Feuille d'exercices n^{o}27 : Matrices et applications linéaires

Exercice 1 [Détermination de matrices d'applications linéaires]

On calcule à chaque fois les images des éléments de la base canonique de l'ensemble de départ, qu'on exprime dans celle d'arrivée :

1. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A \end{pmatrix}$ (en blocs 2×2) si on numérote la base canonique dans l'ordre $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,1})$. Si on numérote la base canonique plutôt $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,1})$, on trouve : $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (mais c'est moins joli).

5. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_6) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ peu importe la numérotation de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tant qu'on commence par $E_{1,1}$ et qu'on finit par $E_{2,2}$.

Exercice 2 [Matrice de Vandermonde]

On considère $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, et on définit l'application : $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array} \right.$.

1. On a pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$:
$$\varphi(X^k) = \left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$$
et ainsi :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Si une telle base $\mathcal{B}'$ existe, l'application φ doit être inversible, donc injective, donc les x_i doivent être deux-à-deux distincts.

   Réciproquement, si les x_i sont deux-à-deux distincts, considérons la famille $(L_1, \dots, L_n)$ définie par :

$$\forall i \in [\![1; n]\!],\ L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

   qui est bien une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, et qui vérifie bien que $\varphi(\mathcal{B}') = \mathcal{C}$. Donc cette base convient.

Exercice 3 [Calcul d'inverse d'une matrice]

On considère $n \in \mathbb{N}$, et on pose $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

1. Si on note f cet endomorphisme, on aurait :

$$\forall k \in [\![0; n]\!],\ f(X^k) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,k+1} X^{i-1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{k}{l} X^l = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l 1^{k-l} = (1+X)^k$$

   en reconnaissant un binôme, et donc $f : P \mapsto P(X+1)$ (la composition par $X+1$).

2. Ainsi f est bijective, d'inverse $f^{-1} : P \mapsto P(X-1)$ (la composition par $X-1$). La matrice A est donc inversible, et son inverse est la matrice de f^{-1} dans la base canonique. Mais on a également par binôme :

$$\forall k \in [\![0;]\!],\ f^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l (-1)^{k-l} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l (-1)^{k-l} = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i,k+1} X^{i-1}$$

   où $A^{-1} = (b_{i,j})$ avec : $\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ b_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}$

3. On utilise les écritures de A et A^{-1}. En utilisant que $A \cdot A^{-1} = I_n$, on déduit que pour tous $i, j^i n [\![0; n]\!]$ avec $i < j$, on a :

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = \sum_{k=0}^{n} a_{i+1,k+1} b_{k+1} j + 1 = \left[A \cdot A^{-1}\right]_{i+1,j+1} = \delta_{i+1,j+1} = 0$$

Exercice 4 [Quelques calculs de rangs]

Déterminer les rangs des matrices suivantes :

1. La matrice est non nul donc son rang est au moins 1. Elle n'est pas inversible (par déterminant, ou comme les deux lignes sont proportionnelles) donc son rang n'est pas 2. Donc son rang est 1.

2. On échelonne par pivot :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

3. Pareil mais on commence par échanger $L_1 \leftrightarrow L_2$ et $C_1 \leftrightarrow C_2$ pour faciliter les calculs :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

4. Directement par pivot :

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1 & i & -i & 1\\ i & -i & 1 & 1\\ 0 & 1+i & 0 & 1+i\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & i & -i & 1\\ 0 & -i+1 & 0 & 1-i\\ 0 & 1+i & 0 & 1+i\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & i & -i & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2.$$

Exercice 5 [Rangs de matrices à paramètres]

Discuter suivant les valeurs des paramètre des rangs des matrices suivantes :

1. On échelonne :

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ b+c & c+a & a+b\\ bc & ca & ab\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-b & a-c\\ 0 & c(a-b) & b(a-c)\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-b & a-c\\ 0 & 0 & (b-c)(a-c)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a=b=c\\ 2 & \text{si} \quad a=b \text{ et } a,b\neq c\\ 2 & \text{si} \quad a\neq b \text{ et } (b=c \text{ ou } a=c)\\ 3 & \text{si} \quad a\neq b \text{ et } b\neq c \text{ et } a\neq c\end{cases} = \text{Card}\{a,b,c\}.$$

2. On échelonne :

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta)\\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta)\\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta)\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta)\\ 0 & \cos(2\theta)-\cos^2(\theta) & \cos(3\theta)-\cos(\theta)\cos(2\theta)\\ 0 & \cos(3\theta)-\cos(\theta)\cos(2\theta) & \cos(4\theta)-\cos(2\theta)\cos(2\theta)\end{pmatrix}$$

$$= \text{rg}\begin{pmatrix}1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta)\\ 0 & \sin^2(\theta) & \sin(\theta)\sin(2\theta)\\ 0 & \sin(\theta)\sin(2\theta) & \sin^2(2\theta)\end{pmatrix}$$

et on procède par disjonction de cas :

