

## Feuille d'exercices n°24 : Polynômes : racines et factorisation

### Exercice 1 [Taylor à l'envers]

Par formule de Taylor en 0, on a :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

et de même en remplaçant  $P$  par ses dérivées, ce qui donne en évaluant en 1, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$P^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!}$$

puis par formule de Taylor en 1 :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \left( \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n+k)}(0)}{k!n!} \right) X^k = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \left( \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n+k)}(0)}{k!n!} X^k \right) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

### Exercice 2 [Divisibilité, division et racines]

- On pose  $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ . Alors  $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$  donc 1 est racine (au moins) triple, donc  $(X-1)^3$  divise  $P$ . Et au passage  $P'''(1) = n(n+1)(n+2) \neq 0$  (comme  $n \in \mathbb{N}^*$ ) donc 1 est racine triple de  $P$ .
- On pose  $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  :  $P(1) = n - (n+1) + 1 = 0$  donc 1 est racine.  
Puis  $P' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$  donc  $P'(1) = 0$  donc 1 est racine au moins double.  
Puis  $P'' = n^2(n+1)X^{n-1} - (n-1)n(n+1)X^{n-2}$  donc  $P''(1) = n(n+1) \neq 0$  donc 1 est exactement racine double.
- On pose  $R_n \in \mathbb{R}_1[X]$  ce reste (comme  $\deg((X+1)(X-2)) = 2$ ). On a alors  $X^n(X+1)^2 = Q_n(X+1)(X-2) + a_nX + b_n$  pour  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  le quotient et  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . On évalue en  $-1$  et en  $2$  :

$$0 = 0 - a_n + b_n \text{ et } 9 \cdot 2^n = 2a_n + b_n$$

donc  $a_n = b_n = 3 \cdot 2^n$  puis  $R_n = 3 \cdot 2^n(X+1)$ .

- On factorise :  $2X^3 - 3X^2 + X = X(X-1)(2X-1)$  donc  $P = (X-1)^n - X^n + 2X - 1$  est divisible par  $2X^3 - 3X^2 + X$  si, et seulement si,  $P(1) = P(0) = P(1/2) = 0$ . Et on a :

$$P(1) = 0, \quad P(0) = (-1)^n - 1 \text{ et } P(1/2) = (-1/2)^n - (1/2)^n$$

donc  $P(0) = 0 \Leftrightarrow n$  pair  $\Rightarrow P(1/2) = 0$  et  $P(0) = 0$ . Donc on a la divisibilité demandée si, et seulement si,  $n$  est pair.

### Exercice 3 [Équation en des polynômes à l'aide de racines]

- $P(X^2) = P(X)P(X+1)$  : si  $P$  est constant, alors  $P = P^2$  donc  $P = 1$  ou  $P = 0$ . Et sinon on note  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ , qu'on réinjecte :

$$P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0 \text{ et } P((\alpha-1)^2) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$$

donc  $\alpha^2$  et  $(\alpha-1)^2$  sont également racines de  $P$ . Mais alors :

- nécessairement,  $\alpha$  est de module 1 ou 0 : sinon la suite  $(u_n) = (\alpha^{2^n})$  est une suite de racines deux à deux distinctes de  $P$ , et  $P$  a une infinité de racines, donc  $P = 0$  ;
- mais  $\alpha - 1$  vérifie la même condition, donc est également de module 0 ou 1.

ce qui laisse seulement quatre possibilités pour  $\alpha$  : 0, 1 et  $e^{\pm i\pi/3}$ . Mais alors  $\alpha^2$  et  $(\alpha - 1)^2$  doivent être de cette forme aussi, ce qui laisse seulement 0 et 1 comme racines. Comme ce sont les seules racines de  $P$ , on déduit que  $P$  est de la forme :  $P(X) = X^a(X - 1)^b$ , pour  $a, b \in \mathbb{N}$ . Et un tel polynôme vérifie :

$$P(X^2) = X^{2a}(X - 1)^b(X + 1)^b \text{ et } P(X)P(X + 1) = X^a(X - 1)^b(X + 1)^a X^b$$

donc est solution si, et seulement si,  $a = b$ .

