

Feuille d'exercices n°7 : Primitives

Exercice 1 [Calcul de primitives]

Donner sans calcul des primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1. \ t \mapsto \frac{t}{1+t^2} ; & 4. \ t \mapsto \frac{t-1}{\sqrt{t(t-2)}} ; & 7. \ t \mapsto \frac{1}{\tan(t)} ; & 10. \ t \mapsto \frac{t^2}{1+t^6} ; \\
 2. \ t \mapsto 3t\sqrt{1+t^2} ; & 5. \ t \mapsto te^{-4t^2} ; & 8. \ t \mapsto \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}} ; & 11. \ t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^3} ; \\
 3. \ t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2} ; & 6. \ t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)} ; & 9. \ t \mapsto \frac{\sin(2t)}{3-\cos^2(t)} ; & 12. \ t \mapsto \frac{1}{\sinh^2(t)} .
 \end{array}$$

Exercice 2 [Une fonction complexe]

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-\alpha}$.

Exercice 3 [Linéarisation]

À l'aide d'une linéarisation, calculer des primitives des fonctions suivantes :

$$1. \ t \mapsto \cos^2(t) ; \quad 2. \ t \mapsto \sin^3(t) ; \quad 3. \ t \mapsto \sin(t)\cos(t) ; \quad 4. \ t \mapsto \sin(t)\cos^2(t).$$

Exercice 4 [Intégrales trigonométrique dépendant d'entiers]

Calculer, pour $p, q \in \mathbb{Z}$: $I(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(qt)\sin(pt)dt$.

Exercice 5 [Utilisation des complexes]

À l'aide de calculs dans les complexes, déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$1. \ t \mapsto \sin(t)e^{-t} ; \quad 2. \ t \mapsto \cos^2(t)e^{2t} ; \quad 3. \ t \mapsto t^2\cos(t)e^t.$$

Exercice 6 [Inégalité de Cauchy–Schwarz]

On considère f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

- On définit sur \mathbb{R} la fonction $P : x \mapsto \int_a^b (f(t) + xg(t))^2 dt$. Montrer que P est une fonction polynomiale de degré 2, et calculer son discriminant.
- En déduire l'inégalité suivante :

$$\left(\int_a^b (f(t) \cdot g(t)) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \cdot \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right).$$

Exercice 7 [Intégrale et valeur absolue]

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 8 [Intégrales polynomiale dépendant d'entiers]

Calculer, pour $p, q \in \mathbb{N}$: $I(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$ (on pourra faire des intégrations par parties pour se ramener à calculer $I(p+q, 0)$).

Exercice 9 [Changements de variable 1]

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable suggéré :

1. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1} dt$ avec $u = e^t$;

2. $\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(t)} dt$ avec $u = \sin(t)$;

3. $\int_{1/e}^e \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$ avec $u = 1/t$;

4. $\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t-1}} dt$ avec $u = \sqrt{t-1}$.

Exercice 10 [Changements de variable 2]

Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide du changement de variable suggéré :

1. $t \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{t+2}}$ avec $u = \sqrt{t+2}$;

2. $t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$ avec $u = \arcsin(t)$;

3. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t^3}}$ avec $u = \sqrt{t}$;

4. $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ avec $u = \arccos(x)$.

Exercice 11 [Règles de Bioche]

À l'aide des règles de Bioche, calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$;

2. $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)-\cos^2(t)}$;

3. $t \mapsto \frac{3-2\sin(t)}{\cos(t)+3\tan(t)}$;

4. $t \mapsto \cos^2(t)\sin^2(t)$.

Exercice 12 [Intégration par parties 1]

À l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 (t^2 - t + 1)e^{-t} dt$;

3. $\int_0^{\sqrt{3}} t^2 \arctan(t) dt$;

5. $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2} dt$;

2. $\int_1^e t(\ln(t))^2 dt$;

4. $\int_{-1}^1 \ln(t^2 + a) dt$ (pour $a > 0$) ;

6. $\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t} \sin(3t) dt$.

Exercice 13 [Intégration par parties 2]

À l'aide d'intégrations par parties, calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto t \sin^3(t)$;

2. $t \mapsto \arcsin(t)$;

3. $t \mapsto t \operatorname{sh}(t)$;

4. $t \mapsto \frac{\ln(\ln(t))}{t}$.

Exercice 14 [Primitive périodique de fonction périodique]

Soit $T > 0$. On considère f fonction continue sur \mathbb{R} et T -périodique. Montrer l'équivalence entre :

(i) une primitive de f est T -périodique ;

(ii) toutes les primitives de f sont T -périodiques ;

(iii) f est de valeur moyenne nulle, c'est-à-dire : $\int_0^T f(t) dt = 0$.

Exercice 15 [Primitives et parité]

Soit f continue sur \mathbb{R} .

1. On suppose que f est impaire : montrer que toutes les primitives de f sont paires.

2. On suppose que f est paire : montrer que f possède une unique primitive impaire, et la caractériser.

Exercice 16 [Fonction à partir d'une intégrale 1]

Montrons que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \int_0^1 e^{|t-x|} \sin|t-x| dt$ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée.

Exercice 17 [Fonction à partir d'une intégrale 2]

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* et réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

Exercice 18 [Fonction à partir d'une intégrale 3]

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt$ est constante, et donner sa valeur.