

Programme de colles n° 9

QUINZAINE DU 23 FÉVRIER AU 6 MARS 2025

Chapitres concernés

- Chapitre 18 : applications linéaires :
 - généralités : définition, bilinéarité de la composition, images directes et réciproques, endomorphismes, structure d'ev pour $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$
 - détermination d'une application linéaire : par espaces supplémentaires ou base de l'espace de départ, et propriétés qu'on en déduit ;
 - applications linéaires particulières : projecteurs, symétries, formes linéaires (et lien avec les hyperplans)

Démonstrations à savoir

- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'image directe d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F
- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E
- une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0\}$
- les projecteurs sont exactement les endomorphismes idempotents
- les hyperplans sont exactement les supplémentaires de droites

Remarques générales

- Les applications linéaires s'appuient sur les notions, déjà rencontrées, d'applications et d'espaces vectoriels. Ces notions sont à maîtriser pour manipuler correctement des applications linéaires. Et inversement les applications linéaires donnent une nouvelle manière de manipuler des espaces vectoriels (comme par exemple pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en l'interprétant comme un noyau ou une image d'application linéaire).
- Les espaces vectoriels, les familles de vecteurs, et les applications linéaires ont des propriétés très fortement liées : les élèves doivent pouvoir faire le lien entre somme directe, caractère libre et injectivité d'une part, caractère générateur et surjectivité d'autre part.
- L'utilisation de bases dans certains espaces bien connus (\mathbb{K}^n ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) est à maîtriser pour déterminer des propriétés d'une application linéaire (injectivité, surjectivité, bijectivité, ou base de l'image).