FORMULE DÉGÉNÉRÉE DES CARACTÈRES DE WEYL EN DIMENSION PAIRE

THOMAS MÉGARBANÉ

1. Objectif

Donnons-nous n un entier pair strictement positif, et posons $m = n/2$. On note G le groupe de Lie semi-simple connexe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et on se place dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. On fixe de plus une orientation pour $\mathbb{R}^n$, de telle sorte que la base canonique (e_i) soit une base orthonormée directe.

Notre but est de calculer la trace d'un élément $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$ dans une représentation W de G, ce qui se fait en utilisant la version dégénérée de la formule des caractères de Weyl. Introduisons quelques notations pour expliquer comment s'exprime cette trace.

On décompose $\mathbb{R}^n$ comme la somme orthogonale suivante :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{m} P_i$$

où les P_i sont des plans deux-à-deux orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ que l'on fixe une fois pour toutes.

On définit dans G le tore maximal T suivant :

$$T = \{g \in G \mid (\forall i)\ g(P_i) \subset P_i \text{ et } \det(g|_{P_i}) = 1\}$$

muni de l'isomorphisme naturel : $T \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathrm{SO}(P_i)$.

On fixe une fois pour toute m isomorphismes $\mathrm{SO}(P_i) \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On définit ensuite un unique isomorphisme $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$, où $\mathbb{S}^1$ désigne le cercle unité complexe, de telle sorte que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on associe à la matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ la quantité $\mathrm{e}^{i\theta}$. Le choix de l'isomorphisme $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$ dépend en fait du choix d'une racine primitive quatrième de l'unité, mais nous reviendrons en détail sur ce point plus loin.

Suivant la construction ci-dessus, on muni ainsi T d'un isomorphisme $T \simeq (\mathbb{S}^1)^m$, et on notera simplement $(t_1, \dots, t_m)$, pour $t_i \in \mathbb{S}^1$, les éléments de T. Notons au passage que l'on verra toujours $\mathbb{S}^1$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ dans la suite, et qu'on confondra les éléments des $\mathrm{SO}(P_i)$ avec des éléments de $\mathbb{C}$ suivant l'isomorphisme évoqué précédemment.

On note Φ le système de racines de (G, T), et $\mathcal{W}$ son groupe de Weyl. On se donne $\Phi^+ \subset \Phi$ un système de racines positives. En munissant $\mathbb{R}^m$ de sa base canonique $(e_i)_{1 \le i \le m}$, les ensembles Φ, Φ^+ et $\mathcal{W}$ sont donnés concrètement de la manière suivante :

- $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j\}_{1 \le i < j \le m} \subset \mathbb{R}^m$;
- $\Phi^+ = \{e_i \pm e_j\}_{1 \le i < j \le m} \subset \Phi$;
- $\mathcal{W} = \mathcal{S}_m \ltimes (\{\pm 1\}^m)^0$, où $\mathcal{S}_m$ désigne le groupe des permutations sur un ensemble à m éléments, et $(\{\pm 1\}^m)^0$ le sous-groupe des endomorphismes de $\mathbb{R}^m$ agissant par multiplication par ± 1 sur les vecteurs e_i et de déterminant 1.

On note $X = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{S}^1)$ le groupe des caractères de T (qui satisfait $X \simeq \mathbb{Z}^m$). On fixe un produit scalaire $(\ ,\ )$ sur $X \otimes \mathbb{R}$ invariant par l'action de $\mathcal{W}$. Un poids dominant de G est un élément $\lambda \in X$ tel que $(\lambda, \alpha) \ge 0$ pour tout élément $\alpha \in \Phi^+$. Suivant la théorie de Cartan–Weyl, on a une bijection canonique $\lambda \mapsto V_\lambda$ entre les poids dominants de G et les représentations irréductibles de G (à isomorphisme près). Le poids dominant λ est appelé le plus haut poids de V_λ. Enfin, pour $\lambda \in X$ et $t \in T$, on posera pour simplifier $t^\lambda = \lambda(t)$.

