

## Feuille d'exercices n°28 : Intégration

### Exercice 1 [Intégrale et point fixe]

Posons  $g : x \mapsto f(x) - x$  qui est continue (par combinaison linéaire) et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tdt = 0$$

et on a donc deux cas :

- ou bien  $g$  est de signe constant : étant continue et d'intégrale nulle, elle est identiquement nulle donc tout  $x \in [0; 1]$ , annulant  $g$ , est un point fixe de  $f$  ;
- ou bien elle change de signe : étant continue, par TVI elle s'annule, et son point d'annulation est un point fixe de  $f$ .

### Exercice 2 [Intégrale et intégrale du carré]

On considère  $g : x \mapsto f(x) - f(x)^2$ . Par combinaison linéaire et composée,  $g$  est continue sur  $[0; 1]$ . Par linéarité, on a également  $\int_0^1 g(t)dt = 0$ . Et comme  $f$  est à valeurs dans  $[0; 1]$ , on déduit que  $g$  est positive, donc de signe constant.

Et ainsi  $g$  est identiquement nulle, donc :

$$\forall x \in [0; 1], g(x) = f(x)(1 - f(x)) = 0 \text{ puis } f(x) = 0 \text{ ou } 1$$

mais  $f$  étant continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ , son image est un intervalle, donc  $\{0\}$  ou  $\{1\}$  (seuls intervalles inclus dans  $\{0; 1\}$ ).

Et finalement,  $f$  est constante de valeur 0 ou 1.

### Exercice 3 [Première formule de la moyenne]

On applique le théorème des bornes atteintes à  $f$  : notons  $\alpha, \beta \in [a; b]$  tels que :

$$\forall t \in [a; b], f(\alpha) \leq f(t) \leq f(\beta)$$

puis en multipliant par  $g(t) \geq 0$  :

$$\forall t \in [a; b], f(\alpha)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(\beta)g(t)$$

et en intégrant cette inégalité sur  $[a; b]$  :

$$f(\alpha) \left( \int_a^b g(t)dt \right) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(\beta) \left( \int_a^b g(t)dt \right).$$

et on a deux cas :

- si  $\int_a^b g(t)dt = 0$  : alors tout  $c \in [a; b]$  convient ;
- sinon : alors, par positivité de  $g$ , on a  $\int_a^b g(t)dt > 0$  et en divisant par cette quantité :

$$f(\alpha) \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq f(\beta)$$

donc par théorème des valeurs intermédiaires le quotient d'intégrale est une image par  $f$ , donc de la forme  $f(c)$ , et un tel  $c$  convient en remultipliant par  $\int_a^b g(t)dt$ .

#### Exercice 4 [Deuxième formule de la moyenne]

On le fait avec  $g$  continue. On pose  $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$  (l'unique primitive de  $g$  qui s'annule en  $a$ ), qui est de classe  $\mathcal{C}^1$ , comme  $f$ , et donc peut donc procéder par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)dt.$$

Par continuité de  $G$  sur le segment  $[a; b]$ , avec le théorème des bornes atteintes, il existe  $\alpha, \beta \in [a; b]$  tels que :

$$\forall t \in [a; b], G(\alpha) \leq G(t) \leq G(\beta)$$

et en multipliant par  $-f'(t) \geq 0$  (car  $f$  décroissante) et en intégrant sur  $[a; b]$  l'inégalité obtenue, il vient :

$$G(\alpha)(f(a) - f(b)) \leq - \int_a^b f'(t)G(t)dt \leq G(\beta)(f(a) - f(b)).$$

On déduit ensuite que :

$$G(\alpha)f(b) \leq G(b)f(b) \leq G(\beta)f(b).$$

Et en sommant ces deux inégalités, on déduit :

$$G(\alpha)f(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq G(\beta)f(a)$$

et on a deux cas :

- si  $f(a) = 0$  : comme  $f$  est positive décroissante, alors  $f$  est identiquement nulle donc tout  $c \in [a; b]$  convient ;
- sinon : alors  $f(a) > 0$  et en divisant par  $f(a)$  l'inégalité :

$$G(\alpha) \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{f(a)} \leq G(\beta)$$

et on conclut par TVI appliqué à  $G$ .

Si  $g$  est seulement continue par morceaux, la fonction  $G$  est encore continue et on peut quand même lui appliquer le TVI, le TBA. L'intégration par parties du début est plus subtile, et demande de découper sur chaque segment sur lequel  $g$  est continue. Et on obtient la même chose.

