Feuille d'exercices n^{o}3 : Rappels et compléments sur les fonctions

Exercice 1 [Exemples de fonctions]

1. $-1/x^2$;
2. arctan
3. 0 (la seule)
4. constantes (les seules)
5. $\ln(|x|)$

Exercice 2 [Vrai–Faux sur les fonctions]

1. V : somme d'inégalités
2. F : $x \mapsto e^x - x$
3. F : x^2
4. F : $f : x \mapsto 1/(x+1) - 1$ si $x \geqslant 0$ et $1/(x-1)+1$ si $x \leqslant 0$ et faire $f(x)+1$ et $f(-x)+1$ (ressemble à arctan sur les variations)
5. F : $f(x) = 1/x$ sur $[1; +\infty[$ et $g = \ln$;
6. V : inégalité pour un sous ensemble
7. F : $f = cste$
8. F (difficile) : $x \mapsto \cos(x) + \cos(\pi x)$ (regarder les antécédents de 2)

Exercice 3 [Partie entière et périodicité]

1. Calculer $f(x+n)$
2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [kn; kn+1[$ (on voit facilement que $\lfloor x \rfloor$ doit être un multiple de n) et donc :
   - si $n = 1$: la fonction est constante (nulle) donc toute période convient ;
   - si $n \geqslant 2$: une période est un antécédent de 0 ; elle est nécessairement entière (sinon on retranche n pour montrer qu'un nombre dans $]0; 1[$ est une période, ce qui est impossible car on peut la multiplier pour tomber dans $]1; 2[$ qui n'a pas d'antécédent de 0) ; et on voit que ce sont les $n\mathbb{Z}$.

Exercice 4 [Fonction additive bornée]

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et pose $a = f(x)$. On montre que $f(nx) = na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en fait $\mathbb{Z}$ mais ça suffit), qui tend vers $\pm\infty$ si $a \neq 0$. Donc $a = 0$.

La fonction nulle est solution (c'est facile à montrer) : c'est donc la seule.

Exercice 5 [Parité d'une fonction]

Fonction définie sur $\mathbb{R}$. On trouve qu'elle est impaire (faire apparaître la quantité conjuguée dans le ln).

Exercice 6 [Existence de périodicité]

Si $a = b$: alors on a une fonction paire et impaire, donc nulle, donc toute période convient.

Sinon, on montre qu'elle est $4(a-b)$ périodique.

Exercice 7 [Croissance d'une fonction]

Par contraposée ou l'absurde (transformer les inégalités en appliquant $f \circ f$).

Exercice 8 [Une bijection]
On utilise que $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 1 - x \in \mathbb{Q}$ pour voir que l'image et l'antécédent d'un (ir)rationnel est aussi un (ir)rationnel.

Et u est bijective d'inverse elle-même.

Exercice 9 [Bijection et parité]
L'injectivité donne la bijectivité.

Si $x \in I$ et $y \in J$ avec $f(x) = y$, alors $f(-x) = -f(x) = -y$ donc $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$ ce qui donne l'imparité.

Si f est paire : elle ne peut être injective à moins que $I = \{0\}$.

Exercice 10 [Choix des ensembles de départ et d'arrivée]

1. $E = [-3/2; +\infty[$, $F = [-1; +\infty[$ et $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{(y+1)^2 - 3}{2}$;
2. $E = \mathbb{R}$, $F =]-1; 1[$ et $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y}{1 - |y|}$;
3. $E = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f^{-1} : y \mapsto 3 + \dfrac{4}{y-1} = \dfrac{3y+1}{y-1}$;
4. $E = [-1; 1]$, $F = [-1; 1]$ et $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$.

Exercice 11 [Dérivée souvent nulle et monotonie]
Monotonie par dérivée.

Stricte monotonie car on peut trouver du strictement monotone sur tout intervalle d'intérieur non vide.

Exercice 12 [Variations et équations]

Faire les tableaux de variations.

1. pas des solution si $a < -1/e$, une seule (double) si $a = -1/e$, deux si $a \in]-1/e; 0[$ et une seule (simple) si $a \geqslant 0$
2. pareil comme $x\ln(x) = ye^y$ avec $y = \ln(x)$
3. selon la parité de n :
   - si n pair : pas de solution si $a < -n$, deux solutions (doubles) si $a = -n$, 4 solutions (simples) si $a \in]-n; 0[$, 3 solutions (une double et deux simples) si $a = 0$, et deux solutions (simples) si $a > 0$
   - si n impair : une solution (simple) si $a < -n$,deux solutions (une double une simple) si $a = -n$, trois solutions (simples) si $a \in]-n; 0[$, deux solutions (une double une simple) si $a = 0$, une solution (simple) si $a > 0$.

