau pour les réseaux $\mathbf{A}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{E}_8, \mathbf{E}_7$ et $\mathbf{E}_6$ décrits précédemment, en prenant une racine quelconque $r \in R$, ce que l'on fait facilement à la main. □

Lemme 2.1.8. *Soit $n \geq 1$ et $L \subset V$ un réseau pair. Si l'on se donne $r \in R(L)$, alors $L' = L \cap r^\perp$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module de rang $n-1$ de L, et c'est un réseau pair de l'espace $V \cap r^\perp$. De plus, le système de racines de L' est donné par : $R(L') = R(L) \cap r^\perp$. En particulier, la classe d'isomorphisme de $R(L')$ ne dépend que de $R(L)$ et de la composante irréductible de $R(L)$ contenant r, et elle se déduit du lemme 2.1.7.*

Démonstration. On considère la décomposition en composantes irréductibles du système de racines $R(L)$:

$$R(L) \simeq \coprod_i R_i$$

où les R_i sont des systèmes de racines irréductibles de type ADE (dont certains peuvent être égaux).

Si l'on se donne $r \in R_j$, alors par définition on a : $\coprod_{i \neq j} R_j \subset r^\perp$. Ainsi, le système de racines de $L' = L \cap r^\perp$ vérifie : $R(L') \simeq \left(\coprod_{i \neq j} R_j\right) \coprod \left(R_j \cap r^\perp\right)$, et la classe d'isomorphisme de $R_j \cap r^\perp$ est donnée par le lemme précédent. □

2.2. **Les opérateurs de Hecke et les A-voisins.** Commençons par rappeler la définition des A-voisins :

Proposition-Définition 2.2.1 (Les A-voisins)**.** *Soient A un groupe abélien fini, et L_1, L_2 deux éléments de $\mathcal{L}_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *Le quotient $L_1/(L_1 \cap L_2)$ est isomorphe à A.*

(*ii*) *Le quotient $L_2/(L_1 \cap L_2)$ est isomorphe à A.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que L_1 et L_2 sont des A-voisins, ou que L_2 est un A-voisin de L_1.

Démonstration. Voir [10, ch.III, §1] et [10, Annexe B,§3] selon la parité de n. □

Dans le cas particulier où A est de la forme $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on parlera de d-voisin : c'est ce cas qui nous intéressera plus particulièrement. Il est alors facile de construire l'ensemble des d-voisins d'un réseau L donné : si l'on note $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ l'ensemble des droites isotropes de L/dL (où on entend par droite un $\mathbb{Z}/d$-module libre de dimension 1), alors les d-voisins du réseau L sont paramétrés par $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ comme suit :

Proposition 2.2.2. *Soient $L \in \mathcal{L}_n$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Alors les d-voisins de L sont en bijection naturelle avec les points de la quadrique $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ comme suit.*

Donnons-nous x une droite isotrope de L/dL et $v \in L$ dont l'image dans L/dL engendre x vérifiant $v \cdot v \equiv 0 \bmod 2d^2$, et notons M l'image réciproque de $x^\perp$ par l'homomorphisme $L \to L/dL$. Alors le réseau $M + \mathbb{Z}\frac{v}{d}$ est un d-voisin de L ne dépendant que de x : on le note $L'(x)$.

L'application $x \mapsto L'(x)$ est une bijection entre $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ et l'ensemble $\mathrm{Vois}_d(L)$ des d-voisins de L. Le réseau $L'(x)$ sera appelé le d-voisin de L associé à x

Démonstration. Voir [10, ch. III, §1] et [10, Annexe B, §3] selon la parité de n. □

Proposition-Définition 2.2.3. *Soient $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, et $L \in \mathcal{L}_n$. Alors le cardinal de la quadrique $C_L(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ ne dépend que de n et de d, et on le notera $c_n(d)$.*

En particulier, pour p premier, on a le résultat suivant :

$$c_n(p) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-2} p^i + p^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ \sum_{i=1}^{n-2} p^i & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le calcul de $c_n(d)$ pour $d \in \mathbb{Z}$ quelconque se déduit des constatations suivantes :

(*i*) *$c_n(d_1\, d_2) = c_n(d_1)\, c_n(d_2)$ si d_1 et d_2 sont premiers entre eux ;*

(*ii*) *$c_n(p^k) = p^{(k-1)(n-2)}\, c_n(p)$ pour p premier et $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Le calcul de $c_n(p)$ pour p premier se déduit de [10, ch. III] et [10, Annexe B] selon la parité de n.

Le point (*i*) se déduit de la bijection entre L/d_1d_2L et $L/d_1L \times L/d_2L$ et du lemme des restes chinois.

Le point (*ii*) se déduit de la surjection $C_L(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow C_L(\mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z})$. Si l'on se donne une droite isotrope $x \in C_L(\mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z})$ engendré par un vecteur $v \in L \setminus pL$, la fibre au dessus de x est un espace affine dirigé par $v^\perp/\mathbb{F}_p v$, où $v^\perp = \{w \in L/pL \,|\, (v \cdot w) \equiv 0 \bmod p\}$. En particulier, ces fibres sont toutes de cardinal p^{n-2}, et une récurrence sur k donne le résultat cherché. □

Notons $\mathbb{Z}[X_n]$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par l'ensemble X_n. On définit sur $\mathbb{Z}[X_n]$ les endomorphismes suivants :

Définition 2.2.4 (Les opérateurs de Hecke)**.** *Si $L \in \mathcal{L}_n$, on note $\overline{L}$ sa classe dans X_n. On note de plus $\mathrm{Vois}_A(L)$ l'ensemble des A-voisins de L, et pour tout élément $L' \in \mathrm{Vois}_A(L)$, on note $\overline{L'}$ sa classe dans X_n.*

L'opérateur de Hecke T_A *est l'endomorphisme de* $\mathbb{Z}[X_n]$ *défini par :*

$$\mathrm{T}_A(\overline{L}) = \sum_{L' \in \mathrm{Vois}_A(L)} \overline{L'},$$

pour tout réseau $L \in \mathcal{L}_n$.

Posons $N = |X_n|$, et donnons-nous $L_1, \ldots, L_N \in \mathcal{L}_n$ d'image deux-à-deux distinctes $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_N$ dans X_n. D'après la définition précédente, si l'on note $T_A = t_{i,j} \in \mathrm{M}_N(\mathbb{Z})$ la matrice de T_A dans la base $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_N$, alors le coefficient $t_{i,j}$ est le nombre de A-voisins de L_j isomorphes à L_i.

Pour simplifier, on notera $\mathrm{T}_d = \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$. En particulier, si l'on note $T_d = (t_{i,j})$ la matrice de T_d dans la base $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_N$ (suivant les notations précédentes), alors on a :

$$(\forall\, j \in \{1, \ldots, N\})\ \sum_i t_{i,j} = c_n(d).$$

Définition 2.2.5 (Le graphe de Kneser)**.** *Soient p un nombre premier, et $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$. Le graphe des p-voisins $\mathrm{K}_n(p)$ est le graphe défini de la manière suivante :*

- *l'ensemble des sommets est l'ensemble X_n ;*
- *l'ensemble des arêtes est l'ensemble des $\{\overline{L_1}, \overline{L_2}\}$, pour $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ des p-voisins (où pour $i = 1, 2$ on désigne par $\overline{L_i}$ la classe de L_i dans X_n).*

Proposition 2.2.6. *Le graphe de $\mathrm{K}_n(p)$ est connexe pour tout n et pour tout p.*

Démonstration. Le cas où n est pair est démontré dans [10, ch. III, Théorème 1.12]. Le cas où n est impair se traite exactement de la même manière. □

Les opérateurs de Hecke T_A participent à la notion plus générale d'anneau de Hecke d'un schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini. Si l'on se donne G un tel schéma en groupe, on peut lui associer son anneau de Hecke défini comme suit :

Définition 2.2.7 (L'anneau des opérateurs de Hecke)**.** *Soit Γ un groupe, et soit X un Γ-ensemble transitif. On définit l'anneau des opérateurs de Hecke de X comme le sous-anneau $\mathrm{H}(X) \subset \mathrm{End}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}[X])$ des endomorphismes commutant à l'action de Γ.*

Définition 2.2.8 (L'anneau de Hecke d'un schéma en groupe)**.** *Soit G schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini. Si l'on note P l'ensemble des nombres premiers, on note $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$, et $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. On définit alors le $G(\mathbb{A}_f)$-ensemble : $\mathcal{R}(G) = G(\mathbb{A}_f)/G(\widehat{\mathbb{Z}})$. L'anneau de Hecke de G est alors défini comme :*

$$\mathrm{H}(G) = \mathrm{H}(\mathcal{R}(G))$$

où $G(\mathbb{A}_f)$ joue le rôle de Γ dans la définition précédente.

En particulier, on s'intéressera aux cas où $G = \mathrm{O}_n$ ou $G = \mathrm{SO}_n$, définis comme suit :

Définition 2.2.9. *Si on se donne L_0 un élément de $\mathcal{L}_n$, on définit O_n le schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ associé à la forme quadratique $L_0 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto q(x)$. Il s'agit de l'objet noté O_{L_0} dans* [10, ch. II, §1]. *On définit de même $\mathrm{SO}_n \subset \mathrm{O}_n$ (introduit aussi dans dans* [10, ch. II, §1]*). Les schémas O_n et SO_n ainsi définis sont des schéma en groupes affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini (ce dernier étant même réductif).*

Les anneaux de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n) \subset \mathrm{H}(\mathrm{SO}_n)$ sont alors bien définis. Considérons $G = \mathrm{O}_n$, et donnons-nous $L_0 \in \mathcal{L}_n$. Alors l'ensemble $\mathcal{R}(G)$ s'identifie à l'ensemble des réseaux de $L_0 \otimes \mathbb{Q}$ qui sont dans $\mathcal{L}_n$. Cette identification permet de voir les opérateurs de Hecke T_A introduits précédemment comme des éléments de l'algèbre de Hecke $\mathrm{H}(G)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.2.10. *Soient $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$, et $G = \mathrm{O}_n$. Alors :*

(*i*) *Les opérateurs de Hecke* T_A *associés aux* A*-voisins forment une* $\mathbb{Z}$*-base de l'anneau de Hecke* $\mathrm{H}(G)$.

(*ii*) *L'anneau* $\mathrm{H}(G)$ *est commutatif.*

Démonstration. Voir [10, ch. IV, §2.6]. □

2.3. **La paramétrisation de Langlands–Satake.** Dans toute la suite, G désignera un schéma en groupe affine sur $\mathbb{Z}$ de type fini et semi-simple. Notons $\widehat{G}$ son dual au sens de Langlands. C'est un $\mathbb{C}$-groupe réductif dont la donnée radicielle est duale à celle de $G(\mathbb{C})$, suivant Borel [6] et Springer [32] par exemple. Notons de plus $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie complexe de $\widehat{G}$, et $\widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ et $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ les classes de $\widehat{G}(\mathbb{C})$-conjugaison d'éléments semi-simples respectivement de $\widehat{G}(\mathbb{C})$ et $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathbb{C})$.

À la manière de [10, ch. IV, §3.2], on note $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles π de $G(\mathbb{A})$ telles que π_p est non ramifiée pour tout p premier. Nous noterons également $\Pi_{\mathrm{cusp}}(G)$ et $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ respectivement l'ensemble des représentations automorphes cuspidales et l'ensemble des représentations automorphes discrètes de G, suivant les notations de [10] et [11].

On désigne par P l'ensemble des nombres premiers, et on définit $\mathcal{X}(\widehat{G})$ l'ensemble des familles $(c_v)_{v\in P\cup\{\infty\}}$, où $c_\infty \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{ss}}$ et $c_p \in \widehat{G}(\mathbb{C})_{\mathrm{ss}}$ pour tout $p \in P$. Suivant Langlands dans [22], on dispose d'une application canonique $c : \Pi(G) \to \mathcal{X}(\widehat{G}), \pi \mapsto (c_v(\pi))$. L'élément $c_\infty(\pi)$ est appelé le caractère infinitésimal de π. Lorsque $G = \mathrm{PGL}_n$, auquel cas on a $\widehat{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, les valeurs propres du caractère infinitésimal de π sont bien définies et sont appelées les poids de π.

Si l'on possède $r : \widehat{G} \to \mathrm{SL}_n$ une $\mathbb{C}$-représentation, celle-ci induit une application $\mathcal{X}(\widehat{G}) \to \mathcal{X}(\mathrm{SL}_n), (c_v) \mapsto (r(c_v))$. Pour $\pi \in \Pi(G)$, on note $\psi(\pi, r) = r(c(\pi))$: c'est un élément de $\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$ qu'on appelle le paramètre de Langlands du couple (π, r).

En pratique, on considérera le cas où G est le groupe SO_n, et $\widehat{G}$ est donc un groupe de la forme SO_m ou Sp_{2m}. On utilisera alors le paramètre de Langlands du couple (π, St), où St désigne la représentation standard de $\widehat{G}$, et on parlera alors du paramètre standard de π.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, donnons-nous $n_i, d_i \in \mathbb{N}^*$ et $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_{n_i})$ tels que $\sum_i n_i d_i = n$. On dispose alors d'un élément de $\mathcal{X}(\mathrm{SL}_n)$, noté $\oplus_i \pi_i[d_i]$ dans [10] ou [11]. Par définition, les paramètres de Langlands de $\oplus_i \pi_i[d_i]$ satisfont les égalités suivantes :

$$(\forall\, v \in P \cup \{\infty\})\ c_v(\oplus_i \pi_i[d_i]) = \bigoplus_i c_v(\pi_i) \otimes \mathrm{Sym}^{d_i - 1}(e_v)$$

où $e_\infty = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $e_p = \begin{pmatrix} p^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & p^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ pour tout p premier.

À la manière de [10, Ch. VI, §4] on note $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$ l'ensemble des éléments de la forme $\oplus_i \pi_i[d_i]$, suivant ces notations. Avec ce formalisme, la conjecture d'Arthur–Langlands [22] [2] se formule facilement (voir [10, ch. VI, §4, Conjecture 4.6]). Lorsque $G = \mathrm{SO}_n$ et que l'on considère la représentation standard de $\widehat{G}$, cette conjecture a été vérifiée par Taïbi [33], dont les résultats reposent sur les travaux d'Arthur [2], ainsi que sur ceux de Kaletha [20] et Arancibia–Moeglin–Renard [1]. Ainsi, le paramètre standard d'une représentation $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ est un élément de $\mathcal{X}_{\mathrm{AL}}(\mathrm{SL}_n)$.

Si l'on se donne $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$, alors on possède une égalité de la forme $\psi(\pi, \mathrm{St}) = \bigoplus_i \pi_i[d_i]$. On définit les poids de π comme les valeurs propres du caractère infinitésimal de $\psi(\pi, \mathrm{St})$. Une étude de ce caractère infinitésimal nous dit que les π_i précédents sont des éléments de $\Pi_{\mathrm{alg}}^{\perp}(\mathrm{PGL}_{n_i})$ (suivant les notations de [10] ou [11] déjà exposées en introduction).

Enfin, nous adopterons les notations suivantes. Considérons $n \in \{1, 2, 3\}$, et donnons-nous $w = (w_1, \dots, w_n)$, avec $w_1 > \cdots > w_n > 0$ des entiers de même parité. Si l'on désigne Π_w

l'ensemble des éléments de $\Pi_{\mathrm{alg}}^{\perp}(\mathrm{PGL}_{2n})$ de poids l'ensemble $\{\pm\frac{w_1}{2},\ldots,\pm\frac{w_n}{2}\}$. L'ensemble Π_w est fini. Notons m son cardinal. On note $\Delta_{w_1,\ldots,w_n}$ son unique élément lorsque $m=1$, et $\Delta^m_{w_1,\ldots,w_n}$ n'importe lequel de ses éléments sinon. Lorsque $m=1$, on définit la fonction $D_{w_1,\ldots,w_n}(p) = p^{\frac{w_1}{2}}\,\mathrm{Trace}\,(c_p(\Delta_{w_1,\ldots,w_n})|V_{\mathrm{St}})$. Si $m>1$, on définit l'ensemble de fonctions $D^m_{w_1,\ldots,w_n}(p) = \{p^{\frac{w_1}{2}}\,\mathrm{Trace}\,\big(c_p(\Delta^m_{w_1,\ldots,w_n})|V_{\mathrm{St}}\big)\}$.

Lorsque $n=1$, les fonctions $D^m_{w_1}$ se comprennent bien à l'aide des formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Par exemple, on peut considérer les cas où $w_1\in\{11,15,17,19,21\}$ (auxquels cas $m=1$ suivant les notations précédentes). Notons $\tau_{w_1+1}(n)$ le n-ème terme du q-développement de l'unique forme modulaire normalisée de poids w_1+1 pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors on a pour tout p premier l'égalité : $\tau_{w_1+1}(p) = D_{w_1}(p)$.