Et finalement les solutions sont le polynôme nul et les polynômes de la forme  $P = X^a(X - 1)^a$ ,  $a \in \mathbb{N}$ .

2.  $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$  : même méthode : 0 et 1 sont les solutions constantes ; et sinon, si  $\alpha$  est racine de  $P$  solution, alors  $\alpha^2$  et  $(\alpha + 1)^2$  aussi ce qui impose  $\alpha$  et  $\alpha + 1$  de module 0 ou 1. Puis  $\alpha \in \{0, -1, e^{\pm 2i\pi/3}\}$ . Mais il faut aussi que  $\alpha^2$  et  $(\alpha + 1)^2$  soient dans cet ensemble, ce qui interdit 0 et 1. Donc  $P$  est de la forme  $P = (X - e^{2i\pi/3})^a(X - e^{-2i\pi/3})^b$  pour  $a, b \in \mathbb{N}$ . Et un tel polynôme vérifie :

$$P(X^2) = (X - e^{-2i\pi/3})^a(X + e^{-2i\pi/3})^a(X - e^{2i\pi/3})^b(X + e^{2i\pi/3})^b \text{ et } P(X)P(X + 1) = (X - e^{2i\pi/3})^a(X - e^{-2i\pi/3})^b$$

en utilisant que  $(e^{2i\pi/3})^2 = e^{-2i\pi/3}$  (et pareil en changeant les signes) et  $e^{2i\pi/3} + 1 = -e^{-2i\pi/3}$ . Et à nouveau  $P$  est solution si, et seulement si,  $a = b$ .

Et finalement les solutions sont le polynôme nul et les polynômes de la forme  $P = (X - e^{2i\pi/3})^a(X - e^{-2i\pi/3})^a$ ,  $a \in \mathbb{N}$ .

#### Exercice 4 [Un calcul de produit]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère les polynômes  $P = 1 + X + \dots + X^{n-1}$  et  $Q = X^n - 1$ .

1. Par télescopage.
2. Les racines de  $Q$  sont les racines  $n$ èmes de l'unité, et sont toutes simples. Comme  $Q$  est unitaire, on déduit :

$$Q = \prod_{k=1}^n (X - e^{2ik\pi/n})$$

puis :

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}).$$

3. On reconnaît  $P(1)$ , qui vaut  $n$  par la première formule de  $P$ . Donc :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = P(1) = n.$$

#### Exercice 5 [Un calcul de produit par les racines]

1. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (1+z)^n = \cos(2na) + i\sin(2na) \Leftrightarrow (1+z)^n = \exp(2ina) \\ \Leftrightarrow \frac{1+z}{\exp(2ia)} \in \mathbb{U}_n = \{\exp(2ik\pi/n) \mid k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$$

donc les solutions sont les :

$$\exp\left(2ia + \frac{2ik\pi}{n}\right) - 1 = 2i\exp\left(ia + \frac{ik\pi}{n}\right) \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$$

par formule de l'angle moitié.

On a donc  $n$  solutions distinctes (qui sont les racines de  $P$ ) : comme  $P$  est de degré  $n$ , cela veut dire que ses racines sont toutes simples.

2. On déduit, comme on connaît les racines de  $P$  et que  $P$  est unitaire :

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - 2i\exp\left(ia + \frac{ik\pi}{n}\right) \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

et en évaluant en 0 on déduit :

$$P(0) = \prod_{k=0}^{n-1} \left( -2i\exp\left(ia + \frac{ik\pi}{n}\right) \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \right) \\ = (-2i)^n \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} ia + \frac{ik\pi}{n}\right) \left( \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \right) \\ = i^{-n} 2^n \exp(ina) i^{n-1} \left( \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \right) \\ = -i 2^n \exp(ina) \alpha$$

en posant  $\alpha = \left( \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \right)$ .

Mais on a aussi  $P(0) = 1 - \cos(2na) - i\sin(2na)$  ce qui donne en comparant les parties réelles et imaginaires et en posant :

$$1 - \cos(2na) = 2^n \alpha \sin(na) \quad \text{et} \quad \sin(2na) = 2^n \alpha \cos(na)$$

où  $\cos(na)$  ou  $\sin(na)$  est non nul (la somme de leurs carrés vaut 1), donc avec les formules de duplication :

- si  $\cos(na) \neq 0$  :  $\alpha = \frac{\sin(2na)}{2^n \cos(na)} = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$  ;
- sinon :  $\alpha = \frac{1 - \cos(2na)}{2^n \sin(na)} = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

Et finalement :  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$ .