Exercice 13 [Asymptotes d'une fonction]
$f(x)/x$ tend vers 3, puis regarder $f(x) - 3x$ qui tend vers -3. Donc $\Delta : y = 3x + 3$ est asymptote en $\pm\infty$.

Exercice 14 [Calcul de dérivées]

1. définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ (quotient) de dérivée : $x \mapsto \dfrac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$
2. définie dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée) de dérivée : $x \mapsto -4xe^{-2x^2-5}$;
3. définie sur $[4/3;+\infty[$, dérivable sur $]4/3;+\infty[$ (composée), de dérivée : $x \mapsto \dfrac{3}{2\sqrt{3x-4}}$;
4. définie dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ (quotient), de dérivée : $x \mapsto -\dfrac{x^2+2x+2}{(x^2+3x+1)^2}$
5. définie dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (quotient), de dérivée 1

   En fait la fraction n'est pas irréductible : $\dfrac{x^2+x-6}{x+3} = x-2$

   $x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x+3}$;
6. définie dérivable sur $]1/5;+\infty[$ (composée et combinaison linéaire), de dérivée $x \mapsto -\dfrac{5}{5x-1}$;
7. définie dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi/4+k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (quotient), de dérivée : $x \mapsto \dfrac{3\cos(x)\cos(2x)+6\sin(2x)\sin(x)}{\cos(2x)^2}$
8. définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ (composée), de dérivée : $x \mapsto \dfrac{\text{signe}(x^2-3x+2)\cdot(2x-3)}{2\sqrt{|x^2-3x+2|}}$

   et pas dérivable en 1 et 2 (tangentes verticales)
9. définie dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (composée et produit), de dérivée $x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$;
10. définie sur $[0;2[$, dérivable sur $]0;2[$ (composée et quotient), de dérivée : $x \mapsto \dfrac{1}{(2-x)^2\cdot\sqrt{\frac{x}{2-x}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)^3}}$;
11. définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (composée) de dérivée $x \mapsto (x(1+\tan^2(x))+\tan(x))e^{x\tan(x)}$;
12. définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{e\}$ (composée et quotient) de dérivée : $x \mapsto \left(2x(\ln(x)-1)-\frac{1}{x}\right)\dfrac{e^{x^2}}{(\ln(x)-1)^2}$.

Exercice 15 [Dérivées d'ordre supérieur]

1. sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto a^n e^{ax+b}$;
2. sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto a(a-1)\dots(a-n+2)(a-n+1)x^{a-n}$;
3. sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto (-1)^n(x-n)e^{-x}$;
4. sur $\mathbb{R} \setminus \{-b/a\}$: $x \mapsto (-a)^n\frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$;
5. sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \ln(a)^n a^x$;

6. sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. On a : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1/2}{x-1} - \dfrac{1/2}{x+1}$ et on se ramène au cas 4 qui donne : $x \mapsto \dfrac{(-1)^n n!}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{(x-1)^n} - \dfrac{1}{(x+1)^n}\right)$

Exercice 16 [Étude complète de fonctions]

1. $x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x}}$: définie sur $\{0\} \cup [1;+\infty[$, dérivable sur $]1;+\infty[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x^2-x}}$ (par composée), et non dérivable en 0 (pas de sens) ou en 1 (tangente verticale). Graphe ressemble beaucoup à $\sqrt{x}$ translaté de 1 à droite.
2. $x \mapsto \sqrt{1-\sin(x)}$: définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ (par composée) et non dérivable ailleurs (limites à gauche et à droite de taux d'accroissements valant $\pm\sqrt{2}/2$) ; dérivée $x \mapsto -\cos(x)\dfrac{1-\sin(x)}{2\sqrt{1-\sin(x)}}$; allure comme $|\sin|$ translatée et dilatée comme $\sqrt{1-\sin(x)} = \sqrt{2}\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\right|$ (genre de courbe qui rebondit suivant le signe de $-\cos(x)$.
3. $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$: définie dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} < 0$ (par concavité de $x \mapsto --x$), prolongeable par continuité en 0 (valeur 1), prolongement dérivable en 0 (nécessite dl2 de exp en 0) ; strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec asymptotes $y = -x$ (en $-\infty$) et $y = 0$ (en $+\infty$), au-dessus de ses asymptotes ;
4. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$: comme tangente symétrisée puis translatée de $\pi/2$; définie dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$; strictement décroissante sur chaque intervalle avec limites $\pm\infty$ à chaque bord ; π-périodique, et symétrie centrale en tous les $x = \pi/2 + k\pi$.