On considérera aussi le cas $w_1=23$ (auquel cas $m=2$). Notons E_k la série d'Eisenstein normalisée de poids k, et $\Delta=\frac{1}{1728}(\mathrm{E}_4^3-\mathrm{E}_6^2)$ la fonction de Jacobi. Alors les fonctions $\Delta\,\mathrm{E}_4^3$ et $\Delta\,\mathrm{E}_6^2$ forment une base de l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 24. On définit les fonctions $\tau_{24}^{\pm}(n)$ comme étant le n-ème terme du q-développement de la forme modulaire parabolique normalisée de poids 24 suivante :

$$\frac{131\pm\sqrt{144169}}{144}\Delta\,\mathrm{E}_4^3+\frac{13\mp\sqrt{144169}}{144}\Delta\,\mathrm{E}_6^2.$$

Alors on a pour tout p premier l'égalité : $D^2_{23}(p)=\{\tau^+_{24}(p),\tau^-_{24}(p)\}$.

Lorsque $n=2$, les fonctions $D^m_{w_1,w_2}$ sont reliées aux formes modulaires de Siegel de genre 2. Cela nous permet d'éclairer la notation des $\tau_{j,k}(p)$, utilisée dans [10], et que l'on a rapidement abordée dans l'introduction.

Dans la suite, on considérera les cas où $(w_1,w_2)\in\{(19,7),(21,5),(21,9),(21,13),$ $(23,7),(23,9),(23,13)\}$, auxquels cas $m=1$. En reprenant les notations de [10, Introduction], on a pour tout nombre premier p et tout couple (w_1,w_2) dans l'ensemble précédent l'égalité : $\tau_{w_2-1,\frac{w_1-w_2+4}{2}}(p)=D_{w_1,w_2}(p)$.

On utilisera notamment la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 (Les inégalités de Ramanujan)**.** *Soient $n\in\{1,2,3\}$, $w=(w,1,\ldots,w_n)$ avec $w_1>\cdots>w_n>0$ des entiers de même parité, Π_w l'ensemble des éléments de $\Pi_{\mathrm{alg}}^{\perp}(\mathrm{PGL}_{2n})$ de poids $\{\pm\frac{w_1}{2},\ldots,\pm\frac{w_n}{2}\}$, et p un nombre premier. Alors, pour tout $\Delta\in\Pi_w$ on a l'inégalité :*

$$|p^{\frac{w_1}{2}}\,\mathrm{Trace}(c_p(\Delta)|\mathrm{St})|\leq 2\ n\ p^{\frac{w_1}{2}}.$$

Démonstration. Le cas $n=1$ est un résultat bien connu de Deligne. D'après [9, Theorem 1.2] (qui généralise [31, Corollary 1.3]), ou même simplement d'après le théorème principal de [12], si l'on se donne $\Delta\in\Pi_w$, alors Δ satisfait la conjecture de Ramanujan. Ainsi, les valeurs propres de $c_p(\Delta)$ sont toutes de module 1, et donc $|\mathrm{Trace}(c_p(\Delta)|\mathrm{St})|\leq 2\ n$, puis $|p^{\frac{w_1}{2}}\,\mathrm{Trace}(c_p(\Delta)|\mathrm{St})|\leq 2\ n\ p^{\frac{w_1}{2}}$, qui est l'inégalité cherchée. Lorsque $|\Pi_w|=1$, cette inégalité s'écrit simplement $|D_{w_1,\ldots,w_n}(p)|\leq 2\ n\ p^{\frac{w_1}{2}}$ (pour tout p premier). □

2.4. **Formes automorphes, représentations automorphes et opérateurs de Hecke.** Dans la suite, on aura besoin de définir les formes automorphes pour les $\mathbb{Z}$-groupes O_n, qui ne sont pas semi-simples. La définition générale de la théorie des formes automorphes s'applique à O_n ou à SO_n, et se réduit à la définition suivante qui sera amplement suffisante :

Définition 2.4.1 (Les formes automorphes pour O_n ou SO_n)**.** *Soient $n\equiv 0,\pm1 \bmod 8$ et (W,ρ) une représentation de dimension finie de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$. On définit l'espace des formes automorphes pour O_n de poids W comme l'espace vectoriel de dimension finie :*

$$\mathcal{M}_W(\mathrm{O}_n)=\{f:\mathcal{L}_n\to W\mid(\forall L\in\mathcal{L}_n)(\forall\gamma\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))\ f(\gamma(L))=\rho(\gamma)\cdot f(L)\}\,.$$

Si l'on se donne W' une représentation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on construit de la même manière l'espace $\mathcal{M}_{W'}(\mathrm{SO}_n)$ des formes automorphes pour SO_n de poids W'.

Donnons-nous $n \equiv 0, \pm 1 \bmod 8$ et (W, ρ) une représentation de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On pose $L_1, \ldots, L_r$ des représentants de X_n. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(L_i) & = & \{\gamma \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \gamma L_i = L_i\}, \\ W^{\mathrm{O}(L_i)} & = & \{v \in W \mid \ (\forall \gamma \in \mathrm{O}(L_i)) \ \rho(\gamma)(v) = v\}. \end{array}$$

On a alors le lemme évident suivant :

Lemme 2.4.2. *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_W(\mathrm{O}_n) & \to & \displaystyle\prod_{i=1}^{r} W^{\mathrm{O}(L_i)} \\ f & \mapsto & (f(L_i))_{i \in \{1, \ldots, r\}} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Proposition 2.4.3. *L'espace $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_n)$ des formes automorphes pour O_n de poids trivial s'identifie naturellement au dual de $\mathbb{C}[X_n]$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent dans le cas où $W = \mathbb{C}$ est la représentation triviale. □

Nous renvoyons à [10, §IV.3 et IV.4] pour une définition plus générale des formes automorphes, qui permettent de définir les ensembles $\Pi(\mathrm{O}_n)$, $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_n)$ et $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{O}_n)$. On rappelle que les ensembles $\Pi(\mathrm{SO}_n)$, $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n)$ et $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$ ayant été introduits précédemment. Notons que le cas de SO_n présente la subtilité que : $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n) = \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$.

Dans la suite, ce sont les ensembles $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_n)$ et $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_n) = \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$ qui seront importants pour nous : ils sont directement à mettre en lien avec les espaces de formes automorphes introduits ci-dessus, ce qui se fait par l'intermédiaire des opérateurs de Hecke introduits au paragraphe 2.2.

Signalons déjà que les opérateurs de Hecke T_A introduits précédemment ont une action sur le module libre $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n]$, qui est définie par :

$$\mathrm{T}_A(L) = \sum_{L' \in \mathrm{Vois}_A(L)} L',$$

pour tout $L \in \mathcal{L}_n$. Cette action passe au quotient par l'action de O_n sur $\mathcal{L}_n$, et nous donne l'action présentée à la définition 2.2.4.

Si l'on se donne $f \in \mathcal{M}_W(\mathrm{O}_n)$, alors on peut voir f comme une application $\mathbb{Z}[\mathcal{L}_n] \to W$: l'opérateur T_A agit donc à droite sur f. Concrètement, cette action est donnée par l'égalité :

$$(\forall L \in \mathcal{L}_n) \ \mathrm{T}_A(f)(L) = \sum_{L' \in \mathrm{Vois}_A(L)} f(L').$$

Grâce à la proposition 2.2.10, on en déduit que l'anneau de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ a une action bien définie sur $\mathcal{M}_W(\mathrm{O}_n)$, et cette action est codiagonalisable. L'égalité $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_n) = \mathbb{C}[X_n]^*$ nous permet de dire que l'action de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ sur $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_n)$ est en fait l'action sur $\mathbb{Z}[X_n]$ présentée en détail au paragraphe 2.2.

Les opérateurs de Hecke agissant sur les espaces $\mathcal{M}_W(\mathrm{O}_n)$ contiennent de nombreuses informations sur les paramètres de Satake de représentations automorphes.

Suivant [10, Ch. IV, §3.2] par exemple, si l'on se donne une forme automorphe $f \in \mathcal{M}_W(\mathrm{O}_n)$ propre pour tous les opérateurs de Hecke, elle engendre une représentation automorphe discrète $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_n)$. Les paramètres de Langlands–Satake de π dépendent de f de la manière suivante :

– le caractère infinitésimal $c_\infty(\pi)$ dépend uniquement de W, suivant l'étude de Harish-Chandra et Langlands de l'isomorphisme d'Harish-Chandra [22] ;

– pour tout p premier, le p–ème paramètre de Satake $c_p(\pi)$ dépend uniquement des valeurs propres de f pour les T_A, lorsque A est un p groupe, suivant les résultats de Gross [17], généralisés par Chenevier–Lannes [10], qui s'appuient sur des résultats de Kato [21], Lusztig [23], Kostant [16, p. 421] et Brylinski [8].

Notons que, lorsque $n = 23$ ou 25, on a en fait l'égalité : $\mathrm{O}_n \setminus \mathcal{L}_n = \mathrm{SO}_n \setminus \mathcal{L}_n$ (comme tous les éléments de $\mathcal{L}_n$ ont des racines dans ces cas). Ainsi, un élément $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_n)$ pourra aussi être vu comme un élément de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{SO}_n)$, et on préfèrera voir la représentation engendrée par un tel f comme un élément de $\Pi_{\text{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$.

Enfin, donnons un résultat plus précis dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire lorsque $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_n)$, pour $n = 23$ ou 25 :

Proposition 2.4.4. *Soient $n = 23$ ou 25, $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_n)$ propre pour $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$, et $\pi \in \Pi_{\text{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$ la représentation engendrée par f.*

Alors les valeurs propres du caractère infinitésimal $c_\infty(\pi)$ dans la représentation standard sont les :

$$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots, \pm\frac{n-2}{2}.$$

De plus, pour tout p premier, si l'on note λ_p la valeur propre de f pour l'opérateur T_p, alors on a l'égalité :

$$\lambda_p = p^{\frac{n-2}{2}} \mathrm{Trace}(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}}).$$

3. Calcul de la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_n]$ pour $n = 23$ ou 25.

3.1. **L'étude des systèmes de racines d'éléments de X_n.** La proposition suivante était probablement déjà connue de Borcherds :

Proposition 3.1.1. *Soient $n = 23$ ou 25, et $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$. Pour $i = 1, 2$, on note $R_i = R(L_i)$ le système de racines de L_i. Alors on a l'équivalence :*

$$L_1 \simeq L_2 \Leftrightarrow R_1 \simeq R_2$$

Démonstration. L'implication $L_1 \simeq L_2 \Rightarrow R_1 \simeq R_2$ est évidente. Il suffit donc de montrer que $L_1 \not\simeq L_2 \Rightarrow R_1 \not\simeq R_2$, c'est-à-dire que deux éléments non isomorphes de $\mathcal{L}_n$ ont des systèmes de racines non-isomorphes, ce qui se fait par inspection selon la valeur de n.

Si $n = 23$: d'après [10, Annexe B], on sait construire X_{23} à l'aide de X_{24} comme suit. Si on se donne $P \in \mathcal{L}_{24}$ qui n'est pas isomorphe au réseau de Leech, et $r \in R(P)$, alors le réseau $L = P \cap r^\perp$ est un élément de $\mathcal{L}_{23}$, et les classes d'isomorphisme de réseaux ainsi obtenus décrivent tout X_{23}. Pour $i = 1, 2$, donnons-nous $P_i \in \mathcal{L}_{24}$ et $r_i \in R(P_i)$, et notons R_i la composante irréductible de $R(P_i)$ à laquelle appartient r_i et notons $L_i = P_i \cap r_i^\perp \in \mathcal{L}_{23}$: alors les réseaux L_1 et L_2 sont isomorphes si, et seulement si, les couples (P_1, R_1) et (P_2, R_2) sont isomorphes (d'après [10, Annexe B, prop. 2.6]).

Il suffit donc de regarder pour chaque élément de X_{23} ainsi généré si les classes d'isomorphisme des systèmes de racines sont deux-à-deux distincts. On détermine ces systèmes de racines grâce aux lemmes précédents, que l'on donne dans le table 1, où les notations sont les suivantes : P est un élément de $\mathcal{L}_{24}$ qui n'est pas isomorphe au réseau de Leech (dont la classe d'isomorphisme est entièrement déterminée par celle de son système de racines $R(P)$), r est un élément de $R(P)$ appartement à la composante irréductible R, $L = P \cap r^\perp$ est l'élément de $\mathcal{L}_{23}$ qui nous intéresse, et $R(L)$ est son système de racines.

L'inspection de la table 1 montre bien le résultat cherché, à savoir que deux éléments non isomorphes de $\mathcal{L}_{23}$ ont des systèmes de racines non isomorphes.

Si $n = 25$: on renvoie à [5] pour la liste des classes d'isomorphisme des éléments de $\mathcal{L}_{25}$ et à leur systèmes de racines. Une inspection rapide montre que l'on a bien l'équivalence cherchée. □

3.2. **Détermination de la classe d'isomorphisme d'un 2-voisin d'un élément de $\mathcal{L}_n$.** D'après la proposition 3.1.1, la table 1 (pour $n = 23$) et les résultats de Borcherds [5] (pour $n = 25$) nous permettent de déterminer la classe dans X_n d'un élément de $\mathcal{L}_n$ grâce à son système de racines. Cependant, déterminer la classe d'isomorphisme d'un système de racine peut s'avérer long sur le plan algorithmique. En pratique, on utilisera la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *On fixe $n = 23$ ou 25. Soient $L \in \mathcal{L}_n$ et $R(L)$ son système de racines. Soient $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ un ensemble de racines simples de $R(L)$, et $A = (\alpha_i \cdot \alpha_j) = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{Z})$ la matrice de Gram associée. Pour $l \in \mathbb{Z}$, on définit les entiers : $n_l = \left|\left\{i \in \{1, \dots, l\} \mid \sum_j a_{i,j} = l\right\}\right|$, qui ne dépendent que de la classe $\overline{L}$ de L dans X_n. De même, les quantités $|R(L)|$ et $\det(A)$ ne dépendent que de $\overline{L}$.*

On définit alors les applications $\Phi_n : \mathcal{L}_n \to \mathbb{N}^6$ et $\overline{\Phi}_n : X_n \to \mathbb{N}^6$ par :

$$\Phi_n(L) = \overline{\Phi}_n(\overline{L}) = (|R(L)|, n_2, n_1, n_0, n_{-1}, \det(A)).$$

L'application $\overline{\Phi}_n$ ainsi définie est injective sur X_n.

Démonstration. Par définition du système de racines $R(L)$ d'un réseau L, il est immédiat que éléments isomorphes de $\mathcal{L}_n$ ont même image par Φ_n, ce qui prouve que $\overline{\Phi}_n$ est bien définie.

Pour l'injectivité de $\overline{\Phi}_n$, il suffit de vérifier que deux éléments distincts dans X_n ont des images distinctes par $\overline{\Phi}_n$, ce qui se fait facilement à la main (comme on connaît déjà les classes d'isomorphisme des systèmes de racines de tous les éléments de X_n). Les tables 2 et 3 donnent pour tout élément $\overline{L_i}$ de X_n la classe R_i du système de racines de L_i, ainsi que l'image ϕ_i de $\overline{L_i}$ par $\overline{\Phi}_n$. □

Notons que les quantités n_2, n_1, n_0, n_{-1} se comprennent très bien grâce au diagramme de Dynkin de $R(L)$. Il s'agit respectivement du nombre de sommet possédant aucun, un, deux ou trois sommets qui lui sont connexes. L'intérêt de la définition des n_l donnée à la proposition 3.2.1 est qu'elle indique la manière dont on les calcule dans nos algorithmes.

D'après les propositions 3.1.1 et 3.2.1, pour déterminer la classe d'isomorphisme d'un élément de $\mathcal{L}_n$, il suffit de déterminer son image par Φ_n. On souhaite donc déterminer l'image par Φ_n d'un 2-voisin d'un réseau L. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *On fixe $n = 23$ ou 25. Donnons-nous $L \in \mathcal{L}_n$, et considérons x la droite isotrope de $L/2L$ engendrée par $v \in L$. On note L_x le 2-voisin de L associé à la droite x suivant* [10, ch.III, proposition 1.4]. *On suppose enfin que l'on possède une base $\{a_1, \dots, a_n\}$ de L.*

Si l'on se donne $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(a_j \cdot v) \equiv 1 \bmod 2$, alors la famille :

$$\{(a_j \cdot v)\, a_i - (a_i \cdot v)\, a_j | i \in \{1, \dots, n\} \cup \{2\, a_i | i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \left\{\frac{1}{2}\left(v - \frac{(v \cdot v)}{2} a_j\right)\right\}$$

engendre $\mathbb{Z}$-linéairement L_x.

Démonstration. On reprend la construction faite dans [10]. Le réseau L_x est engendré par le réseau M (où M est l'image réciproque de $x^\perp$ par la projection $L \to L/2L$) et par le vecteur $\frac{1}{2}v'$ (où v' est un élément de L vérifiant $(v' \cdot v') \equiv 0 \bmod 8$, dont l'image dans $L/2L$ engendre x).

Le premier point à vérifier est l'existence de l'entier j du lemme. Celle-ci provient de la non-dégénérescence du produit scalaire sur L, et le fait que $v \notin 2L$ (comme v engendre x).

