

Feuille d'exercices n°8 : Équations différentielles

Exercice 1 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (sur $\mathbb{R}$)]

1. $y' + 3y = x^2 e^{-x} : S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-3x} + \frac{2x^2 - 2x + 1}{4} e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} ; \text{Cauchy} : \lambda = \frac{3}{4} ;$
2. $y' + y = \cos(x) + \sin(x) : S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \sin(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ; \text{Cauchy} : \lambda = 1 ;$
3. $y' - \frac{3x}{x^2+1}y = \sqrt{x^2+1} - x : S = \{x \mapsto \lambda(1+x^2)^{3/2} + \text{Arctan}(x)(1+x^2)^{3/2} + (1+x^2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ; \text{Cauchy} : \lambda = 0 ;$
4. $(1+x^2)y' + xy = x^3 : S = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2-2}{3} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} ; \text{Cauchy} : \lambda = \frac{5}{3} ;$
5. $(1+e^{-x})y' - y = 1 : S = \{x \mapsto \lambda(1+e^x) - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ; \text{Cauchy} : \lambda = 1 ;$
6. $y' - y = \frac{1}{1+e^{2x}} : S = \{x \mapsto \lambda e^x - 1 - \exp(x) \cdot \text{Arctan}(\exp(x)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ; \text{Cauchy} : \lambda = 2 + \pi/4.$

Exercice 2 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec intervalle)]

1. $2xy' - 3y = x^2 : S = \{x \mapsto \lambda x^{3/2} + x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ;$
2. $(x-1)y' - 2y = (x-1)^3 : S = \{x \mapsto \lambda(x-1)^2 + x(x-1)^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ;$
3. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 2 : S = \{x \mapsto \lambda \exp(\text{Arcsin}(x)) - 2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ;$
4. $xy' - 2y = x^5 \sin(x) : S = \{x \mapsto \lambda x^2 + (-x^4 + 2x^2)\cos(x) + 2x^3 \sin(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ;$
5. $y' + \tan(x)y = \sin(2x) : S = \{x \mapsto \lambda \cos(x) - 2\cos^2(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ;$
6. $x(x-2)y' - 2y = (x-1)(x-3) : S = \left\{ x \mapsto \lambda \frac{x-2}{x} + x - \frac{3}{2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$

Exercice 3 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec recollement)]

1. $xy' - 2y = 2x^4 : S_+ = \{x \mapsto \lambda x^2 + x^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ et } S_- = \{x \mapsto \mu x^2 + x^4 \mid \mu \in \mathbb{R}\} ; \text{tout recollement est solution} :$

$$S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ \mu x^2 + x^4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x : S_+ = \left\{ x \mapsto \lambda \frac{1+x^2}{x} - x \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } S_- = \left\{ x \mapsto \mu \frac{1+x^2}{x} - x \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} ; \text{recollement continu impose } \lambda = \mu = 0, \text{ qui est alors dérivable} :$

$$S = \{x \mapsto -x\}.$$

3. $x^2y' - y = (x^2-1)e^x : S_+ = \{x \mapsto \lambda \exp(-1/x) + \exp(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ et } S_- = \{x \mapsto \mu \exp(-1/x) + \exp(x) \mid \mu \in \mathbb{R}\} ; \text{recollement continu} : \mu = 0 ; \text{tous ces recollements sont dérivables en } 0 \text{ (dérivée 1)} :$

$$S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda \exp(-1/x) + \exp(x) & \text{si } x > 0 \\ \exp(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. $(2x - x^2)y' + (x - 1)y = x$: on coupe $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ en $I_1 =]-\infty; 0[$, $I_2 =]0; 2[$ et $I_3 =]2; +\infty[$. On a : $S_1 = \{x \mapsto \lambda\sqrt{x^2 - 2x} + x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{x \mapsto \mu\sqrt{2x - x^2} + x \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ et $S_3 = \{x \mapsto \gamma\sqrt{x^2 - 2x} + x \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$; tous les recollements sont continus ; dérivable pour $\lambda = \mu = \gamma = 0$:

$$S = \{x \mapsto x\}.$$

Exercice 4 [Absence de solution]