#### Exercice 5 [Intégrale d'une fonction dérivable]

On considère  $g : x \mapsto f(x) - f(a)$ . Par combinaison linéaire,  $g$  est continue. Et par linéarité de l'intégrale :  $\int_a^b g(t)dt = 0$  (avec l'hypothèse de l'énoncé).

On a deux cas :

- si  $g$  est de signe constant : alors  $g$  est nulle, donc  $f$  est constante, et tout  $c$  convient ;
- sinon : alors  $g$  change de signe. Par TVI,  $g$  s'annule une fois sur  $]a; b[$ . Donc  $f$  prend au moins deux fois la valeur  $f(a)$  (en  $a$  et en l'autre point d'annulation de  $g$ ). Par théorème de Rolle, comme  $f$  est dérivable, on déduit que  $f$  a un point critique sur  $]a; b[$ .

#### Exercice 6 [Intégrale et fonctions puissances 1]

On considère  $f$  continue sur  $[0, 1]$  et on pose  $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$ .

1. La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0; 1]$  : par théorème des bornes atteintes, il existe  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall t \in [0; 1], m \leq f(t) \leq M$$

et en multipliant par  $t^n \geq 0$  et en intégrant entre 0 et 1 il vient :

$$\frac{m}{n+1} \leq I_n \leq \frac{M}{n+1}$$

et donc  $I_n$  tend vers 0 par encadrement.

2. Par intégrations par parties, on a :

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt = \left[ \frac{t^{n+1} f(t)}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1} f'(t)}{n+1} dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt$$

où, par la première question (applicable comme  $f'$  est continue), la quantité  $\int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt$  tend vers 0. Et on a ainsi :

$$I_n = \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais on a également :

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en combinant ces deux égalités on a le développement asymptotique :

$$I_n = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Remarque :** le résultat reste vrai si on suppose seulement  $f$  continue, mais se montre avec des  $\varepsilon$ .

3. Par intégrations par parties, on a :

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt = \left[ \frac{t^{n+1} f(t)}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1} f'(t)}{n+1} dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt$$

et on applique le résultat précédent (valable comme  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ) :

$$\int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = \frac{f'(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{f'(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec la même manipulation qu'à la question précédente.

Et en réinjectant :

$$I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)}{n(n+1)} - \frac{f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{f(1)}{n} + \frac{-f(1) - f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Remarque :** le résultat reste vrai si on suppose seulement  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , mais se montre avec des  $\varepsilon$ .

### Exercice 7 [Intégrale et fonctions puissances 2]

On va montrer un résultat plus fort : on montre que  $f$  possède au moins  $n+1$  points d'annulation en lesquels elle change de signe, ou une infinité de points d'annulation.

Par linéarité, notons déjà que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b P(t)f(t)dt.$$

Supposons que  $f$  ne s'annule en changeant de signe  $n$  fois au plus. Montrons alors que  $f$  s'annule une infinité de fois.

Considérons  $x_1, \dots, x_m$  (pour  $m \leq n$ ) ces points d'annulation. Notons  $P = \prod_{i=1}^m (X - x_i) \in \mathbb{R}_m[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ . Alors :

$$\int_a^b P(t)f(t)dt$$

mais les fonctions  $f$  et  $t \mapsto P(t)$  ont les mêmes changements de signe : leur produit  $g : t \mapsto P(t)f(t)$  est donc de signe constant. Comme  $f$  est continue (énoncé) et  $P$  aussi (fonction polynomiale), alors  $g$  est continue par produit. Donc  $g$  est identiquement nulle. Et ainsi :

$$\forall t \in [a; b], f(t)P(t) = 0 \text{ ie } (f(t) = 0 \text{ ou } P(t) = 0)$$

et ainsi, comme  $P$  ne s'annule en les  $x_i$  (qui sont déjà des points d'annulation de  $f$ ), on déduit que :  $f = 0$ . Donc  $f$  s'annule une infinité de fois (elle est même identiquement nulle).

### Exercice 8 [Intégrales et périodicité]

Posons  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Notons :  $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+T) - F(x)$ . Par combinaison linéaire et composée,  $\varphi$  est dérivable, avec :  $\varphi' : x \mapsto f(x+T) - f(x)$ .