Il suffit ensuite de noter que l'image de la famille $\{(a_j \cdot v)\, a_i - (a_i \cdot v)\, a_j | i \in \{1, \ldots, n\}\}$ par la projection $L \to L/2L$ engendre bien bien $x^\perp$ (et donc que $\{2\, a_i | i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{(a_j \cdot v)\, a_i - (a_i \cdot v)\, a_j | i \in \{1, \ldots, n\}\}$ engendre bien M), et que le vecteur $v' = v - \frac{(v \cdot v)}{2} a_j$ satisfait bien les conditions voulues, ce que l'on vérifie facilement. □

Donnons nous $\{a_1, \ldots, a_n\}$ une base d'un réseau $L \in \mathcal{L}_n$, ainsi qu'une droite isotrope $x \in C_L(\mathbb{F}_2)$ engendré par un vecteur $v \in L$. Si l'on note L_x le 2-voisin de L associé à x, alors l'algorithme qui donne $\Phi_n(L_x)$ se fait selon les étapes suivantes :

Première étape : grâce au lemme 3.2.2, on possède une famille $\mathbb{Z}$-génératrice de L_x.

Deuxième étape : la fonction qflll de PARI nous donne, à partir de la famille génératrice précédente, une base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de L_x, ainsi que la matrice de Gram associée $\widetilde{B} = (b_i \cdot b_j)_{i,j}$.

Troisième étape : grâce à la base $\{b_i\}$ et à la matrice $\widetilde{B}$, la fonction qfminim de PARI nous donne l'ensemble R des racines de L_x, ainsi qu'un système R^+ de racines positives.

Quatrième étape : en posant $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+} \beta$, on déduit le système de racines simples suivant $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} = \{\beta \in R^+ | (\rho \cdot \beta) = 1\}$, ainsi que la matrice de Cartan associée $B = (\beta_i \cdot \beta_j)_{i,j}$.

Cinquième étape : grâce au cardinal de R ainsi qu'à la matrice B, on déduit $\Phi_n(L_x)$.

3.3. **Présentation de l'algorithme de calcul de la matrice de** T_2 **sur** $\mathbb{Z}[X_n]$**.** On aura besoin de parcourir, pour $L \in \mathcal{L}_n$, tous les éléments de $C_L(\mathbb{F}_2)$, ce que l'on fera à l'aide d'une $\mathbb{Z}$-base $a_1, \ldots, a_n$ de L et du lemme évident suivant :

Lemme 3.3.1. *Soient $L \in \mathcal{L}_n$, et $a_1, \ldots, a_n$ une $\mathbb{Z}$-base arbitraire de L. On définit l'ensemble $V_n(a_1, \ldots, a_n) = \{(v_1, \ldots, v_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{0\} \,|\, q\left(\sum_k v_k\, a_k\right) \equiv 0 \bmod 2\}$. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rcl} V_n(a_1, \ldots, a_n) & \to & C_L(\mathbb{F}_2) \\ (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum_k v_k\, a_k) \end{array},$$

est une bijection.

3.3.1. *L'algorithme de calcul de la matrice de* T_2 *sur* $\mathbb{Z}[X_{23}]$. Notons $R_1, \ldots, R_{32}$ les classes d'isomorphisme des systèmes de racines des éléments de $\mathcal{L}_{23}$ (suivant la numérotation de la table 2). Pour $i \in \{1, \ldots, 32\}$, on pose de plus ϕ_i l'image par Φ_{23} (introduit à la proposition 3.2.1) d'un réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on note $\overline{L}_i$ la classe de L dans X_{23}. On donne dans la table 2 la numérotation choisie pour les éléments de X_{23}, en donnant les valeurs de R_i et de ϕ_i en fonction de i.

On souhaite déterminer la matrice $T_{23} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$ de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$ dans la base $(\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{32})$. Pour cela, on cherche pour tout $i \in \{1, \ldots, 32\}$ un réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on le munit d'une base $a_1, \ldots, a_{23}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de PARI). On construit ensuite tous les éléments $x \in C_L(\mathbb{F}_2)$ (grâce au lemme 3.3.1), et pour chaque x on détermine la classe d'isomorphisme du 2-voisin L_x de L associé à x (grâce à l'algorithme décrit au paragraphe 3.2).

Soulignons qu'il n'est pas évident pour tout i de construire un réseau de la forme précédente. Cependant, la connexité du graphe de Kneser $\mathrm{K}_{23}(2)$ (d'après la proposition 2.2.6) nous dit qu'il suffit en fait d'avoir un seul réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$. En effet, en parcourant les 2-voisins de L, on parcourra des éléments de $\mathcal{L}_{23}$ correspondant à d'autres classes d'isomorphisme dans X_{23}. En répétant le processus, on parcourra toutes les classes d'isomorphisme de X_{23}, comme le graphe $\mathrm{K}_{23}(2)$ est connexe.

Le réseau que l'on a utilisé comme point de départ est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *On se place dans $\mathbb{R}^{24}$ muni de sa base canonique (e_i), et on considère le réseau M engendré par : $\{e_i \pm e_{i+1} \,|\, 1 \leq i \leq 21\} \cup \{e_{23} - e_{24}\}$.*

Le réseau $L = M + \frac{1}{2}\mathbb{Z}\left(\sum_{i=1}^{24} e_i\right)$ est un élément de $\mathcal{L}_{23}$, et vérifie $R(L) \simeq \mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$.

Démonstration. On vérifie facilement que L est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 23, et que son déterminant est 2. Son système de racine est : $R(L) = \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leq i < j \leq 22\} \cup \{\pm(e_{23} - e_{24})\}$, qui vérifie bien $R(L) \simeq \mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$. $\square$

Expliquons en détail l'algorithme du calcul de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$. Pour $i \in \{1, \ldots, 32\}$, nous allons définir des réseaux $L_i \in \mathcal{L}_n$ satisfaisant $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant la numérotation de la table 2), munis d'une base arbitraire $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de PARI). Les coefficients de la matrice T_{23} se déduiront des applications $t_i : V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$ définies ci-dessous.

On pose L_1 le réseau donné par le lemme précédent, et on pose $a_{1,1}, \ldots, a_{1,23}$ la base de L_1 fournie par PARI. On définit comme suit la fonction $t_1 : V_{23}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$.

Soit $(v_1, \ldots, v_{23}) \in V_{23}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,23})$. On pose $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum_k v_k\, a_{1,k}) \in C_{L_1}(\mathbb{F}_2)$. On reprend la construction du 2-voisin L_x de L_1 associé à x dans la proposition 3.2.2 : il existe un unique $i \in \{1, \ldots, 32\}$ tel que $R(L_x) \simeq R_i$ (à savoir l'unique i tel que $\Phi_{23}(L_x) = \phi_i$). On pose alors : $t_1((v_1, \cdots, v_{23})) = i$.

Pour tout $i \in t_1(V_{23}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,23}))$, on fixe un élément $(v_1, \ldots, v_{23}) \in t_1^{-1}(\{i\})$ quelconque. Notons comme précédemment $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(\sum_k v_k a_{1,k})$ et L_x le 2-voisin de L_1 associé à x : on pose $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$ la base de L_x fournie par PARI, et on définit le réseau $L_i = L_x$.

Pour tous les réseaux $L_i \in \mathcal{L}_{23}$ ainsi définis, muni de leur base $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$, on construit de même que pour L_1 la fonction $t_i : V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$. De plus, pour $j \in t_i(V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}))$, si l'on n'a pas précédemment défini de réseau L_j, on choisit un élément quelconque $(v_1, \ldots, v_{23}) \in t_i^{-1}(\{j\})$: on note à nouveau $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(\sum_k v_k a_{i,k})$ et L_x le 2-voisin de L_i associé à x, et on pose $a_{j,1}, \ldots, a_{j,23}$ la base de L_x fournie par PARI, ainsi que $L_j = L_x$.

On répète le processus jusqu'à avoir construit pour tout $i \in \{1, \ldots, 32\}$ un réseau $L_i \in \mathcal{L}_{23}$ de base $a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}$ tel que $\Phi_{23}(L_i) = \phi_i$, ainsi qu'une fonction $t_i : V_{23}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,23}) \to \{1, \ldots, 32\}$.

Cet algorithme se termine bien, comme le graphe de Kneser $\mathrm{K}_{23}(2)$ est connexe d'après la proposition 2.2.6.

Proposition 3.3.3. *On pose $T_{23} = (t_{i,j}) \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $t_{i,j}$ est le nombre de 2-voisins de L_j isomorphes à L_i. Avec les notations précédentes, on a l'égalité :*

$$t_{i,j} = |t_j^{-1}(\{i\})|.$$

Démonstration. Soient $j \in \{1, \ldots, 32\}$ et $(v_1, \ldots, v_{23}) \in V_{23}(a_{j,1}, \ldots, a_{j,23})$. On pose comme précédemment $v = \sum_k v_k\, a_{j,k}$, $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(v)$ et L_x le 2-voisin de L_j associé à x. On a les équivalence suivantes :

$$L_x \simeq L_i \;\Leftrightarrow\; R(L_x) \simeq R(L_i) \simeq R_i \;\Leftrightarrow\; \Phi_{23}(L_x) = \phi_i \;\Leftrightarrow\; t_j((v_1, \ldots, v_{23})) = i$$

et donc :

$$t_{i,j} = \left|\{x \in C_{L_j}(\mathbb{F}_2) | L_x \simeq L_i\}\right| = |t_j^{-1}(\{i\})|$$

qui est l'égalité cherchée. $\square$

On renvoie à [26] pour un algorithme détaillé du calcul de T_{23}. Dans cet algorithme, les fichiers *"generateursX23Li"* sont situés dans le dossier parent : ils contiennent des bases des réseaux L_i que l'on a utilisés pour notre algorithme.

3.3.2. *L'algorithme de calcul de la matrice de* T_2 *sur* $\mathbb{Z}[X_{25}]$. On reprend la liste de [5] pour l'ensemble des classes de X_{25}, et on note $R_1, \ldots, R_{121}$ les classes d'isomorphisme des systèmes de racines des éléments de $\mathcal{L}_{25}$ (suivant la numérotation de [5], reprise dans la table 3). Comme dans le cas de X_{23}, pour $i \in \{1, \ldots, 121\}$, on pose de plus ϕ_i l'image par Φ_{25} (introduit à la proposition 3.2.1) d'un réseau $L \in \mathcal{L}_{25}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on note $\overline{L}_i$

la classe de L dans X_{25}. On donne dans la table 3 la numérotation choisie pour les éléments de X_{25}, en donnant les valeurs de R_i et de ϕ_i en fonction de i.

On souhaite déterminer la matrice $T_{25} \in \mathrm{M}_{121}(\mathbb{Z})$ de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{25}]$ dans la base $(\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{121})$. Pour cela, on cherche pour tout $i \in \{1, \ldots, 121\}$ un réseau $L \in \mathcal{L}_{25}$ tel que $R(L) \simeq R_i$, et on le munit d'une base $a_1, \ldots, a_{25}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de qflll). On construit ensuite tous les éléments $x \in C_L(\mathbb{F}_2)$ (grâce au lemme 3.3.1), et pour chaque x on détermine la classe d'isomorphisme du 2-voisin L_x de L associé à x (grâce à l'algorithme décrit au paragraphe 3.2).

Là encore il n'est pas évident pour tout i de construire un réseau de la forme précédente. De la même manière que dans le cas de X_{23}, on utilise la connexité du graphe de Kneser $\mathrm{K}_{25}(2)$ (d'après la proposition 2.2.6). Suivant le raisonnement adopté précédemment, il suffit de construire un seul réseau $L \in \mathcal{L}_{25}$, puis de construire ses 2-voisins, et de répéter le processus jusqu'à avoir parcouru tous les éléments de X_{25}.

Le réseau que l'on a utilisé comme point de départ est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.3.4. *On se place dans $\mathbb{R}^{26}$ muni de sa base canonique (e_i), et on considère le réseau M engendré par : $\{e_i \pm e_{i+1} \,|\, 1 \leq i \leq 23\} \cup \{e_{25} - e_{26}\}$.*

Le réseau $L = M + \frac{1}{2}\mathbb{Z}\left(\sum_{i=1}^{26} e_i\right)$ est un élément de $\mathcal{L}_{25}$, et vérifie $R(L) \simeq \mathbf{D}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$.

Démonstration. On vérifie facilement que L est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 25, et que son déterminant est 2. Son système de racine est : $R(L) = \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leq i < j \leq 24\} \cup \{\pm(e_{25} - e_{26})\}$, qui vérifie bien $R(L) \simeq \mathbf{D}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$. □

L'algorithme du calcul de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{25}]$ suit le même processus que dans le cas de X_{23}. Pour $i \in \{1, \ldots, 121\}$, nous allons définir des réseaux $L_i \in \mathcal{L}_n$ satisfaisant $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant la numérotation de la table 3), munis d'une base arbitraire $a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}$ (en pratique, il s'agira de la base fournie par la fonction qflll de PARI). Les coefficients de la matrice T_{25} se déduiront des applications $t_i : V_{25}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}) \to \{1, \ldots, 121\}$ définies ci-dessous.

On pose L_{121} le réseau donné par le lemme précédent, et on pose $a_{121,1}, \ldots, a_{121,25}$ la base de L_{121} fournie par PARI. On définit comme suit la fonction $t_{121} : V_{25}(a_{121,1}, \ldots, a_{121,25}) \to \{1, \ldots, 121\}$.

Soit $(v_1, \ldots, v_{25}) \in V_{25}(a_{121,1}, \ldots, a_{121,25})$. On pose $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum v_k\, a_{121,k}) \in C_{L_{121}}(\mathbb{F}_2)$. On reprend la construction du 2-voisin L_x de L_{121} associé à x dans la proposition 3.2.2 : il existe un unique $i \in \{1, \ldots, 121\}$ tel que $R(L_x) \simeq R_i$ (à savoir l'unique i tel que $\Phi_{25}(L_x) = \phi_i$). On pose alors : $t_{121}((v_1, \cdots, v_{25})) = i$.

Pour tout $i \in t_1(V_{25}(a_{121,1}, \ldots, a_{121,25}))$, on fixe un élément $(v_1, \ldots, v_{25}) \in t_{121}^{-1}(\{i\})$ quelconque. Notons comme précédemment $x = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2}(\sum_k v_k a_{121,k})$ et L_x le 2-voisin de L_{121} associé à x : on pose $a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}$ la base de L_x fournie par PARI, et on définit le réseau $L_i = L_x$.

Pour tous les réseaux $L_i \in \mathcal{L}_{25}$ ainsi définis, muni de leur base $a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}$, on construit de même que pour L_{121} la fonction $t_i : V_{25}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}) \to \{1, \ldots, 121\}$. De plus, pour $j \in t_i(V_{25}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}))$, si l'on n'a pas précédemment défini de réseau L_j, on choisit un élément quelconque $(v_1, \ldots, v_{25}) \in t_i^{-1}(\{j\})$: on note à nouveau $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(\sum_k v_k a_{i,k})$ et L_x le 2-voisin de L_i associé à x, et on pose $a_{j,1}, \ldots, a_{j,25}$ la base de L_x fournie par PARI, ainsi que $L_j = L_x$.

On répète le processus jusqu'à avoir construit pour tout $i \in \{1, \ldots, 121\}$ un réseau $L_i \in \mathcal{L}_{25}$ de base $a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}$ tel que $\Phi_{25}(L_i) = \phi_i$, ainsi qu'une fonction $t_i : V_{25}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,25}) \to \{1, \ldots, 121\}$.

Cet algorithme se termine bien, comme le graphe de Kneser $\mathrm{K}_{25}(2)$ est connexe d'après la proposition 2.2.6.

Proposition 3.3.5. *On pose $T_{25} = (t_{i,j}) \in \mathrm{M}_{121}(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $t_{i,j}$ est le nombre de 2-voisins de L_j isomorphes à L_i. Avec les notations précédentes, on a l'égalité :*

$$t_{i,j} = |t_j^{-1}(\{i\})|.$$

Démonstration. Soient $j \in \{1, \ldots, 121\}$ et $(v_1, \ldots, v_{25}) \in V_{25}(a_{j,1}, \ldots, a_{j,25})$. On pose comme précédemment $v = \sum_k v_k\, a_{j,k}$, $x = \mathrm{vect}_{Z/2}(v)$ et L_x le 2-voisin de L_j associé à x. On a les équivalence suivantes :

$$L_x \simeq L_i \;\Leftrightarrow\; R(L_x) \simeq R(L_i) \simeq R_i \;\Leftrightarrow\; \Phi_{25}(L_x) = \phi_i \;\Leftrightarrow\; t_j((v_1, \ldots, v_{25})) = i$$

et donc :

$$t_{i,j} = \left|\{x \in C_{L_j}(\mathbb{F}_2) | L_x \simeq L_i\}\right| = |t_j^{-1}(\{i\})|$$

qui est l'égalité cherchée. □

On renvoie à [27] pour un algorithme détaillé du calcul de T_{25}. Dans cet algorithme, les fichiers *"generateursX25Li"* sont situés dans le dossier parent : ils contiennent des bases des réseaux L_i que l'on a utilisés pour notre algorithme.

