Programme de colles n° 13

QUINZAINE DU 4 AU 22 MAI 2024

Chapitres concernés

- Chapitre 24 : Polynômes : racines et factorisation
  - racines d'un polynôme : définition, multiplicité, utilisation pour calculer des restes de division euclidienne, liens avec la divisibilité, lien avec les dérivées successives, nullité par surabondance de racines, relations coefficients/racines
  - polynômes irréductibles : polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, factorisation en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
  - fonctions rationnelles : définition, zéros, pôles, réduction en éléments simples, et application aux calculs de dérivées/primitives
- Chapitre 25 : espaces vectoriels de dimension finie :
  - bases/familles en dimension finie : lien avec la dimension, base incomplète, base extraite, existence de bases ; détermination de la liberté (ou non) et du caractère générateur (ou non) en comparant cardinal d'une famille et dimension de l'espace.
  - sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension d'un sev, dimension d'une somme directe, formule de Grassmann, caractérisation d'une somme directe par la dimension
  - applications linéaires en dimension finie : caractérisation de la bijectivité/injectivité/surjectivité ; théorème du rang ; formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Démonstrations à savoir

- formule de Taylor polynomiale
- caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives (en admettant la formule de Taylor)
- formule de Grassmann
- caractérisation des espaces supplémentaires en dimension finie
- montrer que, pour S supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$, $f|_S^{\mathrm{Im} f}$ est un isomorphisme, et en déduire le théorème du rang

Remarques générales

- Les racines, et les multiplicités, peuvent servir à comparer des polynômes : soit en lien avec des degrés, soit en lien avec des divisibilités ou des divisions euclidiennes (notamment pour calculer efficacement des restes de divisions euclidiennes).
- La dimension finie est un outil supplémentaire, qui permet de démontrer très facilement certaines propriétés : il faudra toujours regarder si la dimension permet de montrer très rapidement une propriété avant de se lancer dans une démonstration trop générale qui n'utiliserait pas du tout la dimension finie.
- L'utilisation de bases ou de supplémentaires (dont l'existence a été prouvée en dimension finie) peut permettre de trouver une méthode de résolution, mais donnent généralement des méthodes assez complexes et calculatoires, et ne devraient donc constituer une démarche naturelle de résolution.
- Inversement, les théorèmes de dimension finie que sont la stricte croissance de la dimension, la formule de Grassmann ou le théorème du rang sont des outils particulièrement puissants, et devraient toujours être gardés à l'esprit lors de résolution de problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie.