Feuille d'exercices n^{o}28 : Intégration

Exercice 1 [Intégrale et point fixe]

Soit f continue sur $[0;1]$ telle que : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 2 [Intégrale et intégrale du carré]

On considère $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 3 [Première formule de la moyenne]

On considère f continue sur $[a,b]$, et g continue (par morceaux) positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 4 [Deuxième formule de la moyenne]

On considère f de classe $\mathcal{C}^1$, positive décroissante sur $[a,b]$, et g continue (par morceaux). Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 5 [Intégrale d'une fonction dérivable]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = (b-a)f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6 [Intégrale et fonctions puissances 1]

On considère f continue sur $[0,1]$ et on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n converge et donner sa limite.
2. On suppose que f est $\mathcal{C}^1$. Donner le développement asymptotique de I_n à la précision $1/n$.
3. On suppose que f est $\mathcal{C}^2$. Donner le développement asymptotique de I_n à la précision $1/n^2$.

Exercice 7 [Intégrale et fonctions puissances 2]

On considère f continue sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \int_a^b t^k f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f possède au moins $n+1$ points d'annulation.

Exercice 8 [Intégrales et périodicité]

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $T > 0$. Montrer que f est T-périodique si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ est constante.

Exercice 9 [Intégrale et majoration]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que, pour un certain $k > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant k\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que f est nulle. On pourra utiliser la fonction $x \mapsto e^{-kx}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 10 [Intégrale d'une fonction bijective]

On considère f de classe C^1 réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t$. On pourra commencer par montrer que $f(0) = 0$.
2. Interpréter géométriquement cette égalité.

Exercice 11 [Fonction construite à partir d'une intégrale 1]

Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ et les limites en $\pm\infty$ de la fonction : $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Exercice 12 [Fonction construite à partir d'une intégrale 2]

En étudiant la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t\ln(t)}$ au voisinage de 1, calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t\ln(t)}\right) \mathrm{d}t$.

Et en déduire la limite quand x tend vers 1 de : $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Exercice 13 [Limite d'une somme]

En appliquant l'inégalité de Taylor–Lagrange à $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} \ln(2).$$

Exercice 14 [Méthode du point milieu]

On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, dont on souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale par la méthode dite des du point milieu : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on découpe $[a, b]$ en n segments réguliers, et on construit la fonction en escalier, pour laquelle la subdivision régulière est adaptée, et qui prend même valeur que f en les $a + (k + \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$ (pour $k \in [\![0; n-1]\!]$).

1. Donner une expression de l'intégrale approchée T_n sous forme d'une somme.
2. Montrer que : $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n\right| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 15 [Sommes de Riemann]

Calculer les limites des suites de termes généraux suivants :

1. $\dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$
2. $\dfrac{1}{n^2+1^2} + \dfrac{2}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}}$
4. $\dfrac{1}{n}\left(\cos(\pi/n) + \cos(2\pi/n) + \cdots + \cos(n\pi/n)\right)$
5. $\dfrac{1}{n}\left(\sin(\pi/n) + \sin(2\pi/n) + \cdots + \sin(n\pi/n)\right)$
6. $\sqrt[n]{\left(1 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1 + \left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$

Exercice 16 [Somme des puissances positives d'entiers]

On considère $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$. En utilisant une somme de Riemann, donner un équivalent simple de S_n.

Exercice 17 [Somme des puissances négatives d'entiers]

On considère $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$.

1. Montrer que la suite (S_n) a une limite (finie ou non).
2. En utilisant la monotonie de $t \mapsto t^\alpha$, en déduire un encadrement par une intégrale de S_n à l'aide d'intégrales (on traitera à part le cas $\alpha = -1$).
3. En déduire les valeurs de α pour lesquelles (S_n) converge, et donner un équivalent de S_n dans les autres cas.

Exercice 18 [Somme de Riemann et fonction dérivable]

On considère $p \in \mathbb{N}^*$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = 0$.

Étudier la limite de la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^n f\left(\dfrac{1}{n+kp}\right)$.