3.4. **Résultats obtenus.** Les résultats obtenus grâce à nos algorithmes sont donnés par les théorèmes suivants :

Théorème 3.4.1. *Soient $L_1, \ldots, L_{32} \in \mathcal{L}_{23}$ vérifiant pour tout i : $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant les notations de la table 2), et soient $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{32}$ leurs classes respectives dans X_{23}. Alors la matrice de l'opérateur T_2 relativement à la base $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{32}$ est donnée dans [25].*

Théorème 3.4.2. *Soient $L_1, \ldots, L_{121} \in \mathcal{L}_{25}$ vérifiant pour tout i : $R(L_i) \simeq R_i$ (suivant les notations de la table 3), et soient $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{121}$ leurs classes respectives dans X_{25}. Alors la matrice de l'opérateur T_2 relativement à la base $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{121}$ est donnée dans [25].*

4. Applications.

4.1. **La codiagonalisation des matrices opérateurs T_p.** Pour $n = 23$ ou 25, et p premier, on note $T_n(p)$ la matrice de l'opérateur T_p sur X_n relativement à la base des $\overline{L}_i$ introduite précédemment (suivant les numérotations des tables 2 ou 3, selon la valeur de n). En particulier, on a : $T_{23} = T_{23}(2)$ et $T_{25} = T_{25}(2)$ (suivant les notations du paragraphe 3.3).

Notre point de départ est la proposition suivante :

Proposition 4.1.1. *Pour $n = 23$ ou $n = 25$, les opérateurs $\mathrm{T}_p : \mathbb{C}[X_n] \to \mathbb{C}[X_n]$ pour p premier sont codiagonalisables. De manière équivalente, une fois n fixé, les matrices $T_n(p)$ pour p premier sont codiagonalisables dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. C'est un résultat classique, que l'on retrouve notamment dans [10] à de nombreuses reprises. Pour s'en convaincre dans notre cas, il suffit de constater que les matrices T_{23} et T_{25} calculées au chapitre précédent ont toutes leurs valeurs propres distinctes, et que les anneaux de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ sont commutatifs.

On en déduit qu'on a même un résultat plus fort : si $n = 23$ ou 25, tous les éléments de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$ sont codiagonalisables, et toute base de diagonalisation de T_2 est un base de codiagonalisation de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$. □

Grâce à PARI, il est facile de trouver des bases de diagonalisation des matrices T_{23} et T_{25} que l'on a calculées, qui seront nécessairement des bases de codiagonalisation respectivement pour $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$ et $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{25})$.

Notons respectivement $v_1, \ldots, v_{32}$ et $w_1, \ldots, w_{121}$ les bases de diagonalisation obtenues pour T_{23} et T_{25}, en supposant que les valeurs propres λ_i ou μ_i correspondantes suivent les numérotations des tables 4, 5 et 6. Du fait des valeurs que prennent les λ_i et les μ_i, on peut choisir les v_i et les w_i de telle sorte que :

– pour $i \in \{1, \ldots, 32\}$, les v_i sont dans $\mathbb{Z}^{32}$, et de coordonnées premières entre elles ;

- pour $i \in \{1, \ldots, 57\}$, les w_i sont dans $\mathbb{Z}^{121}$, et de coordonnées premières entre elles ;
- pour $i \in \{58, \ldots, 121\}$, les w_i sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]^{121}$, et de coordonnées premières entre elles.

Les valeurs propres de matrices $T_{23}(p)$ et $T_{25}(p)$ associées respectivement aux vecteurs v_i et w_i sont alors données par les propositions suivantes :

Proposition 4.1.2. *En reprenant les notations précédentes, les vecteurs $v_i \in \mathbb{Z}^{32}$ constituent des vecteurs propres communs à tous les éléments de* $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$*. De plus, chacun de ces vecteurs v_i est associée à une forme automorphe qui engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ dont le paramètre standard $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ est donné par la table 4.*

Pour p un nombre premier, notons $\lambda_i(p)$ la valeur propre pour T_p associée au vecteur v_i (en particulier, $\lambda_i(2) = \lambda_i$). Alors on a la formule :

$$\lambda_i(p) = p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p(\pi_i) | V_{\mathrm{St}}\right).$$

Démonstration. Considérons p un nombre premier, et plaçons nous dans l'anneau de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$. Reprenons la $\mathbb{Q}$-base $v_1, \ldots, v_{32}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[X_{23}] \simeq \mathbb{Q}^{32}$ définie précédemment. Chacun des vecteurs v_i est associée à une forme automorphe qui engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$. Les paramètres standards $\psi(\pi_i, \mathrm{St})$ de tels π_i sont donnés par [10, Table C.7].

Les formules de Gross (traitées dans [17] dans le cas des groupes adjoints, et précisées dans [10, ch. VI, lemme 2.7] dans le cas des groupes semi-simples) nous donnent la relation suivante : $p^{\frac{21}{2}} [V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{T}_p$. On en déduit la relation cherchée entre $\lambda_i(p)$ et π_i pour tout p.

Il suffit ensuite de vérifier la relation $\lambda_i = \lambda_i(2)$ pour s'assurer que l'indexation des π_i correspond bien à celle choisie pour les v_i (ce qui a bien un sens, comme tous les λ_i sont distincts). □

Proposition 4.1.3. *En reprenant les notations précédentes, les vecteurs $w_i \in \mathbb{Z}[\sqrt{144169}]^{121}$ constituent des vecteurs propres communs à tous les éléments de* $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{25})$*. De plus, chacun de ces vecteurs w_i est associée à une forme automorphe qui engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ dont le paramètre standard $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ est donné par les tables 5 et 6.*

Pour p un nombre premier, notons $\mu_i(p)$ la valeur propre pour T_p associée au vecteur w_i (en particulier, $\mu_i(2) = \mu_i$). Alors on a la formule :

$$\mu_i(p) = p^{\frac{23}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p(\pi_i) | V_{\mathrm{St}}\right).$$

Démonstration. La démonstration se fait comme précédemment. Considérons p un nombre premier, et plaçons nous dans l'anneau de Hecke $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{25})$. Reprenons la $\mathbb{Q}[\sqrt{144169}]$-base $w_1, \ldots, w_{121}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[\sqrt{144169}][X_{25}] \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{144169}]^{121}$ définie précédemment. Chacun des vecteurs w_i est associée à une forme automorphe qui engendre une représentation automorphe $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$. Les paramètres standards $\psi(\pi_i, \mathrm{St})$ de tels π_i sont donnés par [11, Appendix D].

Les formules de Gross nous donnent la relation suivante : $p^{\frac{23}{2}} [V_{\mathrm{St}}] = \mathrm{T}_p$. On en déduit la relation cherchée entre $\mu_i(p)$ et π_i pour tout p.

Il suffit ensuite de vérifier la relation $\mu_i = \mu_i(2)$ pour vérifier que l'indexation des π_i correspond bien à celle choisie pour les w_i (ce qui a encore bien un sens, comme tous les μ_i sont distincts). □

Afin de simplifier les notations, on définit les matrices $V \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathrm{M}_{121}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont respectivement les vecteurs v_i et w_i. Pour $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les a_i.

Alors on a les égalités suivantes :

$$T_{23}(p) = V \operatorname{diag}(\lambda_1(p), \ldots, \lambda_{32}(p))\, V^{-1};$$
$$T_{25}(p) = W \operatorname{diag}(\mu_1(p), \ldots, \mu_{121}(p))\, W^{-1}.$$

En particulier, on a la proposition suivante :

Théorème 4.1.4. *Pour tout $p \leq 113$ premier, les matrices $T_{23}(p)$ sont données dans* [25]. *Pour tout $p \leq 67$ premier, les matrices $T_{25}(p)$ sont données dans* [25].

Démonstration. Il est équivalent de connaître les matrices $T_{23}(p)$ et $T_{25}(p)$ et de connaître les $\lambda_i(p)$ et les $\mu_j(p)$. D'après les propositions 4.1.2 et 4.1.3, il suffit donc de connaître les valeurs de $\mathrm{Trace}(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$, pour les éléments $\pi \in \cup_m \Pi_{\mathrm{alg}}^{\perp}(\mathrm{PGL}_m)$ apparaissant dans les tables 4, 5 et 6.

Les calculs de ces $\mathrm{Trace}(c_p(\pi)|V_{\mathrm{St}})$ ont justement été effectués jusqu'à $p \leq 67$ dans tous ces cas (voir [24]). Les résultats de [10] permettent même d'aller plus loin, et de connaître pour tout $p \leq 113$ la matrice $\mathrm{T}_{23}(p)$ (grâce aux résultats sur les formes modulaires de Siegel de genre 2). $\square$

Les matrices $T_{23}(p)$ (pour $p \leq 113$) et $T_{25}(p)$ (pour $p \leq 67$) nous donnent en particulier les corollaires suivants :

Corollaire 4.1.5. *Soit p un nombre premier. Le diamètre du graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est le suivant : 4 pour $p = 2$, 3 pour $p = 3$, 2 pour $5 \leq p \leq 19$, et 1 pour $23 \leq p \leq 113$.*

Corollaire 4.1.6. *Soit p un nombre premier. Le diamètre du graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est le suivant : 6 pour $p = 2$, 4 pour $p = 3$, 3 pour $5 \leq p \leq 7$, et 2 pour $11 \leq p \leq 61$.*

Pour les plus grandes valeurs de p, on a le théorème suivant :

Théorème 4.1.7. *Soit p un nombre premier. Si $p \geq 23$, le graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est complet. Si $p \geq 67$, le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est complet.*

Démonstration. La démonstration suit celle de [10, ch. X, Théorème 2.4]. Nous la reprenons en détail dans le cas de $\mathrm{K}_{23}(p)$, et ne donnerons que quelques points clefs pour le cas de $\mathrm{K}_{25}(p)$.

À la manière de [10, ch. X, §2], définissons les fonctions $\theta_1(p) = D_{11}(p)$, $\theta_2(p) = D_{15}(p)$, $\theta_3(p) = D_{17}(p)$, $\theta_4(p) = D_{19}(p)$, $\theta_5(p) = D_{21}(p)$, $\theta_6(p) = D_{19,7}(p)$, $\theta_7(p) = D_{21,5}(p)$, $\theta_8(p) = D_{21,9}(p)$ et $\theta_9(p) = D_{21,13}(p)$. D'après la proposition 4.1.2, il existe des polynômes $C_{i,r} \in \mathbb{Z}[X]$, pour $1 \leq i \leq 32$ et $0 \leq r \leq 9$, uniquement déterminés, tels que l'on a pour tout $1 \leq i \leq 32$ et pour tout p premier :

$$\lambda_i(p) = C_{i,0}(p) + \sum_{r=1}^{9} C_{i,r}(p)\theta_r(p).$$

Si l'on note $T_{23}(p) = (t_{i,j}(p))_{1 \leq i,j \leq 32}$, alors il existe des polynômes $P_{i,j,r} \in \mathbb{Q}[X]$, pour $1 \leq i,j \leq 32$ et $0 \leq r \leq 9$, uniquement déterminés, tels que l'on a pour tout $1 \leq i,j \leq 32$ et pour tout p premier :

$$t_{i,j}(p) = P_{i,j,0}(p) + \sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p).$$

Supposons que les deux sommets de $\mathrm{K}_{23}(p)$ correspondant aux classes $\overline{L_i}, \overline{L_j} \in X_{23}$ ne sont pas connexes. Ceci est équivalent à dire que $t_{i,j}(p) = 0$, et on a alors :

$$P_{i,j,0}(p)^2 = \left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p) \right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, a

$$\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p)\right)^2 \leq \left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)^2\gamma_r\right)\left(\sum_{r=1}^{9} \gamma_r^{-1}\theta_r(p)^2\right)$$

pour tout 9-uple $(\gamma_1, \ldots, \gamma_9)$ de réels strictement positifs. En particulier, grâce aux inégalités de Ramanujan exposées à la proposition 2.3.1, et en prenant $(\gamma_1, \ldots, \gamma_9) = (4p^{11}, 4p^{15}, 4p^{17}, 4p^{19}, 4p^{21}, 16p^{19}, 16p^{21}, 16p^{21}, 16p^{21})$, on déduit l'inégalité :

$$\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)\theta_r(p)\right)^2 \leq 9\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(p)^2\gamma_r\right).$$

On définit les polynômes

$$(\Gamma_1(X), \Gamma_2(X), \ldots, \Gamma_9(X)) = (4X^{11}, 4X^{15}, \ldots, 16X^{21})$$

et

$$Q_{i,j}(X) = P_{i,j,0}(X)^2 - 9\left(\sum_{r=1}^{9} P_{i,j,r}(X)^2\Gamma_r(X)\right).$$

Les polynômes $Q_{i,j}(X)$ sont des éléments de $\mathbb{Q}[X]$ de coefficient dominant strictement positif. Si l'on définit $\rho_{i,j}$ comme la plus grande racine réelle de $Q_{i,j}(X)$ (avec la convention $\rho_{i,j} = -\infty$ si $Q_{i,j}$ n'a pas de racine réelle). Avec ces notations, on a $t_{i,j}(p) > 0$ dès que $p > \rho_{i,j}$.

Il suffit ensuite de constater que $\max\{\rho_{i,j}, 1 \leq i, j \leq 32\} \approx 21.15$. Ceci conclut que pour $p \geq 23$, tous les $t_{i,j}(p)$ sont non nuls, et que le graphe $\mathrm{K}_{23}(p)$ est complet pour de tels p.

Pour le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$, on procède de la même manière. Les fonctions $\theta_r(p)$ sont les suivantes : $\theta_1(p) = D_{11}(p)$, $\theta_2(p) = D_{15}(p)$, $\theta_3(p) = D_{17}(p)$, $\theta_4(p) = D_{19}(p)$, $\theta_5(p) = D_{21}(p)$, $\{\theta_6(p), \theta_7(p)\} = D_{23}^2(p)$, $\theta_8(p) = p^{11}\mathrm{tr}\left(\mathrm{Sym}^2\, c_p(\Delta_{11})|V_{\mathrm{St}}\right) = (D_{11}(p))^2 + p^{11}$, $\theta_9(p) = D_{19,7}(p)$, $\theta_{10}(p) = D_{21,5}(p)$, $\theta_{11}(p) = D_{21,9}(p)$, $\theta_{12}(p) = D_{21,13}(p)$, $\theta_{13}(p) = D_{23,7}(p)$, $\theta_{14}(p) = D_{23,9}(p)$, $\theta_{15}(p) = D_{23,13}(p)$, $\theta_{16}(p) = D_{23,13,5}(p)$, $\theta_{17}(p) = D_{23,15,3}(p)$, $\theta_{18}(p) = D_{23,15,7}(p)$, $\theta_{19}(p) = D_{23,17,5}(p)$, $\theta_{20}(p) = D_{23,17,9}(p)$, $\theta_{21}(p) = D_{23,19,3}(p)$ et $\theta_{22}(p) = D_{23,19,11}(p)$.

Les polynômes $\Gamma_r(X)$ (qui nous donnent les quantités $\gamma_r = \Gamma_r(p)$) sont les suivantes : $\Gamma_1(X) = 4X^{11}$, $\Gamma_2(X) = 4X^{15}$, $\Gamma_3(X) = 4X^{17}$, $\Gamma_4(X) = 4X^{19}$, $\Gamma_5(X) = 4X^{21}$, $\Gamma_6(X) = \Gamma_7(X) = 4X^{23}$, $\Gamma_8(X) = 9X^{22}$, $\Gamma_9(X) = 16X^{19}$, $\Gamma_{10}(X) = \cdots = \Gamma_{12}(X) = 16X^{21}$, $\Gamma_{13}(X) = \cdots = \Gamma_{15}(X) = 16X^{23}$ et $\Gamma_{16}(X) = \cdots = \Gamma_{22}(X) = 36X^{23}$.

On calcule de la même manières les quantités $\rho_{i,j}$ associées au polynômes $Q_{i,j}(X)$. Il suffit ensuite de constater que $\max\{\rho_{i,j}, 1 \leq i, j \leq 121\} \approx 64.25$. Ceci conclut que pour $p \geq 67$, tous les coefficients de la matrice $T_{25}(p)$ sont non nuls, et que le graphe $\mathrm{K}_{25}(p)$ est complet pour de tels p. $\square$

4.2. **Quelques vérifications de nos résultats.** Les propositions 4.1.2 et 4.1.3 constituent une première vérification de nos calculs. En effet, on connaît grâce à ces propositions les valeurs propres de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$ et $\mathbb{Z}[X_{25}]$: on vérifie que ces valeurs correspondent bien aux valeurs propres des matrices T_{23} et T_{25} calculées par nos algorithmes.

Une deuxième vérification repose sur la remarque finale de [10, Annexe B, §5.3]. Suivant l'indexation adoptée ici pour X_{23}, on a $L_2 \simeq \mathrm{E}_{15} \oplus \mathrm{E}_8$ et $L_3 \simeq \mathrm{E}_{16} \oplus \mathrm{E}_7$. Ainsi, le coefficient d'indice $(3,2)$ de la matrice T_{23} est égal à $\mathrm{N}_2(\mathrm{E}_{15} \oplus \mathrm{E}_8, \mathrm{E}_{16} \oplus \mathrm{E}_7)$. On constate sur la matrice T_{23} que l'on a calculé que ce coefficient vaut 120, ce qui est bien cohérent avec le résultat de [10] évoqué ci-dessus.

