Feuille d'exercices n^{o}4 : Sommes, produits et systèmes

Exercice 1 [Premiers exemples de sommes]
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{5^{3k-1}}{3^{2k+2}}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{7^k}{5^{n-k}}$;
3. $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{3^{l+2}}{2^{2l+1}} - \frac{1}{4}(-3)^l$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} x(1-x^2)^{k+1}$.

Exercice 2 [Premiers exemples de produits]
Calculer les produits suivantes :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3k$;
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)$;
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^{2^k}$;
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k^2-1)$;
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp(k^2)$;
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 3 [Sommes de puissances]
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose : $S_m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m$.

1. On suppose que $S_2 = 0$. Montrer que tous les x_k sont nuls.
2. On suppose que $S_1 = S_2 = n$. Montrer que tous les x_k sont égaux à 1.
3. On suppose que $S_2 = S_3 = S_4$. Montrer que tous les x_k sont égaux à 0 ou 1.

Exercice 4 [Sommes des cubes]
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 5 [Simplification d'une somme]
Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}$.

Exercice 6 [Somme géométrique dérivée]
Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$, on pose : $S = \sum_{k=1}^{n} kq^k$.

1. Montrer que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} q^k$.
2. En déduire une expression simple de S.
3. Retrouver ce résultat en calculant $(1-q) \cdot S$.

Exercice 7 [Simplification d'un produit]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier le produit suivant : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$.

Exercice 8 [Un produit géométrique]
Pour $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1+a^{2^k})$.

1. Calculer $(1-a)\cdot P$, et en déduire P.

2. Reconnaître une somme bien connue, et interpréter ce résultat.

Exercice 9 [Cinq produits très proches]
On se propose de calculer de proche en proche les produits suivants :

$$A=\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij,\quad B=\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} ij,\quad C=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij,\quad D=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij,\quad E=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.$$

1. Calculer A, et en déduire B.

2. Exprimer B en fonction de C et D, et en déduire C et D puis E.

Exercice 10 [Utilisation des sommes classiques]
En utilisant les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$;

2. $1\cdot n+2\cdot(n-1)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$.

Exercice 11 [Groupement dans une somme]
En regroupant habilement les termes, calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$ les sommes suivantes (on pourra d'abord traiter le cas où n est pair) :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$;

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$;

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^3$.

Exercice 12 [Sommes télescopiques]
En faisant apparaître des télescopages, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$;

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$;

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$;

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 13 [Un autre télescopage]

1. Montrer qu'il existe des réels a,b,c tels que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$.

2. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 14 [Sommes doubles]
Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}(k+l)$;

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(k+l)^2$;

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k+1}^{n} kl$;

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\min(k,l)$;

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}|l-k|$;

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|l-k|$.

Exercice 15 [Découpage d'une somme double]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $C_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} (k+l)$.

1. Justifier que : $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (k+l) = 2C_n + 2\sum_{k=1}^{n} k$.
2. En déduire la valeur de C_n.

Exercice 16 [Formule de Cauchy]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{a_k a_l}{k+l-1}$.

Exercice 17 [Formule du binôme 1]

Si $n \in \mathbb{N}^*$:

1. Justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a + b\sqrt{3}$, et vérifier que : $3b^2 = a^2 - 1$.
2. Montrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.

Exercice 18 [Formule du binôme 2]

En utilisant judicieusement la formule du binôme, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $2^n \geqslant n+1$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 19 [Sommes de coefficients binomiaux 1]

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;
2. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$;
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$;
4. $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Exercice 20 [Sommes de coefficients binomiaux 2]

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$;
2. $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} 2^{n-3k}(-1)^k$ (avec $n \geqslant 2$) ;
3. $\sum_{(k,l)\in E} \binom{n}{l} 2^k$, $E = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant k \neq l \leqslant n\}$;
4. $\sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} x^l$ (où $x \neq 0$).

Exercice 21 [Majoration et coefficients binomiaux]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

1. Montrer que, si $k \geqslant 1$: $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{2^{k-1}}$.
2. En déduire que : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Exercice 22 [Majoration de factorielle]
Soit $n \geqslant 2$:

1. Montrer que : $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k \cdot (n-k+1)$.

2. En déduire que : $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 23 [Égalité de produits]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'égalité : $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$, et donner une expression simple de leur valeur.

Exercice 24 [Résolution de systèmes]
À l'aide du pivot de Gauss, déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & 2y & - & 4z & = & 3 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 10x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 20x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 6x_2 & - & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & + & 16x_4 & = & 4 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 6y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ -2x & + & 5y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right..$$

Exercice 25 [Systèmes à paramètre]
Discuter, suivant la valeur de m, des solutions des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ mx & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} mx & + & (1-m)y & + & (1-m)z & = & m^2 \\ mx & + & (1+m)y & + & (1+m)z & = & m-m^2 \\ x & + & y & + & z & = & 1-m \end{array}\right.$$

Exercice 26 [Un grand système]
Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcccrcc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & 3x_n & = & 1 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 27 [Et un grand système difficile]
Discuter, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$, des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} ax_1 & = & x_2+1 \\ ax_2 & = & x_3+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ax_{n-1} & = & x_n+1 \\ ax_n & = & x_1+1 \end{array}\right.$$