Feuille d'exercices n^{o}8 : Équations différentielles

Exercice 1 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (sur $\mathbb{R}$)]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y' + 3y = x^2 e^{-x}$;
2. $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$;
3. $y' - \frac{3x}{x^2+1} y = \sqrt{x^2+1} - x$;
4. $(1+x^2)y' + xy = x^3$;
5. $(1+e^{-x})y' - y = 1$;
6. $y' - y = \frac{1}{1+e^{2x}}$.

et donner la solution au problème de Cauchy $y(0) = 1$.

Exercice 2 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec intervalle)]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles indiqués :

1. $2xy' - 3y = x^2$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$;
2. $(x-1)y' - 2y = (x-1)^3$ sur $I =]-\infty; 1[$;
3. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 2$ sur $I =]-1; 1[$;
4. $xy' - 2y = x^5 \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$;
5. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$;
6. $x(x-2)y' - 2y = (x-1)(x-3)$ sur $I =]0; 2[$.

Exercice 3 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec recollement))]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $xy' - 2y = 2x^4$;
2. $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$;
3. $x^2 y' - y = (x^2-1)e^x$;
4. $(2x - x^2)y' + (x-1)y = x$.

Exercice 4 [Absence de solution]

Montrer que les équations différentielles suivantes n'ont pas de solution sur $\mathbb{R}$:

1. $xy' = y + x$;
2. $y'\sin(x) + y\cos(x) = \sin^2(x)$.

Exercice 5 [Équations différentielles linéaires d'ordre 2]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$;
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}\cos(x)$;
3. $y'' - 6y' + 8y = 16x^2$;
4. $y'' + y = \sin(x) + \sin^2(x)$;
5. $y'' - 2y' + y = \cos(2x)$;
6. $y'' + 4y' + 5y = \sin(x)e^{-2x}$;
7. $y'' - y' + (1+i)y = 0$;
8. $y'' - (1-i)y' - 2(1+i)y = 0$.

et donner la solution au problème de Cauchy $y(0) = y'(0) = 1$.

Lorsque l'équation caractéristique n'a pas de solution réelle, on donnera séparément les solutions complexes (sous forme exponentielle) et réelles (sous forme trigonométrique).

Exercice 6 [Recherche des solutions particulières]

1. a. Montrer que l'équation $y'' + 2y' = x^2 - x$ admet une solution polynomiale de degré 3.

b. En déduire les solutions de l'équation $y'' + 2y' = x^2 - x + 2\mathrm{ch}(x)$.

2. a. Montrer que l'équation $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ admet une solution de la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$).

   b. En déduire les solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

Exercice 7 [Systèmes d'équations différentielles]

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues y et z, et de variable x :

1. $\begin{cases} y' &= z + x^2 \\ z' &= y - x^2 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} y' &= -6x + z + 1 \\ z' &= 6y - 5z \end{cases}$; 3. $\begin{cases} y' &= y + 8z + e^x \\ z' &= 2y + z + e^{-3x} \end{cases}$.

Exercice 8 [Équation fonctionnelle 1]

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 9 [Équation fonctionnelle 2]

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 10 [Équation fonctionnelle 3]

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x).$$

Exercice 11 [Équation différentielle non linéaire]

On considère l'équation différentielle :

$$y' + ay + by^2 = c$$

où a, b, c sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $c = 0$, on peut se ramener à une équation différentielle linéaire d'inconnue $\frac{1}{y}$.

2. Montrer que si y_0 est une solution particulière, on peut se ramener au cas précédent en étudiant $y - y_0$.

3. Résoudre l'équation $y' = y^2 + 1$ (en remarquant qu'une fonction usuelle est solution).