Une autre vérification repose sur l'étude des graphes de Kneser $\mathrm{K}_{23}(p)$ $(2 \leq p \leq 113)$ et $\mathrm{K}_{25}(p)$ $(2 \leq p \leq 67)$, qu'on a calculés explicitement grâce au théorème 4.1.4. On vérifie dans un premier temps qu'ils sont connexes, comme exposé précédemment, ce qui est cohérent avec la proposition 2.2.6.

De plus, les graphes $\mathrm{K}_{24}(p)$ ont été calculé dans [10, ch. X, Théorème 2.4] pour tout p premier. On vérifie que nos calculs des graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ sont cohérents avec la propriété suivante :

Proposition 4.2.1. *Soient $n \equiv -1 \bmod 8$ et p un nombre premier. Pour $i = 1, 2$, on se donne $L_i \in \mathcal{L}_n$ d'image $\overline{L_i}$ dans X_n, et $P_i \in \mathcal{L}_{n+1}$ d'image $\overline{P_i} \in X_{n+1}$ tel que $L_i \simeq P_i \cap \alpha_i^\perp$ pour un certain $\alpha_i \in R(P_i)$.*

Si les sommets $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ sont adjacents dans le graphe $\mathrm{K}_n(p)$, alors les sommets $\overline{P_1}$ et $\overline{P_2}$ sont adjacents dans le graphe $\mathrm{K}_{n+1}(p)$.

Démonstration. Considérons $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$ deux p-voisins, que l'on voit comme des réseaux de $L_1 \otimes \mathbb{Q} = L_2 \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{U}_n$. Pour $i = 1, 2$, on pose $\widetilde{P_i} = L_i \oplus \mathrm{A}_1$, et P_i l'unique réseau unimodulaire pair contenant $\widetilde{P_i}$ (c'est-à-dire l'image réciproque par $\widetilde{P}_i^\sharp \to \text{rés}\, \widetilde{P_i}$ de l'unique droite isotrope de rés $\widetilde{P_i}$).

Les réseaux P_1, P_2 sont des réseaux unimodulaires pairs de $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n \oplus (\mathbb{Q} \otimes \mathrm{A}_1)$ qui vérifient pour $i = 1, 2 : L_i = P_i \cap \mathrm{U}_n$. On est ainsi dans le cadre de [10, Annexe B, Proposition 4.2]. D'après cette proposition, les réseaux P_1, P_2 sont des p-voisins, ce qui conclut notre démonstration. □

On applique ce résultat aux graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ et $\mathrm{K}_{24}(p)$. On vérifie que cette propriété est satisfaite pour $p < 47$ (il est inutile de la vérifier pour $p \geq 47$ comme les graphes $\mathrm{K}_{23}(p)$ et $\mathrm{K}_{24}(p)$ sont alors complets). Pour cela, on utilise la table 1, qui nous donne pour chaque réseau $L \in \mathcal{L}_{23}$ la classe dans X_{24} de l'unique réseau unimodulaire pair contenant $L \oplus \mathrm{A}_1$.

On vérifie aussi qu'on a le corollaire plus faible suivant :

Corollaire 4.2.2. *Soit p un nombre premier. On note $\mathrm{K}'_{24}(p)$ le sous-graphe de $\mathrm{K}_{24}(p)$ obtenu en retirant le sommet correspondant au réseau de Leech. Alors le diamètre de $\mathrm{K}'_{24}(p)$ est inférieur ou égal au diamètre de $\mathrm{K}_{23}(p)$.*

En particulier que le graphe $\mathrm{K}'_{24}(p)$ est complet pour $p \geq 23$.

Une dernière vérification de nos calculs provient de la proposition suivante :

Proposition 4.2.3. *Soient $n = 23$ ou 25 et p premier. Alors l'endomorphisme T_p de $\mathbb{Z}[X_n]$ est auto-adjoint pour le produit scalaire $(\ |\ )$ défini par :*

$$(\overline{L}_1|\overline{L}_2) = |\mathrm{O}(L_1)|\delta_{\overline{L}_1,\overline{L}_2},$$

où $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \in X_n$, $L_1 \in \mathcal{L}_n$ a pour classe $\overline{L}_1$ dans X_n, $\mathrm{O}(L_1)$ est le groupe orthogonal de L_1, et $\delta_{\overline{L}_1,\overline{L}_2} = 1$ si, et seulement si, $\overline{L}_1 = \overline{L}_2$ et 0 sinon.

Si l'on note P_{23} (respectivement P_{25}) la matrice diagonale de $\mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$ (respectivement $\mathrm{M}_{121}(\mathbb{Z})$) dont le i-ème terme diagonal est $|\mathrm{O}(L_i)|$ suivant la numérotation de la table 2 (respectivement de la table 3), alors pour tout p premier on a les égalités :

$$P_{23}\,\mathrm{T}_{23}(p) = \mathrm{T}_{23}^t(p)\,P_{23} \quad \text{et} \quad P_{25}\,\mathrm{T}_{25}(p) = \mathrm{T}_{25}^t(p)\,P_{25},$$

où pour $M \in \mathrm{M}_N(\mathbb{Z})$ on désigne par M^t la matrice transposée de M.

Démonstration. C'est un résultat classique, qui est par exemple énoncé dans [28, §2.5] (voir [10, Ch. III, §1 et §2] pour une démonstration élémentaire). C'est aussi un cas particulier d'une propriété plus générale du comportement des opérateurs de Hecke relativement à un produit scalaire naturel sur les espaces de formes modulaires algébriques au sens de Gross (voir [18, Proposition 6.9] pour l'énoncé général, et [10, Ch. IV, §4.7] pour une démonstration). □

D'après les valeurs obtenues pour T_{23} et T_{25}, on vérifie qu'il existe qu'une seule matrice diagonale P_1 et une seule matrice diagonale P_2 (à multiplication près par un scalaire) telles que : $P_1\,T_{23} = T_{23}^t\,P_1$ et $P_2\,T_{25} = T_{25}^t\,P_2$.

L'existence de P_1 et P_2 constitue déjà en soi une vérification de nos résultats. On s'assure de plus que les coefficients de P_1 et P_2 sont cohérents avec les valeurs des $|\mathrm{O}(L_i)|$ que l'on sait déterminer facilement. C'est notamment le cas lorsque $R(L_i)$ et L_i ont même rang (en tant que $\mathbb{Z}$-modules), et dans se cas le groupe $\mathrm{O}(L_i)$ se déduit directement du groupe de Weyl de $R(L_i)$.

Prenons par exemple le cas de L_1 (suivant les notations de la table 2). Posons $M = \mathrm{D}_{22} \oplus A_1$. On obtient alors : rés $M = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,d_1 \oplus^{\perp} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,d_2\right) \oplus^{\perp} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}a$ avec $q(d_1) = q(d_2) = 3/4$ et $q(a) = 1/4$. En particulier, il existe deux droites isotropes dans rés M, engendrées respectivement par $d_1 + a$ et $d_2 + a$. Ainsi, il existe deux réseaux $L^+, L^- \in \mathcal{L}_{23}$ contenant M : ces deux réseaux sont isomorphes, et sont échangés par toute isométrie de M qui n'est pas dans le groupe de Weyl de M (qui sont exactement les isométries de M qui échangent d_1 et d_2). Et on déduit que $|\mathrm{O}(L^+)| = |\mathrm{O}(L^-)| = \frac{|\mathrm{O}(M)|}{2} = 22!\,2^{22}$.

Il est aussi facile de déterminer la valeur de $|\mathrm{O}(L)|$ pour certains éléments de $\mathcal{L}_{25}$. En effet, la proposition 4.2.3 est aussi vraie pour $n = 24$, suivant [10, ch. III, §2] par exemple. On en déduit les valeurs des $|\mathrm{O}(P)|$ pour $P \in \mathcal{L}_{24}$ grâce à la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$, donnée dans [28] par exemple. Si l'on se donne $P \in \mathcal{L}_{24}$, alors le réseau $L = P \oplus \mathrm{A}_1$ est un élément de $\mathcal{L}_{25}$, et on a l'égalité : $|\mathrm{O}(L)| = 2\,|\mathrm{O}(P)|$. Pour s'en convaincre, il suffit de constater qu'un élément $\gamma \in \mathrm{O}(L)$ satisfait $\gamma(P) = P$ et $\gamma(\mathrm{A}_1) = \mathrm{A}_1$.

Ceci permet de déterminer la valeur de $|\mathrm{O}(L)|$ pour les éléments $L \in \mathcal{L}_{25}$ de la forme $L \simeq P \oplus \mathrm{A}_1$ avec $P \in \mathcal{L}_{24}$, qui sont exactement les éléments satisfaisant $R(L) \simeq R \coprod \mathbf{A}_1$, où R est le système de racines d'un élément de $\mathcal{L}_{24}$. Les différentes valeurs de R ont été déterminées par Niemeier [29] et Venkov [35] : c'est un système de racine de type ADE équicoxeter de rang 24, ou l'ensemble vide (lorsque P est le réseau de Leech).

Notons au passage que la détermination des matrices P_{23} et P_{25} nous donne pour tout L dans $\mathcal{L}_{23}$ ou $\mathcal{L}_{25}$ la quantité $|\mathrm{O}(L)|$. On donne dans [25] les matrices P_{23} et P_{25}.

4.3. **Congruences à la Harder.** On souhaite établir des congruences entre les traces de paramètres de Langlands–Satake de certaines formes automorphes normalisées, comme c'est par exemple le cas dans la conjecture de Harder, exposée dans [19] et déjà démontrée dans [10, Ch. X, Théorème 4.4] :

Théorème 4.3.1 (Conjecture de Harder)**.** *Pour tout premier p, on a la congruence suivante :*

$$D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^{13} + p^8 \bmod 41.$$

Dans [10], cette congruence est exprimée sous la forme $\tau_{4,10}(p) \equiv \tau_{22}(p) + p^{13} + p^8 \bmod 41$, qui est équivalente, du fait des égalités $D_{21,5}(p) = \tau_{4,10}(p)$ et $D_{21}(p) = \tau_{22}(p)$ déjà expliquées au paragraphe 2.3.

De telles congruences entre les fonctions $D_{w_1,\ldots,w_n}$ proviennent de congruences entre les colonnes des matrices V ou W. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 4.3.2. *Soient m un entier quelconque, et $i, j \in \{1, \ldots, 32\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$. Alors pour tout p on a la congruence :*

$$\lambda_i(p) \equiv \lambda_j(p) \bmod m.$$

De même, s'il existe $i, j \in \{1, \ldots, 57\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$, alors pour tout p on a la congruence :

$$\mu_i(p) \equiv \mu_j(p) \bmod m.$$

Enfin, s'il existe $i, j \in \{58, \ldots, 121\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$, alors pour tout p on a la congruence :

$$\mu_i(p) \equiv \mu_j(p) \bmod m\mathbb{Z}[\sqrt{144169}].$$

Démonstration. Supposons par exemple qu'il existe des entiers $i, j \in \{1, \dots, 32\}$ et un entier m tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$. Par définition, les coordonnées de v_i sont premières entre elles (et il en va de même pour celles de v_j). En particulier, l'égalité précédente implique qu'il existe $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ tel que $v_i - \alpha v_j \in (m\mathbb{Z})^{32}$. En faisant agir $T_{23}(p) \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{Z})$ sur ce vecteur, on déduit les implications suivantes :

$$\begin{aligned} v_i - \alpha v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} &\Rightarrow T_{23}(p)(v_i - \alpha v_j) \in (m\mathbb{Z})^{32} \\ &\Rightarrow \lambda_i(p) v_i - \alpha \lambda_j(p) v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\ &\Rightarrow \lambda_i(p)(v_i - \alpha v_j) + \alpha(\lambda_i(p) - \lambda_j(p)) v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\ &\Rightarrow \alpha(\lambda_i(p) - \lambda_j(p)) v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\ &\Rightarrow (\lambda_i(p) - \lambda_j(p)) v_j \in (m\mathbb{Z})^{32} \\ &\Rightarrow \lambda_i(p) - \lambda_j(p) \in m\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(où la dernière implication utilise que les coordonnées de v_j sont relativement premières entre elles).

La démonstration est identique si l'on possède des entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $i, j \in \{1, \dots, 121\}$ tels que $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$.

Dans le troisième cas, on peut remplacer l'hypothèse $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(w_j)$ par $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]/m\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]}(w_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]/m\mathbb{Z}[\sqrt{144169}]}(w_j)$ et on obtient le même résultat. Cependant, on n'utilisera ce cas uniquement lorsque $\mu_i(p) - \mu_j(p) \in \mathbb{Z}$. □

Il suffit ensuite d'utiliser les proposition 4.1.2 et 4.1.3 pour déduire les congruences cherchées. Du fait des propositions 4.1.2 et 4.1.3, les fonctions $D_{w_1,\dots,w_n}$ que l'on fera intervenir sont exactement celles provenant des représentations $\Delta_{w_1,\dots,w_n}$ présentes dans les tables 4, 5 et 6. Par exemple, le théorème suivant améliore le Théorème 4.3.1 :

Théorème 4.3.3. *Pour tout nombre premier p, on a la congruence :*

$$D_{21,5}(p) \equiv D_{21}(p) + p^{13} + p^8 \mod 9840.$$

De plus, cette congruence est optimale, dans le sens où on ne peut pas remplacer 9840 *par un de ses multiples.*

Démonstration. Pour obtenir la congruence précédente, il suffit dans un premier temps de constater que, pour $(m, i, j) = (9840, 26, 28)$, on a l'égalité : $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$. Le lemme 4.3.2 nous donne pour tout premier p la congruence $\lambda_{26}(p) \equiv \lambda_{28}(p) \mod 9840$. D'après la table 4 et la proposition 4.1.2, on a les égalités :

$$\begin{aligned} \lambda_{26}(p) &= p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p\left(\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]\right) | V_{\mathrm{St}}\right) \\ &= D_{21}(p) + p\, D_{19,7}(p) + p^2\, D_{17}(p) + p^3\, D_{15}(p) + p^4\,(1 + p + p^2)\, D_{11}(p) \\ &\quad + p^8\,(1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5), \\ \lambda_{28}(p) &= p^{\frac{21}{2}} \mathrm{Trace}\left(c_p\left(\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]\right) | V_{\mathrm{St}}\right) \\ &= D_{21,5}(p) + p\, D_{19,7}(p) + p^2\, D_{17}(p) + p^3\, D_{15}(p) + p^4\,(1 + p + p^2)\, D_{11}(p) \\ &\quad + p^9\,(1 + p + p^2 + p^3). \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\lambda_{26}(p) - \lambda_{28}(p) = D_{21}(p) + p^{13} + p^8 - D_{21,5}(p)$$

qui est la congruence cherchée. Notons au passage que l'on a aussi l'égalité $\mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_i) = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(v_j)$ pour $(m, i, j) = (9840, 27, 29)$, qui nous donne la même congruence.

Pour constater que cette congruence est optimale, il suffit d'évaluer la quantité $\lambda_{26}(p) - \lambda_{28}(p) = D_{21}(p) + p^{13} + p^8 - D_{21,5}(p)$ pour certaines valeurs de p. On constate par exemple que $\lambda_{26}(2) - \lambda_{28}(2) = 9840$, ce qui prouve l'optimalité. □

L'ensemble des congruences que l'on a trouvées sont données par le théorème 1.0.3 donné en introduction, que l'on démontre ici.

Démonstration du Théorème 1.0.3. On donne pour chacun des points du théorème la congruence de la forme $\lambda_i \equiv \lambda_j \bmod m$ (ou $\mu_i \equiv \mu_j \bmod m$), qui se déduit du lemme 4.3.2. On précise lorsqu'il a fallu utiliser des résultats supplémentaires.

Certaines congruences qui apparaissent sont des "multiplications par p" des congruences cherchées : on peut évaluer nos congruences jusqu'à $p = 67$, et ainsi on pourra "diviser une congruence modulo m par p" dès lors que les diviseurs premiers de m seront inférieurs ou égaux à 67. C'est aussi le fait d'évaluer ces congruences jusqu'à $p = 67$ qui nous permet dans certains cas de dire si elles sont optimales.

(i) : $\lambda_{22}(p) \equiv \lambda_{26}(p) \bmod 17424$ ce qui nous donne la congruence $p\, D_{19,7}(p) \equiv p\, D_{19}(p) + p^7 + p^{14} \bmod 17424$. Il suffit d'évaluer la quantité $D_{19,7}(p) \equiv D_{19}(p) + p^6 + p^{13}$ pour les p premiers divisant 17424 pour déduire la congruence cherchée, qui est optimale.

(ii) et (iii) : $\lambda_{26}(p) \equiv \lambda_{28}(p) \bmod 9840$ et $\lambda_{16}(p) \equiv \lambda_{19}(p) \bmod 12696$ donnent directement les congruences cherchées, qui sont optimales.

