Programme de colles n° 15

QUINZAINE DU 8 AU 19 JUIN 2026

Chapitres concernés

- Chapitre 28 : intégration :
  - propriétés générales de l'intégrale pour les fonctions continues : linéarité, positivité, stricte croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire ;
  - théorème fondamental de l'analyse : moyenne d'une fonction continue sur un segment, théorème fondamental de l'analyse, utilisation à l'étude de fonction définie par une intégrale où la variable est dans les bornes ;
  - manipulation d'intégrales : intégrations par parties, changements de variables, utilisation de symétries (parité, périodicité, etc.) ;
  - inégalité de Taylor–Lagrange (le théorème de Taylor avec reste intégral est hors programme mais a été vu en cours)
  - sommes de Riemann : lien avec intégrale et valeur limite ; techniques pour estimer la vitesse de convergence
- Chapitre 30 : séries numériques :
  - notion de série (convergence, linéarité de la somme, etc.) et séries usuelles (série géométrique et exponentielle) ;
  - séries à termes positifs : inégalités, relation de comparaison, comparaison séries/intégrales, séries de Riemann ;
  - convergence absolue : lien avec la convergence, utilisation pour les convergences par comparaison.

Démonstrations à savoir

- l'intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle
- limite de sommes de Riemann (dans le cas d'une fonction lipschitzienne)
- si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0, et la réciproque est fausse
- convergence et limite de la série exponentielle
- théorème de comparaison série intégrale

Remarques générales

- La chapitre d'intégration avait pour but de donner une construction de l'intégrale : les techniques de manipulation d'intégrales du premier semestre sont à maîtriser (par exemple pour des résolutions d'équations différentielles).
- Différents outils d'analyse, notamment les manipulations d'ordres de grandeurs (avec formules de Taylor par exemple, et primitives de DL) sont particulièrement utiles pour estimer des intégrales, et sont à maîtriser.
- Il faut pouvoir reconnaître des sommes qui s'apparentent à des sommes de Riemann, et les adapter pour se ramener au théorème de Riemann par les manipulations classiques d'intégrales (linéarité, relation de Chasles, etc.).
- Les séries usuelles (géométrique, exponentielle, de Riemann notamment) doivent être maîtrisées pour montrer les convergences de séries.
- L'utilisation des séries télescopiques pour transformer l'étude d'une suite en l'étude d'une série a été vue en classe plusieurs fois, donc doit être comprise des élèves. Mais il s'agit d'un raisonnement difficile, qui ne saurait relever d'un automatisme.
- Les calculs reposent beaucoup sur des résultats des chapitres précédents : calculs avec des intégrales, développements limités/asymptotiques, etc. Et les élèves doivent être à l'aise avec ces notions.
- Les théorèmes de comparaisons nécessitent de travailler avec des séries dont les termes sont de signe constant (éventuellement à partir d'un certain rang) : il faudra bien préciser soit que les séries considérées sont à termes positifs, soit directement travailler avec la convergence absolue.
- Certains résultats classiques (séries alternées, séries de Bertrand, critère de d'Alembert) ont été vus en TD ou en cours, mais ne sont pas au programme, donc pas exigibles.