

# Feuille d'exercices n°26 : Études statistiques de variables aléatoires

## Exercice 1 [Minimum et maximum]

On considère une urne qui contient  $n$  boules indiscernables numérotées de 1 à  $n$ . On tire successivement deux boules, et on considère  $X$  (resp.  $Y$ ) la variable aléatoire du maximum (resp. du minimum) des deux montants.

Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  et en déduire les lois de  $X$  et de  $Y$ , selon que le tirage se fait avec ou sans remise. Et calculer les espérances et les variances de  $X$  et  $Y$ .

## Exercice 2 [Minimum]

On considère  $X_1, \dots, X_n$  variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune une loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . On pose  $M = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , calculer  $\mathbb{P}(M \geq k)$ , et en déduire la loi de  $M$ .
2. Montrer que :  $\mathbb{P}(\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i = 1) \geq 1 - \frac{1}{e}$ .

## Exercice 3 [Tirage dans une urne]

On considère une urne contenant  $n$  boules blanches et  $n$  boules rouges, toutes indiscernables. On tire simultanément  $n$  boules, et on note  $X$  le nombre de boules rouges obtenues.

Donner la loi de  $X$ , ainsi que son espérance et sa variance.

## Exercice 4 [Un problème de chaussures]

Dans un placard sont placées  $2N$  chaussures (qui composent  $N$  paires). On tire au hasard  $2n$  chaussures, et on note  $X$  le nombre de paires complètes ainsi tirées.

1. On note  $X_i$  la variable aléatoire indicatrice de l'événement "la  $i$ -ème paire est complète". Déterminer la loi et l'espérance de  $X_i$ .
2. En déduire l'espérance de  $X$ .

## Exercice 5 [Télescopage dans l'espérance]

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 0; N \rrbracket$ . Montrer que :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > n).$$

## Exercice 6 [Auto-indépendance (le retour)]

Que dire d'une variable aléatoire indépendante d'elle-même ?

## Exercice 7 [Variable aléatoire et coefficients binomiaux]

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$  telle que  $\mathbb{P}(X = k)$  est proportionnel à  $\binom{n}{k}$ . Déterminer la loi de  $X$ , puis son espérance et sa variance.

## Exercice 8 [Transfert dans l'inégalité de Markov]

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, et  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction strictement croissante. Montrer que :

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(a)}.$$

**Exercice 9 [Tirage jusqu'à épuisement]**

On considère une urne dans laquelle on a  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires. On effectue des tirages sans remise jusqu'à avoir sorti toutes les boules blanches. On note  $X$  le nombre de tirages. Quelle est la loi, l'espérance et la variance de  $X$  ?

**Exercice 10 [Intérêt d'un jeu d'argent]**

Une pièce truquée a probabilité  $p$  de faire pile. On propose de miser 20 euros pour avoir le droit de lancer 12 fois cette pièce, et de gagner 3 euros à chaque fois qu'on obtient pile. Pour quelles valeurs de  $p$  ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?

**Exercice 11 [Variables aléatoires indépendantes de même loi]**

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes, prenant les valeurs  $a_1, \dots, a_n$  avec probabilités  $p_1, \dots, p_n$ . Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i).$$

**Exercice 12 [Dés indépendants et loi uniforme]**

On veut montrer qu'on ne peut créer deux dés (éventuellement différents) à  $n \geq 2$  faces tels que la somme des montants du lancer indépendant des deux dés donne une loi uniforme sur  $\llbracket 2; 2n \rrbracket$ .

Par l'absurde, on suppose deux tels dés à disposition, on note  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires des montants des dés, et on note :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = p_k \text{ et } \mathbb{P}(Y = k) = q_k.$$

1. En étudiant les événements  $X + Y = 2$  et  $X + Y = 2n$ , donner une relation entre  $p_1$  et  $q_1$ , et entre  $p_n$  et  $q_n$ .
2. Montrer que :  $p_1 q_n + p_n q_1 \leq \frac{1}{2n - 1}$ .
3. Conclure.

**Exercice 13 [Application de Bienaymé–Tchebychev]**

On considère une usine  $A$  qui fabrique 100 pièces, dont chacune a 5% de chance (de manière indépendante) d'être défectueuse, et une usine  $B$  qui en fabrique 400, de manière indépendante, et dont 10% sont défectueuses. On note  $X$  (resp.  $Y$ ) le nombre de pièces défectueuses fabriquées par  $A$  (resp.  $B$ ).

1. Donner les lois de  $X$  et  $Y$ , puis de  $Z = X + Y$ , et donner leurs espérances et variances.
2. Déterminer  $c$  tel que le risque de faire plus de  $c$  pièces défectueuses soit inférieur à 5%.