Feuille d'exercices n^{o}6 : Les complexes

Exercice 1 [Formes algébriques]
Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $(3+2i)(1-i) = 5-i$;
2. $(1-i)^3 = -2-2i$;
3. $\frac{1}{2-i\sqrt{3}} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$;
4. $\frac{4+3i}{-2+7i} = \frac{13}{53} - i\frac{34}{53}$;
5. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = -3$;
6. $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = -\frac{8}{25} + i\frac{6}{25}$.

Exercice 2 [Formes exponentielles]
Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle, où $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

1. $1+e^{i\theta} = \begin{cases} 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} & \text{si} \quad \theta \in [-\pi;\pi] \text{ mod } 4\pi \\ (-2\cos(\theta/2))e^{i(\theta/2+\pi)} & \text{si} \quad \theta \in [\pi;3\pi] \text{ mod } 4\pi \end{cases}$;
2. $1-e^{i\theta} = \begin{cases} 2\sin(\theta/2)e^{i(\theta/2-\pi/2)} & \text{si} \quad \theta \in [0;2\pi] \text{ mod } 4\pi \\ (-2\sin(\theta/2))e^{i(\theta/2+\pi/2)} & \text{si} \quad \theta \in [-2\pi;0] \text{ mod } 4\pi \end{cases}$;
3. $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \begin{cases} \tan(\theta/2)e^{i\pi/2} & \text{si} \quad \theta \in [0;\pi[\text{ mod } 2\pi \\ (-2\tan(\theta/2))e^{-i\pi/2} & \text{si} \quad \theta \in]-\pi;0] \text{ mod } 2\pi \end{cases}$;
4. $e^{i\theta}+e^{i\theta'} = \begin{cases} 2\cos((\theta-\theta')/2)e^{i(\theta+\theta')/2} & \text{si} \quad (\theta-\theta') \in [-\pi;\pi] \text{ mod } 4\pi \\ (-2\cos((\theta-\theta')/2))e^{i((\theta+\theta')/2+\pi)} & \text{si} \quad (\theta-\theta') \in [\pi;3\pi] \text{ mod } 4\pi \end{cases}$;
5. $1-i\tan(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\theta)}e^{-i\theta} & \text{si} \quad \theta \in]-\pi/2;\pi/2[\text{ mod } 2\pi \\ (-\frac{1}{\cos(\theta)})e^{i(-\theta+\pi)} & \text{si} \quad \theta \in]\pi/2;3\pi/2[\text{ mod } 2\pi \end{cases}$.

Exercice 3 [Inégalité de Ptolémée]

1. $|x|\cdot|y-z| = |xy-xz| = |xy-yz+yz-xz| \leqslant |xy-yz|+|yz-xz| = |y|\cdot|z-x|+|z|\cdot|x-y|$.
2. $X = y-z$, $Z = z-x$ et $Z = t-x$:

$$|x-y|\cdot|z-t| = |X|\cdot|Y-Z| \leqslant |Y|\cdot|Z-X|+|Z|\cdot|X-Y| = |x-z|\cdot|y-t|+|x-t|\cdot|y-z|.$$

avec égalité ssi $(xy-yz) = \lambda(yz-xz)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 4 [Un calcul de dérivées]
$\sin^3(x) = -\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)$

$$f^{(n)} : x \mapsto -\frac{3^n}{4}\sin(3x+n\pi/2)+\frac{3}{4}\sin(x+n\pi/2) = \begin{cases} -\frac{3^n}{4}(-1)^{n/2}\sin(3x)+(-1)^{n/2}\frac{3}{4}\sin(x) & \text{si} \quad n \text{ pair} \\ -\frac{3^n}{4}(-1)^{(n-1)/2}\cos(3x)+(-1)^{(n-1)/2}\frac{3}{4}\cos(x) & \text{si} \quad n \text{ impair} \end{cases}$$

Exercice 5 [Système d'équation trigonométrique]
Résoudre les systèmes suivants :

1. Analyse–synthèse : on raisonne modulo 2π et $x = -y$ ou $\pi+y$ puis $x-y$ et $2\cos(x) = -1$ donc $x = \pm 2\pi/3$ et $y = \mp 2\pi/3$.