Et on a directement les équivalences :

$$\varphi \text{ constante} \Leftrightarrow \varphi' = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ est } T\text{-périodique.}$$

### Exercice 9 [Intégrale et majoration]

Posons  $F$  l'unique primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  qui s'annule en 0 et notons :  $\varphi : x \mapsto e^{-kx} \int_0^x f(t)dt = e^{-kx} F(x)$ .

Par produit et composée,  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , de dérivée :

$$\varphi' : x \mapsto (f(x) - kF(x)) e^{-kx} = \left( f(x) - k \int_0^x f(t)dt \right) e^{-kx} \leq 0$$

donc  $\varphi$  est décroissante.

Mais on a également :

- par construction de  $\varphi : \varphi(0) = 0$  ;
- comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , alors  $F$  aussi ( $F$  est croissante et s'annule en 0, ou on peut aussi invoquer l'écriture de  $F$  par intégrale) ; et par produit  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Et ainsi  $\varphi$  est nulle, donc  $F$  aussi, et en dérivant  $f$  est nulle.

### Exercice 10 [Intégrale d'une fonction bijective]

1. Montrons déjà que  $f(0) = 0$ . Notons  $f(0) = a$ . Par l'absurde, supposons  $a \neq 0$ . Notons  $b$  l'antécédent de 0 par  $f$ . Par théorème des valeurs intermédiaires,  $[0; a] \subset f([0; b])$ . Et par théorème des bornes atteintes,  $f([0; b]) = [0; A]$ .

Considérons  $c$  un antécédent de  $A + 1$  dans  $\mathbb{R}_+$  : nécessairement  $c > b$ . Et par théorème des valeurs intermédiaires appliqué à  $f$  entre  $b$  et  $c$ , il existe  $d \in [b; c]$  tel que  $f(d) = a$ .

Et finalement  $f(d) = f(0)$ , ce qui contredit la bijectivité de  $f$ .

Notons  $F$  l'unique primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  qui s'annule en 0, et  $G$  l'unique primitive de  $f^{-1}$  sur  $\mathbb{R}_+$  qui s'annule en 0. Posons :

$$\varphi : x \mapsto xf(x) - \int_0^x f(t)dt - \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x) - F(x) - G(f(x)).$$

Alors  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  par produit, combinaison linéaire et composée, de dérivée :

$$\varphi' : x \mapsto xf'(x) + f(x) - f(x) - f'(x) \cdot f^{-1}(f(x)) = 0$$

donc  $\varphi$  est constante de valeur  $\varphi(0) = \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt = 0$  (comme  $f(0) = 0$ ) ce qui prouve l'égalité pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a :  $xf(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ . On pourra commencer par montrer que  $f(0) = 0$ .

- On fait un dessin : la première intégrale est l'aire sous la courbe de  $f^{-1}$  entre  $f(0)$  et  $f(x)$  ; la seconde est l'aire sous la courbe de  $f$  entre 0 et  $x$ . Par symétrie des courbes de  $f$  et  $f^{-1}$  par rapport à la première bissectrice, la première aire est égale à l'aire entre la courbe de  $f$  et la droite d'équation  $y = f(x)$  entre les abscisses 0 et  $x$ . La somme de ces deux aires recouvrent donc le rectangle entre les abscisses 0 et  $x$ , et les ordonnées 0 et  $f(x)$  : son aire vaut  $xf(x)$ , ce qui donne l'égalité.

### Exercice 11 [Fonction construite à partir d'une intégrale 1]

On note  $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$  (continue sur  $\mathbb{R}$ ) et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  (existe bien par théorème fondamental de l'analyse). Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a ainsi :

$$F(x) = G(2x) - G(x)$$

donc  $F$  est dérivable (par combinaison linéaire et composée) de dérivée :

$$F' : x \mapsto 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{4x^4 + 4x^2 + 4} - \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

et donc :

$$F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2 + 4 \geq 16x^4 + 4x^2 + 1 \Leftrightarrow 3 \geq 12x^4 \Leftrightarrow x \in \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

avec égalité seulement pour  $x = \pm\sqrt{2}/2$ .

Donc  $F$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -\sqrt{2}/2]$  et sur  $[\sqrt{2}/2; +\infty[$  et strictement croissante sur  $[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$ .