- si $\sin(\theta)=0$ (c'est-à-dire $\theta\equiv 0\ [\pi]$) : alors le rang vaut 1 (seule la première ligne est non nulle) ;
- sinon : on continue d'échelonner :

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta)\\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta)\\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta)\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta)\\ 0 & \sin^2(\theta) & \sin(\theta)\sin(2\theta)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

et finalement :

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta)\\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta)\\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta)\end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \theta\equiv 0\ [\pi]\\ 2 & \text{si} \quad \theta\not\equiv 0\ [\pi]\end{cases}.$$

3. On veut faire un pivot. On distingue si $a=0$ ou non :

- si $a=0$: le rang vaut 0 si $b=0$ et n sinon (les n colonnes sont, à multiplication par $b\neq 0$ et réindexation, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$) ;
- si $a\neq 0$: on fait un pivot. On fait les opérations

$$C_2 \leftarrow aC_2 - bC_1,\ C_3 \leftarrow a^2C_3 - bC_2, \ldots, C_n \leftarrow a^{n-1}C_n - bC_{n-1}$$

et finalement :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & b \\ b & 0 & & a \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & a^n-(-1)^nb^n \end{pmatrix}$$

où la dernière matrice est diagonale, possède des $a \neq 0$ sur la diagonale et un $a^n-(-1)^nb^n$. Et finalement :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & b \\ b & 0 & & a \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{rcl} n & \text{si} & a^n \neq (-b)^n \\ n-1 & \text{si} & a^n = (-b)^n \end{array} \right. .$$

Exercice 6 [Matrices de rang 1]

Soit A de rang 1 : alors A est non nulle, et si famille des vecteurs colonnes engendre une droite, donc A possède une colonne non nulle (notons la C_{i_0}) et toutes ses colonnes sont proportionnelles à C_{i_0}. Il existe donc $\lambda_1, \dots \lambda_p$ tels que :

$$\forall i \in [\![1;p]\!],\ C_i = \lambda_i \cdot C_{i_0}$$

(avec en particulier $\lambda_{i_0}=1$). Et ainsi :

$$A = C_{i_0} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix} = X \cdot Y^T$$

en posant $X = C_{i_0} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont bien tous les deux non nuls.

Réciproquement, une telle matrice est :

- non nulle (donc de rang au moins 1) : si on note i l'indice d'un coefficient non nul de X et j celui d'un coefficient non nul de Y, alors le coefficient d'indice (i,j) de XY^T est non nul (c'est le produit de ces coefficients) ;
- de rang au plus 1 : toutes ses colonnes sont proportionnelles à X ;

donc de rang 1.

Une telle écriture n'est pas unique : on peut multiplier X et diviser Y par un même $\lambda \neq 0$ pour avoir une autre écriture. Plus subtile : il s'agit en fait de toutes les écritures possibles de cette forme.

Exercice 7 [Changement de base pour un vecteur]

On écrit P la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$. On a directement :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale). Donc $\mathcal{B}'$ est une base. Et on a $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

On déduit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ et finalement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 [Changement de base pour un endomorphisme 1]

On calcule la matrice P de (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on trouve (par pivot) que P est inversible d'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ A4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui assure bien que $(e'_1, e'_2, e'_3) = \mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et avec les notations précédentes on a :

$$P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \text{ et } P^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

et par formule de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} A \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 [Changement de base pour un endomorphisme 2]

1. Cette matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Il suffit de montrer que P est inversible. Elle l'est (par pivot) et on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et par changement de base la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a directement $B^3 = -3I_3$ est la matrice de $f \circ f \circ f$ dans $\mathcal{B}$. Donc $f = -3\mathrm{id}$.

Exercice 10 [Changement de base pour un endomorphisme 3]

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définie par : $f(x,y,z) = \displaystyle\int_0^2 \frac{xt^2 + yt + z}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t$.

1. La matrice de $\mathcal{B}$ dans la base canonique est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (par pivot) d'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 9/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui assure que $\mathcal{B}$ est bien une base.

2. On peut directement reconnaître que :
$$f : (x,y,z) \mapsto x \cdot \int_0^2 \frac{t^2}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t + y\int_0^2 \frac{t}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t + z\int_0^2 \frac{1}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t$$
qui est donc de la forme $(x,y,z) \mapsto ax+by+cz$, et est donc bien une forme linéaire.

Et on a :
$$\begin{aligned} f(0,1,1) &= \int_0^2 \frac{t+1}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{1}{(t-3)}\mathrm{d}t = -\ln(3) \\ f(0,1,-3) &= \int_0^2 \frac{t-1}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{1}{(t+1)}\mathrm{d}t = \ln(3) \\ f(1,-2,-3) &= \int_0^2 \frac{t^2-2t-3}{(t+1)(t-3)}\mathrm{d}t = \int_0^2 \mathrm{d}t = 2 \end{aligned}$$

3. On déduit que la matrice dans $\mathcal{B}$ (pour $\mathbb{R}^3$) et la base canonique (pour $\mathbb{R}$) de f est :
$$A = \begin{pmatrix} -\ln(3) & \ln(3) & 2 \end{pmatrix}$$
et par formule de changement de base on déduit :
$$\begin{aligned} f(x,y,z) = A \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -\frac{\ln(3)}{4}(9x+3y+z) + \frac{\ln(3)}{4}(-x+y-z) + 2x \\ &= \left(\frac{-5\ln(3)}{2} + 2\right)x - \frac{\ln(3)}{2}y - \frac{\ln(3)}{2}z. \end{aligned}$$

Exercice 11 [Certaines matrices semblables]

Par double implication :

- si A est nilpotente : elle est semblable à elle-même, qui est nilpotente, donc est semblable à une matrice nilpotente ;
- si A est semblable à une matrice nilpotente : notons B nilpotente et P inversible telles que $A = P^{-1}BP$. Posons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^n = 0$. Alors :
$$A^n = P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP \cdot \dots \cdot P^{-1}BP = P^{-1}B^nP = P^{-1}0P = 0$$
en notant que les PP^{-1} se simplifient. Et finalement $A^n = 0$: donc A est nilpotente.

Pour une matrice scalaire $M = \lambda I_n$:

- par réflexivité : M est semblable à elle-même ;
- si N est semblable à N, notons P telle que $N = P^{-1}MP$. Mais M est scalaire, donc commute avec toute matrice, et ainsi : $N = P^{-1}PM = M$ donc $N = M$.

Une matrice scalaire est donc seule dans sa classe de similitude : c'est la seule matrice qui lui soit semblable.

Exercice 12 [Décomposition d'une matrice]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. La somme des colonnes de A vaut 0, donc ses colonnes sont liées. Comme les deux premières colonnes (par exemple) sont non proportionnelles, on déduit que :

$$\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\right\}$$

qui est un plan.

Par théorème du rang, son noyau est de dimension 1, donc il suffit de trouver un élément non nul de son noyau pour avoir un générateur de $\mathrm{Ker}f$. On trouve que $(1,1,1)\in\mathrm{Ker}f$ donc

$$\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \{(x,x,x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}.$$

Comme $\mathrm{Im}f$ est de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, c'est un hyperplan : pour montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires, il suffit de voir que $\mathrm{Ker}f$ est une droite non contenue dans $\mathrm{Im}f$: on a déjà que c'est une droite ; et comme $(1,1,1)\notin\mathrm{Im}f$ (comme $1+1+1=3\neq 0$), elle n'est pas contenu dans $\mathrm{Im}f$.

Et finalement : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}f\oplus\mathrm{Ker}f$.

2. Pour une base adaptée, il suffit d'une base de $\mathrm{Im}f$ et d'une base de $\mathrm{Ker}f$, ce qu'on a fait avant. Une base adaptée est donc (par exemple) :

$$\mathrm{B} = ((2,-1,-1),(-1,2,-1),(1,1,1))$$

où les premiers éléments sont ceux de $\mathrm{Im}f$ et le dernier un élément de $\mathrm{Ker}f$.

On calcule directement leurs images :

$$f(2,-1,-1) = (6,-3,-3) = 3\cdot(2,-1,-1),\ f(-1,2,-1) = (-3,6,-3) = 3\cdot(-1,2,-1) \text{ et } f(1,1,1) = (0,0,0)$$

donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

3. On déduit que f et la composée du projecteur sur $\mathrm{Im}f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}f$, et de l'homothétie 3id.

Exercice 13 [Endomorphisme nilpotent d'indice maximal]

1. On considère $x\in E$ tel que $f^{n-1}(x)\neq 0$ (qui existe bien comme $f^{n-1}\neq 0$), et un tel x convient : la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre (voir feuille sur la dimension finie) et est de bon cardinal, donc c'est une base de E.

2. Si on note $(e_1,\dots,e_n)$ cette base, on a directement :

$$\forall i\in[\![1;n-1]\!],\ f(e_i) = e_{i+1} \text{ et } f(e_n) = 0$$

et ainsi la matrice de f dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix}0&0&\dots&\dots&0\\1&0&&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&1&0\end{pmatrix}.$$

(des 1 juste en dessous le la diagonale et des 0 partout ailleurs).

En faisant les puissances, la diagonale de 1 descend d'un cran. Et on obtient notamment la matrice suivante pour f^{n-1} :

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(un 1 en bas à gauche et des 0 partout ailleurs).

3. Par double inclusion :

 - les polynômes en f commutent bien avec f, comme toutes les puissances de f commutent avec f et que cet ensemble est stable par combinaisons linéaires ;
 - si g commute avec f : comme la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{i-1}(x)$$

 et en appliquant f on déduit :

$$g(f(x)) = f(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{i-1}\left(f(x)\right)$$

 et en répétant ce processus :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ g(f^k(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{i+k-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f^{i-1}\left(f^k(x)\right)$$

 ce qui assure, comme les applications g et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{i-1}$ coïncident sur la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$, qu'elles sont égales. Donc finalement :

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{i-1} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1}).$$

D'où l'égalité par double inclusion.