Pour $t \in T$, on note $M = C_G(t)^0$ la composante neutre du centralisateur de t dans G (en particulier, T est un tore maximal dans M, et $t \in M$). On associe à M les sous-ensembles de Φ^+ et de $\mathcal{W}$ suivants :

$$\Phi_M^+ = \{\alpha \in \Phi^+ | t^\alpha = 1\},$$
$$\mathcal{W}^M = \{w \in \mathcal{W} | w^{-1}(\Phi_M^+) \subset \Phi^+\}.$$

On note ρ et ρ_M la demi-somme respectivement des éléments de Φ^+ et de Φ_M^+. On définit enfin pour $v \in X \otimes \mathbb{R}$:

$$P_M(v) = \prod_{\alpha \in \Phi_M^+} \frac{(\alpha, v + \rho_M)}{(\alpha, \rho_M)}.$$

On a la proposition suivante d'après [1, Ch. 1, Proposition 1.9] :

Proposition 1.1 (Version dégénérée de la formule des caractères de Weyl)**.** *Soient $\lambda \in X$ un poids dominant, $t \in T$ et $M = C_G(t)^0$. Alors le caractère de t sur la représentation V_λ de plus haut poids λ est donné par :*

$$\chi_{V_\lambda}(t) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}^M} \varepsilon(w) \cdot t^{w(\lambda+\rho)-\rho} \cdot P_M(w(\lambda+\rho) - \rho_M)}{\prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_M^+} (1 - t^{-\alpha})}$$

où $\varepsilon : \mathcal{W} \to \{\pm 1\}$ désigne la signature sur le groupe $\mathcal{W}$.

Suivant l'expression ci-dessous, on fait face au problème suivant : étant donné $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$, comment trouver $t \in T$ qui est conjugué à g dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. On démontre ici que l'élément t associé à g est fonction du polynôme caractéristique de g ainsi que du "pfaffien" de l'endomorphisme $g - g^*$ dans une base orthonormée directe.

2. Présentation du pfaffien

Considérons la matrice alternée universelle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

à coefficients dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[a_{i,j},\ 1 \le i < j \le n]$. Suivant la théorie des formes bilinéaires alternées, le déterminant de la matrice A est un carré dans le corps des fractions de $\mathbb{Z}[a_{i,j},\ 1 \le i < j \le n]$: comme il s'agit d'un anneau factoriel, c'est un carré dans $\mathbb{Z}[a_{i,j},\ 1 \le i < j \le n]$.

Définition 2.1 (Pfaffien d'une matrice antisymétrique)**.** *Avec les mêmes notations, il existe un élément* pf $\in \mathbb{Z}[a_{i,j},\ 1 \le i < j \le n]$, *unique au signe près, tel que :* $\det(A) = \mathrm{pf}^2$.

Par spécialisation, ceci nous définit au signe près une application pf *définie sur les matrices antisymétriques réelles (ou à valeurs dans tout anneau commutatif), qui est polynomiale en les coefficients de ces matrices. On choisit le signe de telle sorte que la matrice la matrice $M = (m_{i,j})$ définie par :*

$$m_{i,j} = \begin{cases} -1 & si \quad i = j-1 \\ 1 & si \quad i = j+1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

vérifie $\mathrm{pf}(M) = 1$.

Il est facile d'exprimer explicitement le pfaffien de A comme un polynôme de degré m en les coefficients de A, ce qui se fait comme suit :

Proposition 2.2 (Définition formelle du pfaffien)**.** *Avec les mêmes notations, le pfaffien de la matrice A est donné par :*

$$\mathrm{pf}(A) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}.$$

Enfin, on utilisera les propriétés suivantes du pfaffien :

Proposition 2.3. *Soient A, A_1, A_2 des matrices carrées antisymétriques de tailles respectives n, n_1, n_2 (où n, n_1, n_2 sont des entiers pairs strictement positifs). Alors :*

(1) *Pour toute matrice B carrée de taille n : $\mathrm{pf}({}^tBAB) = \det(B) \cdot \mathrm{pf}(A)$;*

(2) *La matrice $A_1 \oplus A_2$ est une matrice carrée antisymétrique de taille $n_1 + n_2$ qui vérifie : $\mathrm{pf}(A_1 \oplus A_2) = \mathrm{pf}(A_1) \cdot \mathrm{pf}(A_2)$.*

3. Application aux classes de SO-conjugaison

Si l'on se donne u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $u^* = -u$, alors on peut définir son pfaffien (que l'on notera $\mathrm{pf}(u)$) comme le pfaffien de la matrice de u dans une base orthonormée directe (par exemple la base canonique introduite précédemment). Suivant la proposition 2.3, cette quantité ne dépend pas du choix de base.

