Feuille d'exercices n^{o}9 : Comparaison de fonctions et de suites

Exercice 1 [Vrai–Faux sur les relations de comparaison]

Prouver ou invalider les affirmations suivantes :

1. Si (u_n) est bornée et $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ alors (v_n) est bornée.
2. Si (u_n) converge et que $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) converge vers 0 et que $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ alors (v_n) converge.
4. Si (u_n) converge et que $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ alors (v_n) converge.
5. Si (u_n) converge, alors $u_{n+1} \sim u_n$.
6. Si (u_n) converge, alors $u_{n+1} = \mathrm{O}(u_n)$.
7. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors : $\ln(u_n) = \mathrm{o}(n)$; $\ln(u_n) = \mathrm{o}(u_n)$; $\ln(n) = \mathrm{o}(u_n)$.
8. Si $u_n \sim v_n$ alors : $u_n + 1 \sim v_n + 1$; $2u_n \sim 2v_n$; $u_n v_n \sim u_n^2$; $u_n + v_n \sim 2v_n$; $e^{u_n} \sim e^{v_n}$; $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
9. Le fait que $u_n \sim 2^n$ équivaut à : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim 2$; $u_n - 2^n = \mathrm{o}(1)$; $\ln(u_n) \sim n\ln(2)$; $\dfrac{u_n}{2^n} - 1 = \mathrm{o}(1)$.

Exercice 2 [Ordres de grandeur]

Classer par ordre de grandeur les suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$n,\ n^2,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \ln(n),\ \ln(n^2),\ (\ln(n))^2,\ \frac{\ln(n)}{n},\ \frac{\ln(n^2)}{n},\ \frac{(\ln(n))^2}{n},\ n\ln(n),\ 2^n,\ e^n,\ \frac{2^n}{n},\ \frac{e^n}{n},\ n^n,\ n!, 2^{n^2},\ (2^n)^2.$$

Exercice 3 [Limites de fonctions]

Déterminer les limites des fonctions suivantes en les points considérés :

1. $\dfrac{\tan(x) - x\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$ en 0 ;
2. $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)}$ en 0 ;
3. $\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)\right)^{x^2}$ en $+\infty$;
4. $\dfrac{\cos(2x) - \cos(5x)}{x^2}$ en 0 ;
5. $\dfrac{x\ln(x) - x}{x + \cos(x)}$ en $+\infty$;
6. $\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$;
7. $(\ln(e+x))^{1/x}$ en $+\infty$;
8. $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$ en $+\infty$;
9. $(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 (pour $\alpha \in \mathbb{R}$) ;
10. $\dfrac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)}$ en $+\infty$;
11. $\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{\ln(x)}{x}}$ en $+\infty$;
12. $\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 4 [Calculs d'équivalents et de limites]

Déterminer des équivalents puis les limites des fonctions suivantes en les points considérés :

1. $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ en 0 ;
2. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$;
3. $\dfrac{\cos(x)}{1+x}-1$ en 0 ;
4. $(x+1)^x-x^x$ en $+\infty$;
5. $x^2\ln(1+x)+x\cos(x)$ en $+\infty$;
6. $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\mathrm{Arctan}(x^3)}$ en 0 ;
7. $\dfrac{xe^x-x^2}{\mathrm{ch}(x)}$ en $+\infty$;
8. $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$ en 1 ;
9. $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2$ en 0.

Exercice 5 [Équivalents et limites de suites]

Déterminer un équivalent et la limite de la suite dont le terme général est :

1. $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$;
2. $e^{\tan\frac{\pi}{n^2}}-1$;
3. $(n+3\ln n)e^{-n-1}$;
4. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$;
5. $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$;
6. $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n-2n^2}$;
7. $\dfrac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1}$;
8. $\dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n}$;
9. $n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$;
10. $\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$;
11. $\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$.

Exercice 6 [Équivalent et somme]

On considère f une fonction décroissante définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x)+f(x+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$.
Déterminer un équivalent de f.

Exercice 7 [Équivalent d'une somme]

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\sum_{k=1}^{n}k!$. Montrer que $u_n\sim n!$.

Exercice 8 [Équivalent de suites définies implicitement]

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=X^3-(n+2)X^2+(2n+1)X-1$.

1. Montrer que pour n suffisamment grand le polynôme P_n possède trois racines a_n,b_n,c_n telles que :
$$0<a_n<1<b_n<3<\frac{2n+1}{3}<c_n.$$
2. Montrer que a_n,b_n,c_n vérifient :
$$a_n+b_n+c_n=n+2,\ a_nb_n+a_nc_n+b_nc_n=2n+1,\ a_nb_nc_n=1.$$
3. En déduire successivement que : $c_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty,\ a_n\underset{n\to+\infty}{\to}0,\ c_n\sim n,\ b_n\sim 2,\ a_n\sim\dfrac{1}{2n}$.