(iv) : $\lambda_{20}(p) \equiv \lambda_{14}(p) \bmod 7800$ et $\mu_{15}(p) \equiv \mu_{24}(p) \bmod 20800$ nous donnent la congruence $p\, D_{21,9}(p) \equiv p\, D_{21}(p) + p^7 + p^{16} \bmod 62400$. Il suffit d'évaluer la quantité $D_{21,9}(p) \equiv D_{21}(p) + p^6 + p^{15}$ pour les p premiers divisant 62400 pour déduire la congruence cherchée, qui est optimale.

(v) : $\lambda_{11}(p) \equiv \lambda_{12}(p) \bmod 4368$ et $\lambda_{17}(p) \equiv \lambda_{18}(p) \bmod 416$ donnent directement la congruence cherchée, qui est optimale.

(vi) : $\lambda_{10}(p) \equiv \lambda_7(p) \bmod 2730$ et $\mu_{64}(p) \equiv \mu_{67}(p) \bmod 8$ nous donnent la congruence $p\, D_{21,13}(p) \equiv p\, D_{21}(p) + p^5 + p^{18} \bmod 10920$ et il suffit d'évaluer la quantité $D_{21,13}(p) \equiv D_{21}(p) + p^4 + p^{17}$ pour les p premiers divisant 10920 pour obtenir la congruence cherchée. Cependant, on n'a aucune certitude sur l'optimalité de la congruence.

(vii) à (xii) : $\mu_{10} \equiv \mu_{18} \bmod 8972$, $\mu_{44} \equiv \mu_{37} \bmod 5472$, $\mu_{21} \equiv \mu_{36} \bmod 2184$, $\mu_{41} \equiv \mu_{38} \bmod 5856$, $\mu_{35} \equiv \mu_{40} \bmod 2976$ et $\mu_{53} \equiv \mu_{56} \bmod 7872$ nous donnent directement les congruences cherchées. Il est facile de voir que les congruences $(viii)$, (ix), (x) et (xii) sont optimales.

$(xiii)$: les congruences $\mu_{11} \equiv \mu_6 \bmod 5408$, $\mu_{11} \equiv \mu_{12} \bmod 96$, $\mu_{12} \equiv \mu_6 \bmod 44224$ et $\mu_{13} \equiv \mu_7 \bmod 8292$ nous donnent les congruences : $D_{23,19,11}(p) \equiv (1+p^2)\, D_{21}(p) + p^6 + p^{17} \bmod 5408$, $D_{23,19,11}(p) \equiv (1+p^2)\, D_{21}(p) + p^6\, D_{11}(p) \bmod 96$ et $p^6\, D_{11}(p) \equiv p^6 + p^{17} \bmod 132672$ (qui est une "multiplication par p^6" de la congruence de Ramanujan). On en déduit ainsi la congruence cherchée. $\square$

Outre la congruence (ii) (qui est une optimisation de la conjecture de Harder), deux congruences attirent notre attention.

La congruence (vii) est la seule faisant intervenir une forme de Siegel de genre 2 qui n'avait pas été traitée dans [10] ou [34]. Suivant la méthode de [15] développée dans [34], on a le résultat suivant :

Proposition 4.3.4. *Soit S l'espace des formes modulaires paraboliques de Siegel de genre 2 de poids $\mathrm{Sym}^6\mathbb{C}^2 \otimes \det^{10}$ (qui est un espace de dimension 1). Pour l un nombre premier, on note ρ_l la représentation l-adique associée par la construction de Weissauer (voir [36] et [34, Théorème 1.1]), et $\overline{\rho}_l$ la $\mathbb{F}_l$-représentation résiduelle associée (voir par exemple [10, §X.1]).*

Alors pour $l > 23$, la représentation $\overline{\rho}_l$ est irréductible si, et seulement si, $l \neq 2243$.

Démonstration. Nous nous contentons ici de reprendre la méthode de Dieulefait [15] ainsi que les notations qui y sont utilisées (et qu'il serait trop long de réintroduire ici).

Suivant ces notations, considérons p un nombre premier et définissons la quantité :

$$C_{6,10}(p) = \left(p^{23} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|\Lambda^2 V_{\mathrm{St}}) - p^{15} - p^{31}\right)(1+p^8)^2 - p^{31} \cdot \mathrm{Trace}(c_p(\Delta_{23,7})|V_{\mathrm{St}})^2.$$

Considérons l un nombre premier, et les deux assertions suivantes :

(i) la représentation $\overline{\rho}_l$ est somme directe de deux représentations π_1 et π_2 de dimension 2, dont les poids de l'inertie modérée sont respectivement $\{0,15\}$ et $\{8,23\}$, et satisfaisant : $\pi_2 \simeq \pi_1^* \otimes \chi_l^{23}$, où χ_l désigne le caractère cyclotomique modulo l.

(ii) pour tout p premier différent de l, on a : $C_{6,10}(p) \equiv 0 \bmod l$.

Dieulefait montre que, si $l > 23$, on a l'implication : $(i) \Rightarrow (ii)$.

On définit de même, pour p premier, les quantités $A_{6,10}(p)$, $B_{6,10}(p)$ et $D_{6,10}(p)$ (suivant les notations de [34]), qui correspondent chacune à un type de réduction de la représentation $\overline{\rho}_l$. Par exemple, $D_{6,10}$ correspond à une réduction de la forme $\pi_1 \oplus \pi_2$, où les poids de l'inertie modérée de π_1 et π_2 sont respectivement $\{0,8\}$ et $\{15,23\}$, et satisfaisant $\pi_2 \simeq \pi_1^* \otimes \chi_l^{23}$.

Nos calculs démontrent les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{pgcd}\left(\{A_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 1 \\ \mathrm{pgcd}\left(\{B_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \\ \mathrm{pgcd}\left(\{C_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 2243 \\ \mathrm{pgcd}\left(\{D_{6,10}(p) \mid p \in \{2,3,5\}\}\right) & = & 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{array}.$$

On en déduit ainsi que, si $l > 23$ et $l \neq 2243$, alors la représentation $\overline{\rho}_l$ est irréductible.

Il reste à étudier le cas $l = 2243$. Mais dans ce cas, la congruence (vii) et le théorème de Chebotarev permettent de conclure quant à la réductibilité de $\overline{\rho}_{2243}$ (en constatant $8972 = 4 \cdot 2243$), et donne pour $l = 2243$ l'égalité

$$\overline{\rho}_l \simeq (1 \oplus \chi_l^8) \otimes \overline{\rho}_{\Delta_{15},l},$$

où on désigne par $\overline{\rho}_{\Delta_{15},l}$ la représentation l-adique associée à l'unique forme modulaire parabolique normalisée de poids 16 pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. □

La seconde congruence qui attire notre attention est la congruence $(viii)$. En effet, elle apparaissait déjà dans [3, §6, Example 3] sous la forme plus faible de la conjecture :

$$(\forall\, p \text{ premier})\ \ D_{23,13,5}(p) \equiv D_{23,13}(p) + p^9 + p^{14} \bmod 19.$$

Ainsi, en constatant que $5472 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 19$, la congruence $(viii)$ apparaît donc non seulement comme un démonstration de la conjecture précédente, mais aussi comme une amélioration comme on a pu remplacer 19 par un de ses multiples.

4.4. **Une conjecture de Gan–Gross–Prasad.** Soit $n \equiv -1, 0 \bmod 8$. Alors on possède une application naturelle $\phi_n : X_n \to X_{n+1}$ définie de la manière suivante :

- si $n \equiv -1 \bmod 8$: on se donne $L \in \mathcal{L}_n$, et on note $\overline{L}$ sa classe dans X_n. Alors $M = L \oplus A_1$ est un réseau de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\mathrm{rés} M = \mathrm{rés} L \oplus \mathrm{rés} A_1 \simeq \mathbb{Z}/2\, e_1 \oplus \mathbb{Z}/2\, e_2$ (avec $q(e_1) = 3/4$ et $q(e_2) = 1/4$). En particulier, $\mathrm{rés} M$ possède une unique droite isotrope (celle engendrée par $e_1 + e_2$) : l'image réciproque de cette droite par la projection naturelle $M^\sharp \to \mathrm{rés} M$ est un réseau $P \in \mathcal{L}_{n+1}$ dont la classe $\overline{P}$ dans X_{n+1} ne dépend que de $\overline{L}$. On pose $\phi_n(\overline{L}) = \overline{P}$.
- si $n \equiv 0 \bmod 8$: on se donne $L \in \mathcal{L}_n$, et on note $\overline{L}$ sa classe dans X_n. Alors $P = L \oplus A_1$ est un élément de $\mathcal{L}_{n+1}$ dont la classe $\overline{P}$ dans X_{n+1} ne dépend que de $\overline{L}$. On pose $\phi_n(\overline{L}) = \overline{P}$.

On sait déjà que, pour $n = 23, 24$ ou 25, deux éléments de $\mathcal{L}_n$ sont isomorphes si, et seulement si, leurs systèmes de racines sont isomorphes. Les application ϕ_{23} et ϕ_{24} se déduisent directement de cette constatation :

- pour ϕ_{23} : soient $L \in \mathcal{L}_{23}$, $P \in \mathcal{L}_{24}$ et $\overline{L}, \overline{P}$ leurs classes respectives dans X_{23} et X_{24}. Alors $\phi_{23}(\overline{L}) = \overline{P}$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in R(P)$ tel que $L \simeq P \cap \alpha^\perp$. L'application ϕ_{23} se déduit donc directement de la table 1 ;
- pour ϕ_{25} : soient $L \in \mathcal{L}_{24}$, $P \in \mathcal{L}_{25}$ et $\overline{L}, \overline{P}$ leurs classes respectives dans X_{24} et X_{25}. Alors $\phi_{24}(\overline{L}) = \overline{P}$ si, et seulement si, $R(P) \simeq R(L) \oplus \mathbf{A}_1$.

Les applications $\phi_n : X_n \to X_{n+1}$ ainsi définies induisent des applications $\widetilde{\phi}_n : \mathbb{C}^{X_{n+1}} \to \mathbb{C}^{X_n}$: elles agissent donc sur les espaces de forme automorphes pour O_{n+1} de poids trivial (définies au paragraphe 2.4). On a alors les énoncés suivants :

Définition 4.4.1. *Soient* $n \equiv -1 \bmod 8$ *(respectivement* $n \equiv 0 \bmod 8$*), et* $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{n+1})$ *(respectivement* $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{n+1})$*) tel que* $\pi_\infty = \mathbb{C}$*. On lui associe le sous-ensemble* $\mathrm{Res}\,\pi$ *de* $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_n)$ *(respectivement* $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_n)$*) défini comme suit.*

Soit $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_{n+1})$ *propre pour* $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{n+1})$*, qui engendre* π*. On écrit* $f|_{X_n} = f_1 + \cdots + f_r$*, où les* f_i *sont propres pour* $\mathrm{H}(\mathrm{O}_n)$*. Alors* $\pi' \in \mathrm{Res}\,\pi$ *si, et seulement si, l'un des* f_i *ci-dessus engendre* π'*.*

Proposition 4.4.2. *Les tables 7, 8 et 9 donnent les paramètres standards des éléments de* $\mathrm{Res}\,\pi$ *pour* $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ *ou* $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$*, lorsque* π_∞ *est trivial.*

Démonstration. On se contente ici de détailler le cas où $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ (la même méthode s'applique lorsque $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$).

On possède une base v_i de vecteurs propres pour l'action de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{23})$ sur $\mathbb{C}[X_{23}]$, ainsi qu'une base w_j de vecteurs propres pour l'action de $\mathrm{H}(\mathrm{O}_{24})$ sur $\mathbb{C}[X_{24}]$ (grâce à la matrice T_{23} déterminée précédemment, et à la matrice de T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{24}]$ donnée dans [28]). On connaît de plus les représentations $\pi'_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ et $\pi_j \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ respectivement associées aux v_i et aux w_j (voir table 4 et [10, Table C.5] par exemple).

Comme on a déterminé l'application $\phi_{23} : \mathbb{C}[X_{23}] \to \mathbb{C}[X_{24}]$, on peut construire les éléments $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ vérifiant : $(\forall\, i \in \{1, \ldots, 32\})\ \phi_{23}(v_i) = \sum_{j=1}^{24} \alpha_{i,j} w_j$.

Par définition, l'ensemble $\mathrm{Res}\,\pi_j$ se déduit de l'équivalence : $\pi'_i \in \mathrm{Res}\,\pi_j \Leftrightarrow \alpha_{i,j} \neq 0$. □

Théorème 4.4.3. *Soient* $n = 1, 2$ *ou* 3*,* $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{8n})$ *(respectivement* $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{8n+1})$*) tel que* π_∞ *est triviale, et* $\pi' \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{8n-1})$ *(respectivement* $\pi' \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{8n})$*) tel que* π'_∞ *est aussi triviale.*

Alors $\pi' \in \mathrm{Res}\,\pi$ *si, et seulement si, il existe des multi-ensembles finis* $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \subset \cup_m \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_m)$*, et des applications* $d_1 : \Pi_1 \to \mathbb{N}^*$ *et* $d_2 : \Pi_2 \to \mathbb{N}^*$ *tels que :*

$$\psi(\pi, \mathrm{St}) = \bigoplus_{\pi_i \in \Pi_1} \pi_i[d_1(\pi_i)] \;\oplus\; \bigoplus_{\pi_j \in \Pi_2} \pi_j[d_2(\pi_j)],$$

$$\psi(\pi', \mathrm{St}) = \bigoplus_{\pi_i \in \Pi_1} \pi_i[d_1(\pi_i)+1] \;\oplus\; \bigoplus_{\pi_j \in \Pi_2} \pi_j[d_2(\pi_j)-1] \;\oplus\; \bigoplus_{\pi_k \in \Pi_3} \pi_k.$$

Démonstration. Le cas $n = 3$ découle directement d'une inspection des tables 7, 8 et 9. Le cas $n = 2$ se déduit facilement des matrices de l'opérateur T_2 sur $\mathbb{C}[X_{15}]$, $\mathbb{C}[X_{16}]$ et $\mathbb{C}[X_{17}]$ (données dans [10, Annexe B] pour X_{15} et X_{17}, et dans [10, ch. III, §3] pour X_{16} par exemple). Le cas $n = 1$ est évident (comme $|X_7| = |X_8| = |X_9| = 1$). □

Ce résultat valide dans ces cas particuliers la conjecture formulée par Gan–Gross–Prasad, qui conclut l'exposé [30, Classical groups, the local case]. Suivant les mêmes notations, il s'agit des cas où $n = m - 1$, avec $m \in \{8, 9, 16, 17, 24, 25\}$.

5. Tables de résultats.

$R(P)$	R	$R(L)$	$R(P)$	R	$R(L)$
$\mathbf{D}_{24}$	$\mathbf{D}_{24}$	$\mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_5$
$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_8$	$\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{D}_{14} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$4\,\mathbf{E}_6$	$\mathbf{E}_6$	$3\,\mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_5$
	$\mathbf{E}_8$	$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_7$	$2\,\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_6$	$\mathbf{A}_9$	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6$
$3\,\mathbf{E}_8$	$\mathbf{E}_8$	$2\,\mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{E}_7$		$\mathbf{D}_6$	$2\,\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{A}_{24}$	$\mathbf{A}_{24}$	$\mathbf{A}_{22}$	$4\,\mathbf{D}_6$	$\mathbf{D}_6$	$3\,\mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$
$2\,\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$3\,\mathbf{A}_8$	$\mathbf{A}_8$	$2\,\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6$
$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{E}_7$	$\mathbf{A}_{17}$	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{E}_7$	$2\,\mathbf{A}_7 \coprod 2\,\mathbf{D}_5$	$\mathbf{A}_7$	$\mathbf{A}_7 \coprod 2\,\mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$
	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{D}_6$		$\mathbf{D}_5$	$2\,\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{D}_{10} \coprod 2\,\mathbf{E}_7$	$\mathbf{D}_{10}$	$\mathbf{D}_8 \coprod 2\,\mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$4\,\mathbf{A}_6$	$\mathbf{A}_6$	$3\,\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_4$
	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$4\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4$	$\mathbf{A}_5$	$3\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_3$
$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_9$	$\mathbf{A}_{15}$	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_9$		$\mathbf{D}_4$	$4\,\mathbf{A}_5 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$
	$\mathbf{D}_9$	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$6\,\mathbf{D}_4$	$\mathbf{D}_4$	$5\,\mathbf{D}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$
$3\,\mathbf{D}_8$	$\mathbf{D}_8$	$2\,\mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$6\,\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_4$	$5\,\mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$
$2\,\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{A}_{10}$	$8\,\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_3$	$7\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$
$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$\mathbf{A}_{11}$	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$12\,\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_2$	$11\,\mathbf{A}_2$
	$\mathbf{D}_7$	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$24\,\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_1$	$23\,\mathbf{A}_1$