1. $xy' = y + x$: $S_+ = \{x \mapsto \lambda x + x \ln(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $S_- = \{x \mapsto \mu x + x \ln(-x) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$; tout recollement est continu ; aucun n'est dérivable (ni à gauche ni à droite, avec tangentes verticales) ;
2. $y' \sin(x) + y \cos(x) = \sin^2(x)$: sur $[-\pi; \pi]$: $S_+ = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et $S_- = \left\{x \mapsto \frac{\mu}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2} \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}$; recollement en 0 impose $\lambda = \mu = 0$. Mais impossible d'avoir une limite finie en π .

Exercice 5 [Équations différentielles linéaires d'ordre 2]

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$: $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ donc $S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = -3$ et $\mu = 1$;
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x} \cos(x)$: $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{3x} - \frac{\cos(x) + 4\sin(x)}{17} e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/2$ et $\mu = 19/34$;
3. $y'' - 6y' + 8y = 16x^2$: $X^2 - 6X + 8 = (X - 4)(X - 2)$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{4x} + 2x^2 + 3x + \frac{7}{4} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = -1/2$ et $\mu = -1/4$;
4. $y'' + y = \sin(x) + \sin^2(x)$: $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$; $S_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix} + 1 + \frac{\cos(2x)}{3} - \frac{x}{2} \cos(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ et $S_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + 1 + \frac{\cos(2x)}{3} - \frac{x}{2} \cos(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = -1/6 - 3i/4$ et $\mu = -1/6 + 3i/4$ (version $\mathbb{C}$) ou $\lambda = -1/3$ et $\mu = 3/2$ (version $\mathbb{R}$) ;
5. $y'' - 2y' + y = \cos(2x)$: $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$; $S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x - \frac{3\cos(2x) + 4\sin(2x)}{25} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/5$ et $\mu = 28/25$;
6. $y'' + 4y' + 5y = \sin(x)e^{-2x}$: $X^2 + 4X + 5 = (X - (-2 - i))(X - (-2 + i))$; $S_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{(-2+i)x} + \mu e^{(-2-i)x} - \frac{x \cos(x)}{2} e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ et $S_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-2x} - \frac{x \cos(x)}{2} e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/2 - 7i/4$ et $\mu = 1/2 + 7i/4$ (version $\mathbb{C}$) ou $\lambda = 1$ et $\mu = 7/2$ (version $\mathbb{R}$) ;
7. $y'' - y' + (1 + i)y = 0$: $X^2 - X + (1 + i) = (X - i)(X - (1 - i))$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{(1-i)x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$; Cauchy : $\lambda = (2 - i)/5$ et $\mu = (3 + i)/5$;
8. $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$: $X^2 - (1 - i)X - 2(1 + i) = (X - 2)(X - (-1 - i))$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{(-1-i)x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$; Cauchy : $\lambda = (7 + i)/10$ et $\mu = (3 - i)/10$.

Exercice 6 [Recherche des solutions particulières]

1. a. On pose $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: y solution $\Leftrightarrow y'' + 2y' = x^2 - x \Leftrightarrow 6ax^2 + (6a + 4b)x + (2b + 2c) = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 1 \\ 6a + 4b = -1 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases}$ donc $x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ est solution (c'est l'unique solution polynomiale de degré au plus 3).
- b. Par superposition, il suffit de résoudre $y'' + 2y' = 2\text{ch}(x) = e^x + e^{-x}$, donc il suffit de résoudre $y'' + 2y' = e^x$ et $y'' + 2y' = e^{-x}$ (par superposition) :

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda + \mu e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{e^x}{3} - e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

2. a. On injecte : $a = -1/2$ et $b = -1$ est l'unique solution.

$$\text{b. } S = \left\{ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{-x^2 - 2x}{2} e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$