Pour les limites : pour  $x > 0$ , on a par décroissance de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$\forall t \in [x, 2x], g(2x) \leq g(t) \leq g(x)$$

et en intégrant :

$$xg(2x) = \frac{x}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}} \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

et on conclut par théorème d'encadrement que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .

En  $-\infty$ , on peut faire le même calcul, ou invoquer que  $F$  est impaire (découle du fait que  $g$  est paire), et ainsi :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .

### Exercice 12 [Fonction construite à partir d'une intégrale 2]

Pour  $t$  au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t\ln(t)} = \frac{t-1}{t\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{t-1}{1 \cdot (t-1)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1 \underset{t \rightarrow 1}{\rightarrow} 1$$

Et donc la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1/\ln(x) - 1/x\ln(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est continue au voisinage de 1. Notons  $G$  une primitive de  $\varphi$  sur un voisinage de 1. Alors, pour  $x$  proche de 1, comme alors  $x^2$  est également proche de 1, on a :

$$\int_x^{x^2} \varphi(t) dt = G(x^2) - G(x)$$

qui tend vers 0 pour  $x$  tendant vers 1 (par continuité de  $G$  en 1).

Mais on a également :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt = [\ln(|\ln(t)|)]_x^{x^2} = \ln(2)$$

ce qui assure, par linéarité de l'intégrale, que :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2)$ .

### Exercice 13 [Limite d'une somme]

On reconnaît le début du développement de Taylor de  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  en 1. Mais  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

et ainsi :  $|f^{(n+1)}| \leq n!$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à  $f$ , à l'ordre  $n$ , entre 0 et 1 :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

ce qui conclut par encadrement la limite voulue.

### Exercice 14 [Méthode du point milieu]

On considère  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ , dont on souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale par la méthode dite des du point milieu : pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on découpe  $[a, b]$  en  $n$  segments réguliers, et on construit la fonction en escalier, pour laquelle la subdivision régulière est adaptée, et qui prend même valeur que  $f$  en les  $a + (k + \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$  (pour  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ).

1. On a une subdivision à pas régulier : les écarts entre deux  $x_i$  consécutifs valent toujours  $\frac{b-a}{n}$  et donc :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right).$$

2. Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur le segment  $[a; b]$ , par théorème des bornes atteintes il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $|f''| \leq M$ .

On pose  $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Pour  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , on pose  $b_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ . Pour un tel  $k$  et  $t \in [x_k; x_{k+1}]$ , on a par inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à  $f$  à l'ordre 1 entre  $t$  et  $b_k$  :

$$|f(t) - f(b_k) - (t - b_k)f'(b_k)| \leq \frac{M|t - b_k|^2}{2} = \frac{M(t - b_k)^2}{2}.$$

On note ensuite que tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  :

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} f(b_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(b_k) dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(b_k) + (t-b_k)f'(b_k)) dt$$

en notant que, comme  $b_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ , on a :  $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-b_k) dt = 0$ .

On réinjecte, avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - T_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(b_k) - (t-b_k)f'(b_k)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(b_k) - (t-b_k)f'(b_k)| dt \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{M(t-b_k)^2}{2} dt \text{ en intégrant l'inégalité de Taylor-Lagrange précédente} \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{(t-b_k)^3}{6} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{24n^3} = \frac{M(b-a)^3}{24n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on a bien le résultat demandé.

### Exercice 15 [Sommes de Riemann]

On fait apparaître à chaque fois des sommes de Riemann :

$$1. \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \text{ qui tend vers } \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$2. \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k/n}{1+(k/n)^2} \text{ qui tend vers } \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(2).$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2nk}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+2(k/n)}} \text{ qui tend vers } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2t}} dt = \sqrt{1+2} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1.$$

$$4. \frac{1}{n} (\cos(\pi/n) + \cos(2\pi/n) + \dots + \cos(n\pi/n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(k\pi/n) \text{ qui tend vers } \int_0^1 \cos(\pi t) dt = 0.$$

$$5. \frac{1}{n} (\sin(\pi/n) + \sin(2\pi/n) + \dots + \sin(n\pi/n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k\pi/n) \text{ qui tend vers } \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \frac{2}{\pi}$$

6.  $\sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) \dots \left(1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)} = \exp(S_n)$  avec  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$  et  $S_n$  converge vers  $\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$  qu'on calcule par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+t^2)dt &= [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

en faisant la décomposition en éléments simples  $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ .

Et la quantité de départ tend vers  $2 \exp\left(-2 + \frac{\pi}{2}\right)$ .

### Exercice 16 [Somme des puissances positives d'entiers]

On a directement :

$$S_n = n^\alpha \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = n^{\alpha+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\right)$$

où on reconnaît une somme de Riemann qui tend vers  $\int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1} \neq 0$  ce qui donne l'équivalent :

$$S_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

### Exercice 17 [Somme des puissances négatives d'entiers]

1. La suite  $(S_n)$  est strictement croissante : elle a donc une limite qui est soit finie (si, et seulement si, elle est majorée) soit  $+\infty$  (sinon) par théorème de la limite monotone.
2. Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  : la fonction  $t \mapsto t^\alpha$  est décroissante sur  $[k; k+1]$ , et ainsi :

$$\forall t \in [k, k+1], (k+1)^\alpha \leq t^\alpha \leq k^\alpha$$

et en intégrant sur  $[k, k+1]$  on déduit :

$$(k+1)^\alpha = \int_k^{k+1} (k+1)^\alpha dt \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq \int_k^{k+1} k^\alpha dt = k^\alpha$$

et en sommant pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^\alpha \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt \leq \sum_{k=1}^n k^\alpha$$

et on distingue suivant la valeur de  $\alpha$ .

Et on fait apparaître  $S_n$  :

$$S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt \leq S_n$$

qui donne l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} t^\alpha dt \leq S_n \leq 1 + \int_1^n t^\alpha dt.$$

3. Si  $\alpha = -1$  :  $\int_1^{n+1} t^\alpha dt = \ln(n+1)$  qui tend vers  $+\infty$ , donc par minoration  $S_n$  tend vers  $+\infty$ .

Si  $\alpha > -1$  : on a  $\int_1^{n+1} t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1} [(n+1)^{\alpha+1} - 1]$  qui tend également vers  $+\infty$ , donc par minoration  $S_n$  tend vers  $+\infty$ .

Si  $\alpha < -1$  : on a  $1 + \int_1^n t^\alpha dt = 1 + \frac{1}{\alpha+1} [n^{\alpha+1} - 1] \leq 1$  et donc  $(S_n)$  converge (étant majorée).

Pour un équivalent, on procède par encadrement :

- si  $\alpha = -1$  : on a l'encadrement :

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$$

où les membres de gauche et droite sont équivalents à  $\ln(n)$ , et par encadrement :  $S_n \sim \ln(n)$  ;

- $\alpha > -1$  : on a l'encadrement :

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

où les membres de gauche et droite sont équivalents à  $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ , et par encadrement :  $S_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ .

### Exercice 18 [Somme de Riemann et fonction dérivable]

Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a par égalité des accroissements finis :

$$f\left(\frac{1}{n+kp}\right) = f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - f(0) = \frac{1}{n+kp} \cdot f'(c_{n,k})$$

pour  $c_{n,k} \in ]0; \frac{1}{n+kp}[ \subset [0, \frac{1}{n}]$ . Mais  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , donc  $f'$  est continue sur le segment  $[0; 1/n]$  : par théorème des bornes atteintes, il existe  $a_n, b_n \in [0; 1/n]$  tels que  $f'([0, 1/n]) = [f'(a_n), f'(b_n)]$ . Et ainsi :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+kp} f'(c_{n,k}) \in [v_n f'(a_n), v_n f'(b_n)]$$

où  $v_n = \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+kp} \right)$  tend vers  $\frac{\ln(1+p)}{p}$  (en reconnaissant une somme de Riemann).

Mais par encadrement  $a_n$  et  $b_n$  tendent vers 0. Et par caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $f$  (en fait on n'utilise que la dérivabilité proche de 0, et la continuité de  $f'$  en 0) on déduit que  $f'(a_n)$  et  $f'(b_n)$  tendent vers  $f'(0)$ . Par produit, les quantités  $v_n f'(a_n)$  et  $v_n f'(b_n)$  tendent toutes les deux vers  $\frac{\ln(1+p)}{p} f'(0)$ . Et par encadrement, c'est aussi la limite de  $(u_n)$ .

On pourrait faire aussi, comme la preuve de convergence des sommes de Riemann, pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , ou alors  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $f'$  lipschitzienne : les calculs ressemblent à la première méthode (on somme des inégalités, et on majore par inégalités triangulaire).