Table 1. Classes d'isomorphisme des systèmes de racines des éléments de X_{23}

i	R_i	ϕ_i	i	R_i	ϕ_i
1	$\mathbf{D}_{22} \coprod \mathbf{A}_1$	$(926, 1, 3, 18, 1, 8)$	17	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_5$	$(246, 0, 7, 15, 1, 288)$
2	$\mathbf{D}_{14} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(606, 1, 6, 14, 2, 8)$	18	$3\,\mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_5$	$(246, 0, 11, 9, 3, 162)$
3	$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_7$	$(606, 0, 6, 15, 2, 8)$	19	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$(206, 0, 7, 14, 1, 320)$
4	$2\,\mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{E}_7$	$(606, 0, 9, 11, 3, 2)$	20	$2\,\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(206, 1, 7, 14, 1, 800)$
5	$\mathbf{A}_{22}$	$(506, 0, 2, 20, 0, 23)$	21	$3\,\mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(206, 1, 12, 6, 4, 512)$
6	$\mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$(446, 1, 6, 14, 2, 32)$	22	$2\,\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6$	$(186, 0, 6, 16, 0, 567)$
7	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{E}_7$	$(366, 0, 5, 16, 1, 32)$	23	$\mathbf{A}_7 \coprod 2\,\mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$	$(166, 0, 10, 10, 2, 768)$
8	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{D}_6$	$(366, 0, 5, 17, 1, 72)$	24	$2\,\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(166, 1, 9, 12, 1, 2048)$
9	$\mathbf{D}_8 \coprod 2\,\mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(366, 1, 9, 10, 3, 32)$	25	$3\,\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_4$	$(146, 0, 8, 14, 0, 1715)$
10	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$(366, 0, 9, 11, 3, 32)$	26	$3\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_3$	$(126, 0, 11, 10, 1, 3456)$
11	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_9$	$(326, 0, 5, 16, 1, 56)$	27	$4\,\mathbf{A}_5 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(126, 3, 8, 12, 0, 10368)$
12	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(326, 1, 5, 16, 1, 128)$	28	$5\,\mathbf{D}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(126, 3, 15, 0, 5, 8192)$
13	$2\,\mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(286, 1, 9, 10, 3, 128)$	29	$5\,\mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$	$(106, 0, 12, 10, 0, 9375)$
14	$\mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{A}_{10}$	$(266, 0, 4, 18, 0, 143)$	30	$7\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(86, 1, 14, 7, 0, 32768)$
15	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$(246, 0, 8, 12, 2, 120)$	31	$11\,\mathbf{A}_2$	$(66, 0, 22, 0, 0, 177147)$
16	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(246, 1, 8, 12, 2, 288)$	32	$23\,\mathbf{A}_1$	$(46, 23, 0, 0, 0, 8388608)$

Table 2. Numérotations des systèmes de racines des éléments de X_{23}

i	R_i	ϕ_i	i	R_i	ϕ_i
1	$\mathbf{A}_1$	$(2,1,0,0,0,2)$	62	$\mathbf{A}_8 \coprod 2\,\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(186,1,6,16,0,1152)$
2	$\mathbf{A}_2$	$(6,0,2,0,0,3)$	63	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(186,1,10,11,2,1920)$
3	$9\,\mathbf{A}_1$	$(18,9,0,0,0,512)$	64	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod 2\,\mathbf{A}_4$	$(186,0,8,16,0,2000)$
4	$\mathbf{A}_2 \coprod 12\,\mathbf{A}_1$	$(30,12,2,0,0,12288)$	65	$\mathbf{E}_6 \coprod 3\,\mathbf{A}_6$	$(198,0,9,14,1,1029)$
5	$25\,\mathbf{A}_1$	$(50,25,0,0,0,33554432)$	66	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_2$	$(198,0,8,16,0,1620)$
6	$4\,\mathbf{A}_2 \coprod 9\,\mathbf{A}_1$	$(42,9,8,0,0,41472)$	67	$3\,\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(218,1,6,18,0,1458)$
7	$\mathbf{A}_3 \coprod 15\,\mathbf{A}_1$	$(42,15,2,1,0,131072)$	68	$3\,\mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(210,3,12,6,4,2048)$
8	$9\,\mathbf{A}_2$	$(54,0,18,0,0,19683)$	69	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod 2\,\mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(210,1,11,9,3,768)$
9	$\mathbf{A}_3 \coprod 5\,\mathbf{A}_2 \coprod 6\,\mathbf{A}_1$	$(54,6,12,1,0,62208)$	70	$\mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$	$(210,0,10,12,2,768)$
10	$12\,\mathbf{A}_2 \coprod \mathbf{A}_1$	$(74,1,24,0,0,1062882)$	71	$\mathbf{D}_7 \coprod 2\,\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(210,1,9,14,1,2048)$
11	$3\,\mathbf{A}_3 \coprod 4\,\mathbf{A}_2 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(66,3,14,3,0,41472)$	72	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod 2\,\mathbf{A}_1$	$(210,2,7,14,1,1280)$
12	$4\,\mathbf{A}_3 \coprod 9\,\mathbf{A}_1$	$(66,9,8,4,0,131072)$	73	$\mathbf{A}_{10} \coprod \mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(210,1,6,17,0,1232)$
13	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(434,1,5,18,1,72)$	74	$2\,\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_2$	$(222,0,9,14,1,729)$
14	$\mathbf{D}_4 \coprod 21\,\mathbf{A}_1$	$(66,21,3,0,1,8388608)$	75	$\mathbf{A}_{10} \coprod \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{D}_5$	$(222,0,7,15,1,396)$
15	$6\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2$	$(78,0,14,6,0,12288)$	76	$2\,\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(242,1,7,16,1,800)$
16	$\mathbf{A}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_3 \coprod 3\,\mathbf{A}_2 \coprod 2\,\mathbf{A}_1$	$(78,2,14,5,0,34560)$	77	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3$	$(234,0,9,15,1,1152)$
17	$\mathbf{D}_4 \coprod 9\,\mathbf{A}_2$	$(78,0,21,0,1,78732)$	78	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_5$	$(234,0,6,18,0,648)$
18	$8\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(98,1,16,8,0,131072)$	79	$4\,\mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(242,1,12,8,4,512)$
19	$2\,\mathbf{A}_4 \coprod 4\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(90,1,12,8,0,12800)$	80	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_3$	$(234,0,10,12,2,480)$
20	$3\,\mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod 2\,\mathbf{A}_2 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(90,3,12,7,0,36000)$	81	$\mathbf{D}_7 \coprod 2\,\mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_5$	$(258,0,11,10,3,216)$
21	$\mathbf{D}_4 \coprod 5\,\mathbf{A}_3 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(90,3,13,5,1,32768)$	82	$\mathbf{D}_8 \coprod 2\,\mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(258,1,12,8,4,512)$
22	$\mathbf{A}_5 \coprod 3\,\mathbf{A}_3 \coprod 4\,\mathbf{A}_2$	$(90,0,16,6,0,31104)$	83	$\mathbf{A}_9 \coprod 2\,\mathbf{D}_7$	$(258,0,8,13,2,160)$
23	$\mathbf{A}_5 \coprod 4\,\mathbf{A}_3 \coprod 6\,\mathbf{A}_1$	$(90,6,10,7,0,98304)$	84	$\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{A}_7$	$(258,0,7,16,1,320)$
24	$\mathbf{D}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_2$	$(102,0,15,6,1,13500)$	85	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(258,1,8,13,2,384)$
25	$\mathbf{A}_5 \coprod 2\,\mathbf{A}_4 \coprod 2\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2 \coprod \mathbf{A}_1$	$(102,1,12,9,0,14400)$	86	$2\,\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{A}_2$	$(270,0,6,18,0,432)$
26	$6\,\mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(122,1,12,12,0,31250)$	87	$\mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_6$	$(270,0,7,16,1,273)$
27	$4\,\mathbf{D}_4 \coprod 9\,\mathbf{A}_1$	$(114,9,12,0,4,131072)$	88	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_7 \coprod \mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(290,1,8,14,2,288)$
28	$\mathbf{A}_5 \coprod 2\,\mathbf{D}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_3$	$(114,0,14,6,2,6144)$	89	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_5$	$(282,0,8,14,2,224)$
29	$2\,\mathbf{A}_5 \coprod 2\,\mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(114,1,10,11,0,7200)$	90	$4\,\mathbf{E}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(290,1,12,8,4,162)$
30	$2\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 2\,\mathbf{A}_3 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(114,3,11,8,1,18432)$	91	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{A}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$(294,1,4,19,0,308)$
31	$3\,\mathbf{A}_5 \coprod 4\,\mathbf{A}_2$	$(114,0,14,9,0,17496)$	92	$2\,\mathbf{A}_{12} \coprod \mathbf{A}_1$	$(314,1,4,20,0,338)$
32	$\mathbf{D}_5 \coprod 6\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(114,1,15,7,1,32768)$	93	$\mathbf{E}_7 \coprod 3\,\mathbf{D}_6$	$(306,0,12,9,4,128)$
33	$\mathbf{A}_6 \coprod 2\,\mathbf{A}_4 \coprod 2\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2 \coprod \mathbf{A}_1$	$(114,1,12,10,0,16800)$	94	$2\,\mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{E}_7$	$(306,0,7,17,1,200)$
34	$4\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_2$	$(126,0,10,12,0,3888)$	95	$\mathbf{D}_9 \coprod \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{E}_6$	$(306,0,8,14,2,120)$
35	$\mathbf{D}_5 \coprod 4\,\mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$	$(126,0,13,9,1,7500)$	96	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{D}_9 \coprod \mathbf{A}_5$	$(306,0,7,17,1,288)$
36	$\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_4$	$(126,0,11,10,1,3500)$	97	$\mathbf{A}_{14} \coprod \mathbf{A}_9 \coprod \mathbf{A}_2$	$(306,0,6,19,0,450)$
37	$\mathbf{A}_6 \coprod 2\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod 2\,\mathbf{A}_2$	$(126,0,12,11,0,9072)$	98	$\mathbf{A}_{11} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{E}_6$	$(330,0,8,14,2,72)$
38	$4\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(146,1,11,12,1,10368)$	99	$3\,\mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(338,1,9,12,3,128)$
39	$\mathbf{D}_5 \coprod 2\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(138,1,12,8,2,4608)$	100	$2\,\mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{E}_7 \coprod 2\,\mathbf{A}_1$	$(354,2,9,11,3,128)$
40	$\mathbf{D}_5 \coprod 3\,\mathbf{A}_5 \coprod 4\,\mathbf{A}_1$	$(138,4,9,10,1,13824)$	101	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(354,1,9,12,3,128)$
41	$6\,\mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(146,1,18,0,6,8192)$	102	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(354,1,5,17,1,128)$
42	$2\,\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_4 \coprod 2\,\mathbf{A}_1$	$(138,2,8,13,0,5880)$	103	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{D}_9 \coprod \mathbf{A}_1$	$(386,1,5,18,1,128)$
43	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod 2\,\mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_3$	$(138,0,10,13,0,4800)$	104	$\mathbf{A}_{15} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_3$	$(378,0,7,17,1,128)$
44	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4 \coprod 2\,\mathbf{A}_3 \coprod 2\,\mathbf{A}_1$	$(138,2,11,10,1,12288)$	105	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{A}_8$	$(378,0,4,21,0,162)$
45	$2\,\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_2$	$(150,0,11,11,1,2940)$	106	$3\,\mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_4$	$(402,0,12,9,4,32)$
46	$3\,\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_4$	$(150,0,9,12,1,1372)$	107	$\mathbf{A}_{13} \coprod \mathbf{D}_{11}$	$(402,0,5,18,1,56)$
47	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(150,1,8,14,0,3360)$	108	$\mathbf{A}_{18} \coprod \mathbf{E}_6$	$(414,0,5,18,1,57)$
48	$4\,\mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_1$	$(170,1,8,16,0,4802)$	109	$\mathbf{A}_4 \coprod 6\,\mathbf{A}_2 \coprod 5\,\mathbf{A}_1$	$(66,5,14,2,0,116640)$
49	$3\,\mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3$	$(162,0,13,7,3,1536)$	110	$\mathbf{D}_{10} \coprod 2\,\mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{A}_1$	$(434,1,9,12,3,32)$
50	$\mathbf{D}_6 \coprod 4\,\mathbf{D}_4 \coprod 3\,\mathbf{A}_1$	$(162,3,15,2,5,8192)$	111	$\mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{E}_7 \coprod \mathbf{D}_6$	$(450,0,9,13,3,32)$
51	$\mathbf{D}_6 \coprod 3\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3$	$(162,0,11,12,1,3456)$	112	$2\,\mathbf{D}_{12} \coprod \mathbf{A}_1$	$(530,1,6,16,2,32)$
52	$\mathbf{A}_7 \coprod 2\,\mathbf{D}_5 \coprod 2\,\mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(162,1,12,9,2,4096)$	113	$\mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{E}_7$	$(546,0,9,13,3,8)$
53	$2\,\mathbf{A}_7 \coprod 2\,\mathbf{D}_4 \coprod \mathbf{A}_1$	$(162,1,10,10,2,2048)$	114	$\mathbf{D}_{14} \coprod \mathbf{D}_{10} \coprod \mathbf{A}_1$	$(546,1,6,16,2,32)$
54	$\mathbf{A}_8 \coprod 3\,\mathbf{A}_5$	$(162,0,8,15,0,1944)$	115	$\mathbf{A}_{17} \coprod \mathbf{E}_8$	$(546,0,5,19,1,18)$
55	$\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_2$	$(162,0,10,14,0,4536)$	116	$\mathbf{A}_{23} \coprod \mathbf{A}_2$	$(558,0,4,21,0,72)$
56	$3\,\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{A}_2$	$(174,0,8,15,0,1536)$	117	$\mathbf{A}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$	$(602,1,2,22,0,50)$
57	$\mathbf{A}_8 \coprod \mathbf{A}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_4$	$(174,0,9,13,1,1260)$	118	$\mathbf{D}_{16} \coprod \mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(722,1,6,16,2,8)$
58	$2\,\mathbf{A}_7 \coprod 2\,\mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_1$	$(194,1,10,12,2,2048)$	119	$3\,\mathbf{E}_8 \coprod \mathbf{A}_1$	$(722,1,9,12,3,2)$
59	$\mathbf{E}_6 \coprod 3\,\mathbf{A}_5 \coprod \mathbf{D}_4$	$(186,0,12,11,2,2592)$	120	$\mathbf{D}_{18} \coprod \mathbf{E}_7$	$(738,0,6,17,2,8)$
60	$\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{D}_5 \coprod \mathbf{A}_5$	$(186,0,10,11,2,768)$	121	$\mathbf{D}_{24} \coprod \mathbf{A}_1$	$(1106,1,3,20,1,8)$
61	$2\,\mathbf{A}_7 \coprod \mathbf{D}_6 \coprod \mathbf{A}_3 \coprod \mathbf{A}_1$	$(186,1,9,13,1,2048)$			

TABLE 3. Numérotations des systèmes de racines des éléments de X_{25}

i	ψ_i	λ_i
1	$[22]$	4194303
2	$\Delta_{21} \oplus [20]$	2096862
3	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$	1049196
4	$\Delta_{19}[3] \oplus [16]$	527472
5	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	522792
6	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	267048
7	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	262368
8	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$	254448
9	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	137712
10	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	131328
11	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	123408
12	$\Delta_{17}[5] \oplus [12]$	114672
13	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10]$	78576
14	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	71376
15	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	64992
16	$\Delta_{15}[7] \oplus [8]$	60072
17	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	57072
18	$\Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	48336
19	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	47376
20	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	40176
21	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	34872
22	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	30192
23	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	22752
24	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	22272
25	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	13368
26	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	12768
27	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	8688
28	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	2928
29	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	-1152
30	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	-3888
31	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$	-21744
32	$\Delta_{11}[11]$	-49128

TABLE 4. Paramètres standards $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ des 32 représentations π_i dans $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{23})$ telles que π_∞ est triviale, rangées par valeurs propres associées pour T_2 décroissantes.

i	ψ_i	μ_i
1	$[24]$	16777215
2	$\Delta_{21}[3] \oplus [18]$	2095128
3	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	1042320
4	$\Delta_{19}[5] \oplus [14]$	538392
5	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	521472
6	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	272160
7	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	271440
8	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	262080
9	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	246240
10	$\Delta_{15}[9] \oplus [6]$	142632
11	$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [10]$	142368
12	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	139488
13	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	138768
14	$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [10]$	129600
15	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	129408
16	$\Delta_{21,13}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus [10]$	125040
17	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	113568
18	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{15}[7] \oplus [6]$	88800
19	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	88368
20	$\Delta_{23,19,11} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [8]$	79968
21	$\Delta_{19}[5] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	74040
22	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	73968
23	$\Delta_{23,17,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	70128
24	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	67008
25	$\Delta_{17}[7] \oplus [10]$	63888
26	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [6]$	63408
27	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	61200
28	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	57120
29	$\Delta_{21,9}[3] \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [6]$	53760
30	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	51168
31	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	49008
32	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	45360
33	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	39120
34	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	38400
35	$\Delta_{23,17,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	35280
36	$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	32544
37	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	32160
38	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	29040
39	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	27888
40	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	26352
41	$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	23184
42	$\Delta_{23,9} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	19440
43	$\Delta_{23,13} \oplus \Delta_{19,7}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	16800
44	$\Delta_{23,13,5} \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [4]$	15744
45	$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	14784
46	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	14112
47	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	13200
48	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	9360
49	$\Delta_{23,17,5} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	6624
50	$\Delta_{23,15,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	3504
51	$\Delta_{23,7} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	-6480
52	$\Delta_{23,15,3} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [2]$	-10176
53	$\Delta_{21}[3] \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	-11040
54	$\Delta_{21,5}[3] \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [2]$	-11760
55	$\Delta_{23,19,3} \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [2]$	-13440
56	$\Delta_{23,19,3} \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [2]$	-18912
57	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}[2] \oplus \Delta_{11}[9]$	-53472