### Exercice 6 [Système sommes/produits généralisés]

On considère  $P = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+yz+xz)X - xyz$ . On cherche  $P$  suivant les relations sur  $x, y, z$  :

1. 
$$\begin{cases} x + y + z = -5 \\ xy + yz + zx = 3 \\ xyz = 9 \end{cases} \Leftrightarrow P = X^3 + 5X^2 + 3X - 9 = (X-1)(X+3)^2$$
 (1 racine évidente, puis polynôme de degré 2) ; ce qui donne les trois solutions :

$$(1, -3, -3), (-3, 1, -3), (-3, -3, 1).$$

2. 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ yz + xz + xy = xyz = -4 \\ xyz = -4 \end{cases} \Leftrightarrow P = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2)$$
 (1 racine évidente, puis polynôme de degré 2) ; donc  $\{x, y, z\} = \{1, 2, -2\}$  ce qui donne les six solutions :

$$(1, 2, -2), (1, -2, 2), (-2, 1, 2), (-2, 2, 1), (2, 1, -2), (2, -2, 1).$$

3. 
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases} : \text{ si } (x, y, z) \text{ solution :}$$

$$x + y + z = 2, \quad xy + yz + xz = \frac{1}{2} ((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) = -5$$

$$\text{et } xyz = -\frac{1}{3} ((x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) - 3(x + y + z)(xy + yz + zx)) = -6$$

- donc  $x, y, z$  vérifient : 
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + xz = -5 \\ xyz = -6 \end{cases}$$
 c'est-à-dire que ce sont les racines de  $X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X-1)(X+2)(X-3)$  donc les solutions (éventuelles) sont :

$$(1, -2, 3), (1, 3, -2), (-2, 1, 3), (-2, 3, 1), (3, 1, -2), (3, -2, 1)$$

et tous ces triplets vérifient bien le système : ce sont donc les six solutions.

### Exercice 7 [Réduction en éléments simples]

On calcule à chaque fois en premier la partie entière (pour ne pas l'oublier), on factorise le quotient (s'il n'est pas factorisé) et on détermine successivement les coefficients dans les éléments simples en essayant d'en éliminer par évaluation (après éventuel produit). On évite de tout réduire au même dénominateur et d'identifier (c'est plus compliqué). Et plus généralement, on évite tout calcul compliqué.

1. 
$$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$$
 (on trouve  $a$  et  $b$  en multipliant l'égalité par  $X-1$  ou  $X-2$  puis en évaluant en 1 ou 2) ;

2. 
$$\frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}$$
 (ou multiple par  $X-i$  puis on évalue en  $i$  pour  $i = 1, 2, 3$ ) ;

3. 
$$\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$
 : on trouve  $a$  et  $c$  en multipliant par  $X$  ou  $(X-1)^2$  et en évaluant en 0 ou 1 ; on en déduit  $b = -a$  en notant que :

$$\frac{1}{x(x-1)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1/x) \text{ et } \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + o(1/x) = \frac{a+b}{x} + o(1/x)$$

ce qui impose  $a = b$ .

4.  $\frac{2X}{X^2+1} = \frac{2X}{X^2+1}$  (sur  $\mathbb{R}$ ) ou  $\frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i} = \frac{1}{X+i} + \frac{1}{X-i}$  (sur  $\mathbb{C}$ ) qu'on peut voir en notant que, par unicité,  $a$  et  $b$  sont conjugués, et par imparité ils sont égaux (donc réels), et c'est facile ensuite de conclure ;
5.  $\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{X^2+X+1}$  (sur  $\mathbb{R}$ ) =  $\frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-\bar{j}} = \frac{-i\sqrt{3}/3}{X-j} + \frac{i\sqrt{3}/3}{X-\bar{j}}$  (on multiplie par  $X-j$  ou  $X-\bar{j}$  et on évalue en  $j$  ou  $\bar{j}$ ) (avec  $j = e^{2i\pi/3}$ ) ;
6.  $\frac{4}{(X^2+1)^2} = \frac{4}{(X^2+1)^2}$  (sur  $\mathbb{R}$ ) =  $\frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2} = -\frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} - \frac{1}{(X+i)^2}$  (on trouve  $b$  et  $d$  en multipliant par  $(X \pm i)^2$  et en évaluant en  $\mp 1$ , et on déduit  $a, c$  en réinjectant ; et on peut utiliser des ordres de grandeur pour aller plus vite dans le calcul de  $a$  et  $c$ ) ;
7.  $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} = \frac{5}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{5}{X+1} - \frac{4}{(X+1)^2}$  (même méthode qu'avant) ;
8.  $\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{(X-e^{i\pi/3})(X-e^{-i\pi/3})(X+e^{i\pi/3})(X+e^{-i\pi/3})} = \frac{1}{(X^2-X+1)(X^2+X+1)} = \frac{aX+b}{X^2-X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} = \frac{-1/2X+1/2}{X^2-X+1} + \frac{1/2X+1/2}{X^2+X+1}$  (sur  $\mathbb{R}$ ) =  $\frac{\alpha}{X-e^{i\pi/3}} + \frac{\beta}{X-e^{-i\pi/3}} + \frac{\gamma}{X+e^{i\pi/3}} + \frac{\delta}{X+e^{-i\pi/3}} = \frac{e^{-5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X-e^{i\pi/3}} + \frac{e^{5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X-e^{-i\pi/3}} + \frac{-e^{-5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X+e^{i\pi/3}} - \frac{e^{5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X+e^{-i\pi/3}}$  (sur  $\mathbb{C}$ ). Sur  $\mathbb{C}$ , on multiplie directement par  $X \pm e^{\pm i\pi/3}$  puis on évalue en  $\mp e^{\pm i\pi/3}$  (que des pôles simples). Sur  $\mathbb{R}$ , on peut regrouper dans la réduction sur  $\mathbb{C}$  ou faire directement mais les calculs sont plus lourds) ;
9.  $\frac{9}{(X^3-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{eX+f}{(X^2+X+1)^2} = \frac{-2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2X+3}{X^2+X+1} + \frac{3X+3}{(X^2+X+1)^2}$  (sur  $\mathbb{R}$ ) =  $\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{\alpha}{X-j} + \frac{\beta}{(X-j)^2} + \frac{\gamma}{(X-\bar{j})} + \frac{\delta}{(X-\bar{j})^2} = \frac{-2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-2j}{X-j} + \frac{\bar{j}}{(X-j)^2} + \frac{-2\bar{j}}{X-\bar{j}} + \frac{j}{(X-\bar{j})^2}$  (sur  $\mathbb{C}$ ).

### Exercice 8 [Autres décompositions en éléments simples]

On écrit la décomposition en éléments simples :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{X-k}$$

et on calcule  $\alpha_k$  en multipliant par  $X-k$  et en évaluant en  $k$ , ce qui donne :

$$\alpha_k = \frac{n!}{k(k-1)\dots 1 \cdot (-1)(-2)\dots(k-n)} = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$$

et finalement :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{X-k}$$

On procède de deux manières pour le second polynôme :

- par calcul direct :

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X - \omega^k}.$$

où  $\omega = e^{2i\pi/n}$ . Et en multipliant par  $X - \omega^k$  puis en évaluant en  $\omega^k$  on déduit que :

$$\alpha_k = \frac{\omega^{kn-k}}{\prod_{l \neq k} \omega^k - \omega^l} = \frac{1}{\prod_{l \neq k} 1 - \omega^{l-k}} = \frac{1}{n}$$

en retrouvant le résultat d'un exercice précédent.

- en reconnaissant du  $P'/P$  : si on pose  $P = X^n - 1$ , alors :

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \frac{P'}{P} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{X - \omega^k}$$

en notant que les  $\omega^k$  sont les racines simples de  $P$ .

### Exercice 9 [Recomposition d'éléments simples]

Notons déjà que, si on écrit cette fraction de manière irréductible sous la forme  $P/Q$ , alors  $Q = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} X - \omega = X^n - 1$  et  $\deg(P) < \deg(Q) = n$  (comme il n'y a pas de partie entière).

Mais alors on a l'écriture :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\frac{P(\omega)}{Q'(\omega)}}{X - \omega}$$

donc pour tout  $\omega \in \mathbb{U}_n$  :  $\omega^2 = \frac{P(\omega)}{n\omega^{n-1}}$ , puis  $P(\omega) = n\omega^{n+1} = n\omega$ .

Donc  $P = nX$ .

Et ainsi : 
$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega} = \frac{nX}{X^n - 1}.$$

### Exercice 10 [Multiples et diviseurs de polynômes scindés]

On procède à chaque fois par double implication :

1. Si  $P$  divise  $A$  : notons  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $PQ = A$ . Les racines de  $P$  et de  $Q$  sont exactement les mêmes racines que  $A$ . Notons  $n_1, \dots, n_r$  et  $n'_1, \dots, n'_r$  leurs multiplicités (éventuellement nulles) pour  $P$  et  $Q$ . Comme  $PQ = A$ , alors :

$$\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket, n_k + n'_k = m_k$$

et on a donc, en utilisant les degrés :

$$\deg(P) + \deg(Q) = \deg(A) = \sum_{k=1}^r m_k = \sum_{k=1}^r n_k + \sum_{k=1}^r n'_k \leq \deg(P) + \deg(Q)$$

et donc l'inégalité précédente est une égalité, ce qui impose que  $\sum_{k=1}^r n_r = \deg(P)$ , donc  $P$  est scindé (et  $Q$  aussi).

Réciproquement, si  $P$  est scindé et que toutes ses racines son racines de  $A$  de multiplicité plus petites que pour  $A$ , on peut écrire :

$$P = \beta(X - \lambda_1)^{n_1}(X - \lambda_2)^{n_2} \dots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

pour  $\beta \in \mathbb{K}^*$  et  $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$  tels que :  $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, n_i \leq m_i$ . Mais alors, en posant  $Q = \frac{\alpha}{\beta}(X - \lambda_1)^{m_1-n_1}(X - \lambda_2)^{m_2-n_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r-n_r} \in \mathbb{K}[X]$ , on a :  $A = PQ$ . Et donc  $P$  divise  $A$ .

2. Si  $A$  divise  $P$ , alors  $(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$  divise  $P$ , donc chaque  $\lambda_k$  est racine de  $P$  de multiplicité au moins  $m_k$ .

Réciproquement, si tous les  $\lambda_k$  sont racines de  $P$  de multiplicité  $n_k \geq m_k$ , alors il existe un polynôme  $Q$  tel que :

$$P = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_r)^{n_r} \cdot Q = \underbrace{(\alpha(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r})}_{=A} \left( \frac{1}{\alpha} (X - \lambda_1)^{n_1 - m_1} \dots (X - \lambda_r)^{n_r - m_r} Q \right)$$

et donc  $A$  divise  $P$ .

### Exercice 11 [Dérivées de polynômes scindés]

1. Soit  $P$  un polynôme scindé. Alors :

- si  $P$  est de degré 1 :  $P'$  est constant ; toutes ses dérivées suivantes sont nulles, donc constantes aussi, ce qui prouve le résultat dans ce cas ;
- sinon : on pose  $P = \alpha \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$ , avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$  les racines distinctes de  $P$ . Et alors :
  - par multiplicité de la racine d'une dérivée : chaque  $\lambda_k$  est racine de  $P'$  de multiplicité  $m_{k-1}$  ;
  - par théorème de Rolle : pour tout  $k \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$ ,  $P(\lambda_k) = P(\lambda_{k+1})$  donc  $P'$  possède une racine  $\mu_k \in ]\lambda_k; \lambda_{k+1}[$  (dont on ne connaît pas la multiplicité a priori).

Et la somme des multiplicités de ces racines est (au moins) de :

$$\sum_{k=1}^r (m_k - 1) + \sum_{k=1}^{r-1} 1 = \underbrace{\sum_{k=1}^r m_k}_{=\deg(P)} - r + (r - 1) = \deg(P) - 1 = \deg(P')$$

ce qui prouve que  $P'$  est scindé.

On déduit par récurrence (en appliquant ce résultat à  $P'$ ) que toutes les dérivées de  $P$  sont scindées.

2. Soit  $P$  scindé à racines simples : le même raisonnement que ci-dessus montre que, entre deux racines consécutives de  $P$ ,  $P'$  possède une racine. Le nombre des racines de  $P$  étant égal à son degré (il est scindé à racines simples), on déduit qu'il en est de même pour  $P'$ , qui est donc scindé à racines simples. On conclut comme précédemment par récurrence.

### Exercice 12 [Racines réelles et coefficients]

Soit  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$  dont toutes les racines sont réelles.

1. C'est l'exercice précédent.
2. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les racines de  $P$ . Alors on a la réduction en éléments simples :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - \lambda_k}$$

Et donc, avec les notations de l'énoncé, la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  est donnée par :

$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k}$$

et est donc dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée :

$$f' : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{-1}{(x - \lambda)^k} < 0$$

mais par dérivée d'un quotient, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, f'(x) = \frac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} < 0$$

et comme  $P(x) > 0$  pour ces valeurs de  $x$ , on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, (P'(x))^2 - P''(x)P(x) > 0$$

et la continuité de  $x \mapsto (P'(x))^2 - P''(x)P(x)$  sur  $\mathbb{R}$  (c'est une fonction polynomiale) permet, par passage à la limite, d'avoir l'inégalité large sur  $\mathbb{R}$  entier.

3. L'inégalité précédente est valable aussi pour les dérivées de  $P$  (qui sont scindées à racines simples). En l'appliquant à  $P^{(k-1)}$  et en évaluant en 0, il vient directement :

$$((k!)a_k)^2 - ((k-1)!a_{k-1})((k+1)!a_{k+1}) \geq 0$$

ce qui donne :

$$a_k^2 \geq \frac{(k-1)!(k+1)!}{(k!)^2} a_{k-1}a_{k+1} = \frac{k+1}{k} a_{k-1}a_{k+1} \geq a_{k-1}a_{k+1}$$

et on a bien l'inégalité voulue.

### Exercice 13 [Polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$ ]

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ .

- Notons  $a_0, \dots, a_n$  les coefficients de  $P$ . Alors :
  - $P$  étant à racines simples, si 0 est racine de  $P$  (ce qui veut dire  $a_0 = 0$ ), alors 0 n'est pas racine de  $P'$ , donc  $a_1 \neq 0$  ;
  - les dérivées successives de  $P$  sont aussi à racines simples : si l'un des  $a_k$  est nul, ce qui veut dire que 0 est racine de  $P^{(k)}$ , alors 0 n'est pas racine de  $P^{(k+1)}$  donc  $a_{k+1} \neq 0$ .

Et on a bien le résultat demandé.

- Si  $\alpha$  est une racine de  $Q = P^2 + 1$ , alors  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Mais  $Q' = 2PP'$  a toutes ses racines dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $\alpha$  n'est pas racine de  $Q'$ . Donc  $\alpha$  est racine simple.

### Exercice 14 [Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ ]

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

- si  $\alpha = 0$  :  $P + \alpha P' = P$  est scindé ;
- sinon : posons  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  : alors  $f : x \mapsto P(x)e^{\beta x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par produit, avec :

$$f' : x \mapsto P'(x)e^{\beta x} + \beta P(x)e^{\beta x} = \beta (P(x) + \alpha P'(x)) e^{\beta x}$$

et en particulier les racines de  $Q = P + \alpha P'$  sont exactement les points critiques de  $f$ . Mais on a également que les points d'annulation de  $f$  sont les racines de  $P$ , et que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$  (si  $\beta < 0$ ) ou en  $-\infty$  (si  $\beta > 0$ ) par croissances comparées. Par théorème de Rolle (version classique et version limite), on déduit que  $f$  possède un point critique (strictement) entre deux racines consécutives de  $P$ , et une autre hors des racines.

Comme toute racine de  $P$  de multiplicité  $m \geq 2$  est également racine de  $P'$ , donc de  $Q$ , de multiplicité  $(m-1)$ , on retrouve comme dans l'exercice 11 que  $Q$  possède autant de racines que son degré : donc  $Q$  est scindé.