Programme de colles n° 10

QUINZAINE DU 9 AU 20 MARS 2026

Chapitres concernés

- Chapitre 16 : continuité et limites
  - définition des limites (selon que les limites ou les valeurs en lesquelles on les regarde sont finies ou non) ;
  - limite à gauche ou à droite (qui sont toujours des limites épointées) ;
  - lien avec les suites (caractérisation séquentielle de la limite)
  - manipulation de limites (opérations et composées) ;
  - lien entre limites et inégalités (passage à la limite, théorèmes d'encadrement et de la limite monotone) ;
  - propriétés des fonctions continues : locales (continuité en un point, continuité à gauche ou à droite) et globales (TVI, théorème des bornes atteintes, bijection monotone) ;
  - lien avec les fonctions réelles à valeurs complexes.
- Chapitre 19 : dérivabilité
  - définition de la dérivabilité (avec taux d'accroissements), lien avec les dérivabilité à gauche et à droite ;
  - préservation de la dérivabilité : dérivabilité (et dérivabilité itérée) d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une réciproque ;
  - propriétés globales des fonctions dérivables : extrema et points critiques (lien entre eux), théorèmes de Rolle et des accroissements finis, inégalité des accroissements finis (fonctions lipschitziennes), lien avec la monotonie
  - prolongement des fonctions dérivables : prolongement $\mathcal{C}^1$ et prolongement $\mathcal{C}^k$;

Démonstrations à savoir

- caractérisation séquentielle de la limite ;
- théorème des valeurs intermédiaires (par dichotomie) ;
- théorème de Rolle et égalité des accroissements finis ;
- théorème de la limite de la dérivée (preuve) et énoncé du théorème du prolongement $\mathcal{C}^k$;
- formule de Leibniz

Remarques générales

- les notions de voisinages et de points adhérents ne peuvent constituer des finalement d'exercices ;
- les manipulations de limites (pour la continuité comme la dérivabilité) doivent se faire après que l'existence des limites a été montrée et les résultats vus dans les précédents chapitres pour déterminer des limites doivent être maîtrisés (limites classiques, croissances comparées, limites de taux d'accroissements, manipulations de o et de $\sim$) ;
- la distinction a été faite dans le cours entre les théorèmes qui sont ou non applicables pour une fonction à valeurs complexes : elle est à connaître par les élèves ;
- la continuité a été utilisée de nombreuses fois : par exemple pour les suites, aussi bien pour les suites implicites (pour définir la suite) que pour les suites récurrentes (pour déterminer les limites possibles). Il faudra bien préciser systématiquement lorsque l'on utilise la continuité, et en quel(s) point(s) ;
- la distinction a été faite dans le cours entre les théorèmes qui sont ou non applicables pour une fonction à valeurs complexes : elle est à connaître par les élèves ;
- la justification de la dérivabilité doit se faire en amont du calcul de la dérivée. Certains théorèmes (dérivée d'un produit, etc.) on été énoncé avec des hypothèses $\mathcal{C}^k$: ces résultats doivent être connus, et il n'y a pas à vérifier a posteriori qu'une dérivée est continue quand un théorème permet en amont de dire que la fonction à dériver est $\mathcal{C}^1$.