TABLE 5. Paramètres standards $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ des 57 représentations π_i dans $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale pour lesquelles les valeurs propres associées pour T_2 sont entières, rangées par valeurs propres associées pour T_2 décroissantes.

i	$\psi_i,\ \psi_{i+1}$	$\mu_i,\ \mu_{i+1}$
58	$\Delta_{23}^2 \oplus [22]$	$8389146 \pm 12\sqrt{144169}$
60	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus [20]$	$4194264 \pm 12\sqrt{144169}$
62	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$	$2098932 \pm 12\sqrt{144169}$
64	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus [16]$	$1055484 \pm 12\sqrt{144169}$
66	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	$1046124 \pm 12\sqrt{144169}$
68	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$534636 \pm 12\sqrt{144169}$
70	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$525276 \pm 12\sqrt{144169}$
72	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$	$509436 \pm 12\sqrt{144169}$
74	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	$275964 \pm 12\sqrt{144169}$
76	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	$263196 \pm 12\sqrt{144169}$
78	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	$247356 \pm 12\sqrt{144169}$
80	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus [12]$	$229884 \pm 12\sqrt{144169}$
82	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10]$	$157692 \pm 12\sqrt{144169}$
84	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$143292 \pm 12\sqrt{144169}$
86	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$130524 \pm 12\sqrt{144169}$
88	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{15}[7] \oplus [8]$	$120684 \pm 12\sqrt{144169}$
90	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$114684 \pm 12\sqrt{144169}$
92	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$97212 \pm 12\sqrt{144169}$
94	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	$95292 \pm 12\sqrt{144169}$
96	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$80892 \pm 12\sqrt{144169}$
98	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$70284 \pm 12\sqrt{144169}$
100	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$60924 \pm 12\sqrt{144169}$
102	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$46044 \pm 12\sqrt{144169}$
104	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$45084 \pm 12\sqrt{144169}$
106	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$27276 \pm 12\sqrt{144169}$
108	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$26076 \pm 12\sqrt{144169}$
110	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$17916 \pm 12\sqrt{144169}$
112	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$6396 \pm 12\sqrt{144169}$
114	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	$-1764 \pm 12\sqrt{144169}$
116	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	$-7236 \pm 12\sqrt{144169}$
118	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$	$-42948 \pm 12\sqrt{144169}$
120	$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{11}[11]$	$-97716 \pm 12\sqrt{144169}$

TABLE 6. Paramètres standards $\psi_i = \psi(\pi_i, \mathrm{St})$ des 64 représentations π_i dans $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale pour lesquelles les valeurs propres associées pour T_2 ne sont pas entières, rangées par valeurs propres associées pour T_2 décroissantes.

$\psi(\pi, \mathrm{St})$	$\psi(\pi', \mathrm{St})$
$[23] \oplus [1]$	$[22]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus [21]$	$[22],\ \Delta_{21} \oplus [20]$
$\Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19]$	$\Delta_{21} \oplus [20],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18],\ \Delta_{19}[3] \oplus [16],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$
$\Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15]$	$\Delta_{19}[3] \oplus [16],\ \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12],\ \Delta_{17}[5] \oplus [12]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$
$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12],$ $\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10],\ \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$
$\Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11]$	$\Delta_{17}[5] \oplus [12],\ \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10], \Delta_{15}[7] \oplus [8],\ \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$
$\Delta_{15}[8] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{15}[7] \oplus [8]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10],$ $\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10],$ $\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8],\ \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$
$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8],\ \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8],$ $\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$	$\Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10],\ \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$
$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],\ \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$	$\Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6],$ $\Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6],$ $\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5]$	$\Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6],$ $\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$
$\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$	$\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4],$ $\Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$
$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4],\ \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{11}[10] \oplus [1]$	$\Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2],\ \Delta_{11}[11]$
$\Delta_{11}[12]$	$\Delta_{11}[11]$

Table 7. Paramètres standards $\psi(\pi', \mathrm{St})$ des éléments $\pi' \in \mathrm{Res}\,\pi$, pour les représentations $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{O}_{24})$ telles que π_∞ est triviale.

$\psi(\pi,\mathrm{St})$	$\psi(\pi',\mathrm{St})$
$[24]$	$[23]\oplus[1]$
$\Delta_{21}[3]\oplus[18]$	$\Delta_{21}[2]\oplus[1]\oplus[19]$
$\Delta_{21}[3]\oplus\Delta_{17}\oplus[16]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus[1]\oplus[15]$
$\Delta_{19}[5]\oplus[14]$	$\Delta_{19}[4]\oplus[1]\oplus[15]$
$\Delta_{21}[3]\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus[14]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus[1]\oplus[15]$
$\Delta_{21}[3]\oplus\Delta_{15}[3]\oplus[12]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[11]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{19}[3]\oplus\Delta_{15}\oplus[12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus[13]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus[12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus[13]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{17}[3]\oplus[12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{17}[4]\oplus[13]$
$\Delta_{15}[9]\oplus[6]$	$\Delta_{15}[8]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,19,11}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{15}[3]\oplus[10]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[11]$
$\Delta_{21}[3]\oplus\Delta_{15}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[10]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[11]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{19}[3]\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[10]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23,19,11}\oplus\Delta_{21,13}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus[10]$	$\Delta_{21,13}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus[1]\oplus[11]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[10]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{21,13}[3]\oplus\Delta_{17}\oplus[10]$	$\Delta_{21,13}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus[1]\oplus[11]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{17}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[10]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{17}[4]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{15}[7]\oplus[6]$	$\Delta_{15}[8]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{15}[5]\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{15}[6]\oplus[9]$
$\Delta_{23,19,11}\oplus\Delta_{21,9}\oplus\Delta_{15}[3]\oplus[8]$	$\Delta_{21,9}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{19}[5]\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[8]$	$\Delta_{19}[4]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{15}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23,17,9}\oplus\Delta_{21,13}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{21,9}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{17}[7]\oplus[10]$	$\Delta_{17}[6]\oplus[1]\oplus[11]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{21,9}\oplus\Delta_{15}[5]\oplus[6]$	$\Delta_{21,9}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{21,13}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{21}[3]\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[8]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{21,9}[3]\oplus\Delta_{15}[3]\oplus[6]$	$\Delta_{21,9}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{21,9}\oplus\Delta_{17}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{17}[4]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{21,9}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{15}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[6]$	$\Delta_{21,9}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{21,13}\oplus\Delta_{17}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{17}[4]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{15}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{19}[3]\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[6]$	$\Delta_{19}[4]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,17,9}\oplus\Delta_{21,13}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{23,15,7}\oplus\Delta_{19}[3]\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[6]$	$\Delta_{19}[4]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{21,9}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[6]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{17}[5]\oplus\Delta_{11}\oplus[8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{17}[4]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{21,13}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[6]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{23,15,7}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[6]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,9}\oplus\Delta_{21,5}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{15}[3]\oplus\Delta_{11}\oplus[4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{23,13}\oplus\Delta_{19,7}[3]\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{23,13,5}\oplus\Delta_{21,9}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}\oplus[4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{23,17,5}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19,7}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[5]$
$\Delta_{21}[3]\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{11}[5]\oplus[6]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{17}[3]\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[6]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{21,5}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[4]$	$\Delta_{21,5}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{23,17,5}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{11}[5]\oplus[4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{11}[6]\oplus[5]$
$\Delta_{23,15,7}\oplus\Delta_{21,5}\oplus\Delta_{19}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[4]$	$\Delta_{21,5}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{23,7}\oplus\Delta_{21,5}\oplus\Delta_{17}[3]\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[4]$	$\Delta_{21,5}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{23,15,3}\oplus\Delta_{21,5}\oplus\Delta_{19,7}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[2]$	$\Delta_{21,5}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{21}[3]\oplus\Delta_{11}[7]\oplus[4]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{11}[8]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{21,5}[3]\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{15}\oplus\Delta_{11}[3]\oplus[2]$	$\Delta_{21,5}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{23,19,3}\oplus\Delta_{21,5}\oplus\Delta_{17}\oplus\Delta_{11}[5]\oplus[2]$	$\Delta_{21,5}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{23,19,3}\oplus\Delta_{21}\oplus\Delta_{11}[7]\oplus[2]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{11}[8]\oplus[1]\oplus[3]$
$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}[2]\oplus\Delta_{11}[9]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{11}[10]\oplus[1]$

TABLE 8. Paramètres standards $\psi(\pi',\mathrm{St})$ des éléments $\pi'\in\mathrm{Res}\,\pi$, pour les représentations $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale, dont les valeurs propres associées pour T_2 sont entières.

$\psi(\pi, \mathrm{St})$	$\psi(\pi', \mathrm{St})$
$\Delta_{23}^2 \oplus [22]$	$[23] \oplus [1],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus [21]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus [20]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus [21],\ \Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus [18]$	$\Delta_{21}[2] \oplus [1] \oplus [19],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus [16]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17],\ \Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus [16]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus [17],\ \Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$\Delta_{19}[4] \oplus [1] \oplus [15],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [14]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [14]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [15],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13],\ \Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus [13],\ \Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13],\ \Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus [12]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus [13],\ \Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [10]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{15}[4]\oplus[1]\oplus[11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11],$ $\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{15}[7] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9],\ \Delta_{15}[8] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,13} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{21,13}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus [1] \oplus [11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{17}[5] \oplus \Delta_{11} \oplus [10]$	$\Delta_{17}[6] \oplus [1] \oplus [11],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{17}[4] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{15}[5] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{15}[6] \oplus [9],\ \Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9],$ $\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9],\ \Delta_{19}[4]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [9],$ $\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,9} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{15}[3] \oplus \Delta_{11} \oplus [6]$	$\Delta_{21,9}[2] \oplus \Delta_{15}[4] \oplus [1] \oplus [7],$ $\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{17}[3] \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [8]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{17}[4]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[9],\ \Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{19}[3] \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$\Delta_{19}[4] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [7],$ $\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [6]$	$\Delta_{21}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[7],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{11}[6]\oplus[5]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19,7} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{15} \oplus \Delta_{11}[3] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19,7}[2] \oplus \Delta_{15}[2] \oplus \Delta_{11}[2] \oplus [5],$ $\Delta_{21,5}[2] \oplus \Delta_{17}[2] \oplus \Delta_{11}[4] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21,5} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{17} \oplus \Delta_{11}[5] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11}\oplus\Delta_{19}[2]\oplus\Delta_{11}[6]\oplus[5],\ \Delta_{21,5}[2]\oplus\Delta_{17}[2]\oplus\Delta_{11}[4]\oplus[1]\oplus[3]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{19} \oplus \Delta_{11}[7] \oplus [4]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{19}[2] \oplus \Delta_{11}[6] \oplus [5],\ \Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{21} \oplus \Delta_{11}[9] \oplus [2]$	$\Delta_{21}[2] \oplus \Delta_{11}[8] \oplus [1] \oplus [3],\ \mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{11}[10] \oplus [1]$
$\Delta_{23}^2 \oplus \Delta_{11}[11]$	$\mathrm{Sym}^2\Delta_{11} \oplus \Delta_{11}[10] \oplus [1],\ \Delta_{11}[12]$

Table 9. Paramètres standards $\psi(\pi', \mathrm{St})$ des éléments $\pi' \in \mathrm{Res}\,\pi$, pour les représentations $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{SO}_{25})$ telles que π_∞ est triviale, dont les valeurs propres associées pour T_2 ne sont pas entières.

Références

[1] N. Arancibia, C. Moeglin et D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires*, disponible à l'url http://arxiv.org/abs/1507.01432.

[2] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations : conjectures*, dans *Orbites unipotentes et représentations II : groupes p-adiques et réels*, Astérisque 171–172, 13–71 (1989).

[3] J. Bergström, N. Dummigan et T. Mégarbané, *Eisenstein congruences for* $\mathrm{SO}(4,3)$*,* $\mathrm{SO}(4,4)$*, spinor and triple product L-values*, et appendice par T. Ibukiyama et H. Katsurada, preprint, 2016, disponible à l'url http://arxiv.org/abs/1605.00819.

[4] R. Borcherds, *The Leech lattice and other lattices*, Ph. D. dissertation, University of Cambridge (1984).

[5] R. Borcherds, *Richard Borcherds' Complete List of Even 25-Dimensional Lattices of Determinant 2*, disponible à l'url http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/even_det2.25.html.

[6] A. Borel, *Automorphic L-functions*, dans [14] vol. II, 27–61 (1977).

[7] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques, Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV à VI*, Masson, Paris (1981).

[8] R. K. Brylinski, *Limits of weight spaces, Lusztig's q-analogs, and fiberings of adjoint orbits*, Journal of the A.M.S. 2, 517-533 (1989).

[9] A. Caraiani, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J. 161, 2311–2413 (2012).

[10] G. Chenevier et J. Lannes, *Formes automorphes et voisins de Kneser des réseaux de Niemeier.*

[11] G. Chenevier et D. Renard, *Level one algebraic cusp forms of classical groups of small rank*, Mem. Amer Math. Soc. 1121, 128p (2015).

[12] L. Clozel, *Purity Reigns Supreme*, I.M.R.N. 2013, 328–346 (2013).

[13] J .H. Conway et N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 290, Springer-Verlag, New York (1999).

[14] *Automorphic forms, representations and L-functions, Part I & II*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII, Oregon State Univ., Corvallis, Ore., Providence, R.I., Amer. Math. Soc. (1977).

[15] L. V. Dieulefait, *On the images of the Galois representations attached to genus* 2 *Siegel modular forms*, J. Reine Angew. Math., 553 (2002), pp. 183–200.

[16] W. Fulton et J. Harris, *Representation theory*, Springer Verlag, New York (1991).

[17] B. Gross, *On the Satake isomorphism*, dans *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, A. Scholl and R. Taylor Ed., Cambridge Univ. Press (1998).

[18] B. Gross, *Algebraic modular forms*, Israel J. Math. 113, 61–93 (1999).

[19] G. Harder, *A congruence between a Siegel and an elliptic modular form*, dans *The 1–2–3 of modular forms*, édité par J.H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder et D. Zagier, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 247–260 (2008).

[20] T. Kaletha, *Rigid inner forms of real and p-adic groups*, disponible à l'url https://web.math.princeton.edu/~tkaletha/.

[21] S.-I. Kato, *Spherical functions and a q-analog of Kostant's weight multiplicity formula*, Ivent. Math. 66, 461-468 (1982).

[22] R. Langlands, *Euler products*, Yale Math. Monographs, Yale Univ. Press, New Haven and London (1971).

[23] G. Lusztig, *Singularities, character formulas, and a q-analog of weight multiplicities*, Astérisque 101, 208-227 (1983).

[24] T. Mégarbané, *Traces des opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de* SO_7*,* SO_8 *ou* SO_9 *en niveau 1 et poids arbitraire.*, disponibles à l'url https://arxiv.org/abs/1604.01914.

[25] T. Mégarbané, calculs de matrices des opérateurs T_p sur les classes d'isomorphisme de réseaux pairs de déterminant minimal en dimension 23 et 25, disponibles à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr.

[26] T. Mégarbané, algorithme du calcul de la matrice de l'opérateur de Hecke T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{23}]$, disponible à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/calculT2/X_23/calcul_T2_X23.txt.

[27] T. Mégarbané, algorithme du calcul de la matrice de l'opérateur de Hecke T_2 sur $\mathbb{Z}[X_{25}]$, disponible à l'url http://megarban.perso.math.cnrs.fr/programmes/calculT2/X_25/calcul_T2_X25.txt

[28] G. Nebe et B. Venkov, *On Siegel modular forms of weight 12*, J. reine angew. Math. 351, 49–60 (2001).

[29] H.-V. Niemeier, *Definite quadratische Formen der Dimension* 24 *und Diskriminante 1*, J. Number Theory 5, 142–178 (1973).

[30] D. Prasad, *Branching laws for non-tempered representations*, exposé au MSRI disponible à l'url http://www.msri.org/workshops/719/schedules/19231/documents/2362/assets/22428.

[31] S.-W. Shin, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Annals of Math. 173, 1645–1741 (2011).

[32] T. Springer, *Reductive groups*, dans [14] vol. I, 3–27 (1979).

[33] O. Taïbi, *Arthur's multiplicity formula for certain inner forms of special orthogonal and symplectic groups*, à paraître dans Journal of the European Mathematical Society.

[34] S. Tayou, *Images de représentations galoisiennes associées à certaines formes modulaires de Siegel de genre* 2, disponible à l'url http://arxiv.org/abs/1602.02272.

[35] B. Venkov, *On the classification of integral even unimodular* 24*-dimensional quadratic forms*, Chapitre 18 de [13].

[36] R. Weissauer, *Four dimensional galois representations*, Preprint, (2000)

CMLS, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail address: thomas.megarbane@polytechnique.edu