Lemme 3.1. *Soit $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'endomorphisme $u = g - g^*$ est inversible ;*

(ii) *le polynôme caractéristique de g n'a pas de racine réelle ;*

(iii) *le pfaffien de u est non nul.*

Démonstration. L'endomorphisme u vérifie que $u^* = -u$, ce qui justifie déjà que son pfaffien est défini. Le reste du lemme découle du fait que $g^* = g^{-1}$, et donc : $u = g - g^* = g^{-1}(g-1)(g+1)$, ainsi que de la définition du pfaffien (en tant que racine carrée du déterminant). □

Théorème 3.2. *Soient $g_1, g_2 \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Pour $i = 1, 2$, on note $u_i = g_i - g_i^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *g_1 et g_2 sont conjugués dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;*

(ii) *g_1 et g_2 ont même polynôme caractéristique, et u_1 et u_2 ont même pfaffien.*

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente. Reste donc à montrer l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$.

Si g_1 et g_2 ont même polynôme caractéristique, alors on sait déjà qu'ils sont conjugués dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (conséquence du théorème spectral). Donnons-nous donc $s \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $s^* g_1 s = g_2$, qui vérifie donc : $s^* u_1 s = u_2$. En posant respectivement M_1, M_2, S les matrices de u_1, u_2, s dans la base canonique, l'égalité ci-dessus devient : ${}^tSM_1S = M_2$. En calculant le pfaffien de cette quantité, on déduit :

$$\mathrm{pf}(u_2) = \mathrm{pf}(M_2) = \mathrm{pf}({}^tSM_1S) = \det(S)\mathrm{pf}(M_1) = \mathrm{pf}(M_1).$$

On a deux possibilités :

– si $\mathrm{pf}(u_2) \neq 0$: alors nécessairement $\det(S) = 1$, donc $S \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;

– si $\mathrm{pf}(u_2) = 0$: alors, suivant le lemme 3.1, g_2 a une valeur propre réelle (qui est 1 ou -1) qui est nécessairement double (comme $g_2 \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ avec n pair). L'endomorphisme σ qui échange deux vecteurs propres orthogonaux associés à cet valeur propre, et préserve leur orthogonal, est un élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Quitte à changer s par $s\sigma$, on peut supposer que $S \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Dans les deux cas, g_1 et g_2 sont conjugués dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et on a l'équivalence cherchée. □

4. Calcul explicite de caractères de Weyl en dimension 8

Plaçons-nous désormais dans le cas où $n = 8$ (qui est le cas qui nous intéresse). On se donne $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$ et V_λ la représentation de G de plus haut poids λ, et on souhaite calculer la quantité $\mathrm{trace}(g|V_\lambda)$. Il s'agit en fait de la quantité $\chi_{V_\lambda}(t)$, où t est un élément de T conjugué à g dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Il suffit donc de trouver un tel t. On utilise dans un premier temps la proposition évidente suivante, qui découle du théorème spectral :

Proposition 4.1. *Soit $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$. On se donne $t = (t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{S}^1)^m$ qui vérifie :*

$$\det(X\mathrm{I}_n - g) = \prod_{i=1}^{m}(X - t_i)(X - \frac{1}{t_i}).$$

Alors g est conjugué dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ à t ou à $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{m-1}, 1/t_m)$.
En particulier, si l'un des t_i vaut ± 1, alors g est conjugué dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ à t.

En fait, le choix d'un tel t est relatif au choix des isomorphismes $\mathrm{SO}(P_i) \simeq \mathbb{S}^1$, que l'on définit ci-dessous. Ceci revient à fixer un isomorphisme $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$:

Proposition-Définition 4.2. *Soient α une racine de -1 (i ou $-i$), et $g \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$. On lui associe l'unique $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tel que :*

$$\det(X\mathrm{I}_2 - g) = (X - \lambda)(X - \frac{1}{\lambda}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{pf}(g - g^*) = \alpha \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Pour des problèmes liés à la calculabilité de certaines expressions à l'ordinateur, on est amené à faire les mêmes calculs dans $\mathbb{F}_p$. On a alors la situation suivante :

Proposition-Définition 4.3. *Soit p un nombre premier, α_p une racine de -1 dans une cloture $\overline{\mathbb{F}_p}$ de $\mathbb{F}_p$, et $g \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{F}_p)$. On lui associe l'unique $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_p}$ tel que :*

$$\det(X\mathrm{I}_2 - g) = (X - \lambda)(X - \frac{1}{\lambda}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{pf}(g - g^*) = \alpha \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Le point clé est que ces isomorphismes sont soumis au choix arbitraire d'une racine de -1. Cependant, ce choix n'a en pratique aucune incidence, et on a le théorème suivant lorsque $n = 8$:

Théorème 4.4. (*i*) *Si l'on se place sur $\mathbb{Q}$ et que l'on se donne $g \in \mathrm{SO}_8(\mathbb{Q})$, on note $t = (t_1, \dots, t_4) \in (\mathbb{S}^1)^4$ tel que :*

$$\det(X\mathrm{I}_8 - g) = \prod_{i=1}^{4}(X - t_i)(X - \frac{1}{t_i}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{pf}(g - g^*) = \prod_{i=1}^{4}\left(t_i - \frac{1}{t_i}\right).$$

Alors g est conjugué à t dans $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})$.

(*ii*) *Si l'on se place sur $\mathbb{F}_p$ et que l'on se donne $g \in \mathrm{SO}_8(\mathbb{F}_p)$, on note $t = (t_1, \dots, t_4) \in (\overline{\mathbb{F}_p})^4$ tel que :*

$$\det(X\mathrm{I}_8 - g) = \prod_{i=1}^{4}(X - t_i)(X - \frac{1}{t_i}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{pf}(g - g^*) = \prod_{i=1}^{4}\left(t_i - \frac{1}{t_i}\right).$$

Alors g est conjugué à t dans $\mathrm{SO}_8(\overline{\mathbb{F}_p})$.

Démonstration. Il suffit juste de vérifier que le choix de α ou de α_p n'a pas d'incidence sur le choix de t.

Suivant les résultats précédents, on a en fait que g est conjugué à tout élément t qui vérifie :

$$\det(X\mathrm{I}_8 - g) = \prod_{i=1}^{4}(X - t_i)(X - \frac{1}{t_i}) \quad \text{et} \quad \mathrm{pf}(g - g^*) = \prod_{i=1}^{4}\alpha \cdot \left(t_i - \frac{1}{t_i}\right)$$

c'est-à-dire qui vérifie :

$$\det(X\mathrm{I}_8 - g) = \prod_{i=1}^{4}(X - t_i)(X - \frac{1}{t_i}) \quad \text{et} \quad \mathrm{pf}(g - g^*) = \alpha^4 \cdot \left(\prod_{i=1}^{4}\left(t_i - \frac{1}{t_i}\right)\right)$$

et comme $\alpha^4 = 1$ on retrouve la condition souhaitée. □

Remarques :

- le point important ici est que m est pair, et donc le fait ne changer α (respectivement α_p) en $-\alpha$ (respectivement $-\alpha_p$) n'a pas d'incidence sur la définition de t. Cette méthode peut donc être éténdue dès lors que m est pair, c'est-à-dire que n est divisible par 4 ;
- en pratique, si l'on se donne $g \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{Q})$, pour p suffisamment grand (plus grand que tous les diviseurs premiers des dénominateurs des coefficients de g), on peut définir un élément $\overline{g} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{F}_p)$, et c'est de cette manière qu'on choisira les "p" avec lesquels on travaillera.

Références

[1] G. Chenevier et L. Clozel, *Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales*, Journal of the A.M.S. 22 Vol 2, 467-519 (2009).

CMLS, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail address: thomas.megarbane@polytechnique.edu