Feuille d'exercices n^{o}3 : Rappels et compléments sur les fonctions

Exercice 1 [Exemples de fonctions]
Donner un exemple de fonction :

1. majorée n'admettent pas de maximum ;
2. bornée n'admettant pas d'extremum ;
3. paire et impaire en même temps ;
4. croissante et périodique ;
5. définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ tel que tout réel ait exactement deux antécédents.

Exercice 2 [Vrai–Faux sur les fonctions]
Prouver ou invalider les affirmations suivantes :

1. la somme de deux fonctions croissantes est croissante ;
2. la somme de deux fonctions monotones est monotone ;
3. le produit de deux fonctions monotones est monotone ;
4. le produit de deux fonctions monotones positives est monotone ;
5. si f est bornée, alors $g \circ f$ est bornée ;
6. si g est bornée, alors $g \circ f$ est bornée ;
7. si $g \circ f$ est bornée, alors g est bornée ;
8. la somme de deux fonctions périodiques est périodique.

Exercice 3 [Partie entière et périodicité]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \lfloor \frac{x}{n} \rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}$.

1. Montrer que f est n-périodique.
2. Résoudre l'équation "$f(x) = 0$" et en déduire les périodes de f.

Exercice 4 [Fonction additive bornée]
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 5 [Parité d'une fonction]
Donner l'ensemble de définition et étudier la parité de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

Exercice 6 [Existence de périodicité]
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = f(x+a)$.

On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que f_a est paire et f_b est impaire : montrer que f est périodique.

Exercice 7 [Croissance d'une fonction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 8 [Une bijection]
Soit $u : [0;1] \to [0;1]$ définie par : $\forall x \in [0;1],\ u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que u est bijective, et donner son inverse.

Exercice 9 [Bijection et parité]
Soient I une partie symétrique de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire injective (c'est-à-dire telle que : $\forall x, y \in I,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$). Montrer que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et que sa réciproque f^{-1} est impaire.

Que dire si on avait supposé f paire au lieu de impaire ?

Exercice 10 [Choix des ensembles de départ et d'arrivée]
Pour chacune des fonctions suivantes, donner les ensembles E et F (les plus grands possibles, et le plus simples possibles) tels que la fonction $E \to F$ soit bijective, et donner leurs réciproques :

1. $x \mapsto \sqrt{2x+3} - 1$; 2. $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$; 3. $x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$; 4. $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$.

Exercice 11 [Dérivée souvent nulle et monotonie]
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \sin(x)$ est strictement monotone.

Exercice 12 [Variations et équations]
En étudiant les variations des fonctions impliquées, donner le nombre de solutions aux équations suivantes :

1. $x\ln(x) = a$ (pour $a \in \mathbb{R}$) ; 2. $xe^x = a$ (pour $a \in \mathbb{R}$) ; 3. $2x^{n+2} - (n+2)x^2 = a$ (pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 13 [Asymptotes d'une fonction]
Étudier les asymptotes de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^3-2x+1}{(x-1)(x+2)}$.

Exercice 14 [Calcul de dérivées]
Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble sur lequel elle est définie, celui sur lequel elle est dérivable, et calculer sa dérivée :

1. $x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$;
2. $x \mapsto e^{-2x^2-5}$;
3. $x \mapsto \sqrt{3x-4}$;
4. $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3x+1}$;
5. $x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x+3}$;
6. $x \mapsto 1 - \ln(5x-1)$;
7. $x \mapsto \frac{3\sin(x)}{\cos(2x)}$;
8. $x \mapsto \sqrt{|x^2-3x+2|}$;
9. $x \mapsto x^x$;
10. $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2-x}}$;
11. $x \mapsto e^{x\tan(x)}$;
12. $x \mapsto \frac{e^{x^2}}{\ln(x)-1}$.

Exercice 15 [Dérivées d'ordre supérieur] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes (en précisant l'ensemble sur lequel elles sont valides) :

1. $x \mapsto e^{ax+b}$ $(a, b \in \mathbb{R})$;
2. $x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R})$;
3. $x \mapsto xe^{-x}$;
4. $x \mapsto \frac{1}{ax+b}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$;
5. $x \mapsto a^x$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$;
6. $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$.

Exercice 16 [Étude complète de fonctions]
Étudier les fonctions suivantes : domaine de définition, de dérivabilité, étude des symétries, variations et graphe.

1. $x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x}}$; 2. $x \mapsto \sqrt{1-\sin(x)}$; 3. $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$; 4. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.