2. Ramène au cas précédent : $\left\{\begin{array}{rcl}\cos a+\cos x+\cos y & = & 0\\ \sin a+\sin x+\sin y & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow e^{ia}+e^{ix}+e^{iy}=0 \Leftrightarrow 1+e^{i(x-a)}+e^{i(y-a)}=$ $0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}1+\cos(x-a)+\cos(y-a) & = & 0\\ \sin(x-a)+\sin(y-a) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=a+\pm 2\pi/3$ et $y=a\pm 2\pi/3$ (modulo 2π)

On pose $x=e^{iX}$, $y=e^{iY}$ et $z=e^{iZ}$: $Y=X\pm 2\pi/3$ et $Z=X\mp e^{2\pi/3}$ puis :

$$x^n+y^n+z^n=0 \Leftrightarrow 1+e^{2in\pi/3}+e^{-2in\pi/3}=0 \Leftrightarrow n=1 \text{ ou } 2\text{mod}3$$

Exercice 6 [Puissances des racines de l'unité]

$\alpha_k=e^{ik\theta}=(e^{i\theta})^k$ pour $\theta=2\pi/n$
$S_p=\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ip\theta})^k$:

- si p multiple de n : $e^{ip\theta}=1$ et $S_p=n$;
- sinon : $e^{ip\theta}=e^{2ip\pi/n}\neq 1$ et $S_p=0$ (somme géométrique)

Exercice 7 [Deux sommes classiques]

$C_n+iS_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}=(1+e^{i\theta})^n=\left(2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}\right)^n=2^n\cos^n(\theta/2)e^{in\theta/2}$
$C_n=2^n\cos^n(\theta/2)\cos(n\theta/2)$ et $S_n=2^n\cos^n(\theta/2)\sin(n\theta/2)$

Exercice 8 [Deux sommes trigonométriques]

$\alpha=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $\beta=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)$.
$\alpha+i\beta=\sum_{k=0}^{n-1}e^{i(\theta+2k\pi/n)}=0$ donc $\alpha=\beta=0$

Exercice 9 [Autres sommes trigonométriques]

1. $S=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$ et $C=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$: $E=C+iS=n+1$ (si $\theta\equiv 0[2\pi]$) ou $\dfrac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}e^{in\theta/2}$ (sinon) puis :
$$S=0 \text{ ou } \frac{\sin((n+1)\theta/2)\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$
2. on linéarise : $\sum_{k=0}^{n}\sin^2(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos(2\theta)}{2}=0$ (si $\theta\equiv 0[2\pi]$) ou $\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{\sin((n+1)\theta/2)\cos(n\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}$ sinon ;
3. idem ou utiliser que $\sin^2+\cos^2=1$: $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)=n+1$ (si $\theta\equiv 0[2\pi]$) ou $\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{\sin((n+1)\theta/2)\cos(n\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}$ sinon.

Exercice 10 [Demi-plan supérieur et disque unité]

1. Si $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ et $\omega\in\mathbb{C}$:
$$f(z)=\omega \Leftrightarrow z=i\cdot\frac{1+\omega}{1-\omega}$$
donc f bijection de $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Pour bijectivité de P sur D il suffit donc de montrer que $f(P)\subset D$ et $f^{-1}(D)\subset P$:
   - si $z\in P$: $|z-i|<|z+i|$ donc $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}\in D$;

- si $\omega \in D$: $z = f^{-1}(\omega) = i\dfrac{1+\omega}{1-\omega} = \dfrac{i}{|1-\omega|^2}\left(1-|\omega|^2+\omega-\overline{\omega}\right)$ donc $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} > 0$ donc $z \in D$

2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |f(z)| = 1$ donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

Exercice 11 [Homographies]

1. Si $z \in P$, alors $z \notin \mathbb{R}$ donc $cz + d = 0 \Leftrightarrow c = d = 0$ ce qui est impossible donc h bien définie sur P.
2. $h(z) = \dfrac{(az+b)(c\overline{z}+d}{|cz+d|^2} = \dfrac{acz\overline{z}+bd+(adz+bc\overline{z})}{|cz+d|^2}$ et partie imaginaire se déduit de $ad - bc = 1$.
3. $h(s) = \omega \Leftrightarrow \dfrac{d\omega - b}{-\omega c + a}$
qui assure la bijectivité, et qui est de la même forme que h donc préserve le signe de la partie imaginaire.

Exercice 12 [Complexes de module 1 et réels]

On pose $z = e^{i\alpha}$ et $u = e^{i\beta}$: $\dfrac{z+u}{1+zu} = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}} = \dfrac{2\cos((\alpha-\beta)/2)e^{i(\alpha+\beta)/2}}{2\cos((\alpha+\beta)/2)e^{i(\alpha+\beta)/2}} = \dfrac{\cos((\alpha-\beta)/2)}{\cos((\alpha+\beta)/2)} \in \mathbb{R}$

On pose $\dfrac{z+u}{1+zu} = \lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $u = \dfrac{\lambda - z}{1-\lambda z} = -\dfrac{1}{z}\dfrac{\lambda - z}{\lambda - (1/z)} = -\dfrac{1}{z}\dfrac{\lambda - z}{\lambda - \overline{z}} \in \mathbb{U}$.

Exercice 13 [Un polynôme de degré 4]

$(3z^2+z+1)^2 + (z^2+2z+2)^2 = 0 \Leftrightarrow ((3z^2+z+1)+i(z^2+2z+2))((3z^2+z+1)-i(z^2+2z+2)) = 0 \Leftrightarrow (3+i)z^2+(1+2i)z+(1+2i)) = 0$ ou $(3-i)z^2+(1-2i)z+(1-2i) = 0$

première équation : $\Delta = -7 - 24i = (3-4i)^2$ d'où $z_1 = \dfrac{-1+i}{2}$ et $z_2 = -i$

seconde équation : refait les calculs ou passe au conjugué : $z_3 = \dfrac{-1-i}{2}$ et $z_4 = i$

Exercice 14 [Une équation polynomiale de degré n]

$1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0 \Leftrightarrow (1+z+\cdots+z^{n-1}) + (z+\cdots+z^{n-1}+z^n) = 0 \Leftrightarrow (1+z)(1+z+\cdots+z^{n-1}) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$

Exercice 15 [Systèmes somme–produit]

1. $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow x, y = 2 \pm i$ (racines de $X^2 - 4X + 5$) ;
2. $\begin{cases} x+y=3-i \\ xy=4-3i \end{cases} \Leftrightarrow x, y = 2+i,\ 1-2i$ (racines de $X^2 - (3-i)X + (4-3i)$) ;
3. $\begin{cases} x+y=2\cos(\theta) \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x, y = e^{\pm i\theta}$ (racines de $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$) ;
4. on transforme en un système somme-produit : $\begin{cases} x+y &= 7 \\ \ln x + \ln y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 7 \\ xy &= e \end{cases} \Leftrightarrow x, y = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-4e}}{2}$ (racines de $X^2 - 7X + e$) ;

5. idem : $\left\{\begin{array}{rcl} e^x e^{2y} & = & a \\ 2xy & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & \ln(a) \\ x(2y) & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x, 2y = \dfrac{\ln(a) \pm \sqrt{\ln(a)^2-4}}{2}$ (racines de $X^2 - \ln(a)X + 1$).

Exercice 16 [Identité du parallélogramme]

On veut montrer que pour $a, b \in \mathbb{C}$: $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$.

On développe avec les conjugués : $|a+b|^2 + |a-b|^2 = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) + (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) = |a|^2 + |b|^2 + a\overline{b} + b\overline{a} + |a|^2 + |b|^2 - a\overline{b} - b\overline{a} = 2\left(|a|^2+|b|^2\right)$.

Exercice 17 [Un parallélogramme ?]

$|z_1| = \left|\dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_1-z_2}{2}\right| \leqslant \dfrac{|z_1+z_2|}{2} + \dfrac{|z_1-z_2|}{2}$ et pareil avec z_2 ce qui donne l'inégalité.

cas d'égalité : $z_1 - z_2$ et $z_1 + z_2$ sont positivement liés, ce qui équivaut à z_1 et z_2 positivement liés.

interprétation : dans un parallélogramme, la somme des longueurs des diagonales est supérieure ou égale au demi-périmètre, avec égalité ssi le parallélogramme est aplati.

Exercice 18 [Équations géométriques]

1. 1, z et z^2 alignés : $\Leftrightarrow \dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2.
   - rectangle en 1 : $\Leftrightarrow \dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \{-1+ib \,|\, b \in \mathbb{R}\}$;
   - rectangle en z : $\Leftrightarrow \dfrac{z^2-z}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$;
   - rectangle en z^2 : $\Leftrightarrow \dfrac{z^2-1}{z^2-z} = \dfrac{z+1}{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} \in \{-1+ib \,|\, b \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow z \in \{\dfrac{1}{-1+ib} \,|\, b \in \mathbb{R}\}$

3. z, z^2 et z^4 sont alignés : $\Leftrightarrow \dfrac{z^4-z^2}{z^2-z} = z(z+1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup \{-1/2+ib \,|\, b \in \mathbb{R}\}$

4. 1, z et z^2 sont les sommets d'un triangle équilatéral :
   - direct : $\Leftrightarrow \dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1 = -j \Leftrightarrow z = -1-j = j^2 = e^{-2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
   - indirect : $\Leftrightarrow \dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1 = -j^2 \Leftrightarrow z = -1-j^2 = j = e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.