Feuille d'exercices n^{o}23 : Dénombrement et probabilités

Exercice 1 [Un principe des tiroirs]

Par l'absurde : si pour tout $i \neq j$ on a $|x_i - x_j| \geqslant \dfrac{1}{n}$ alors en les renumérotant par ordre croissant on a $0 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ puis par télescopage :

$$1 > x_n - x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

d'où la contradiction.

Les x_k de l'énoncé sont tous dans $[0;1[$. Il existe donc $l \neq k$ tels que $|x_k - x_l| < \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire :

$$|(k-l)x - (\lfloor kx \rfloor - \lfloor lx \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

et ainsi $q = |k - l|$ et $p = \lfloor kx \rfloor - \lfloor lx \rfloor$ conviennent.

Exercice 2 [Et un autre principe des tiroirs]

1. $\dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \tan(\alpha - \beta)$

2. Considérons a, b, c ces trois réels, qu'on écrit $a = \tan(\alpha), b = \tan(\beta), c = \tan(\gamma)$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in [0;\pi/2[$. Par principe des tiroirs, deux des réels α, β, γ sont dans $[0;\pi/4[$ ou dans $[\pi/4, \pi/2[$ donc éloignés au plus de $\pi/4$ (strictement). On peut supposer qu'il s'agit de $\alpha > \beta$ et on a alors :

$$\frac{a-b}{1+ab} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \tan(\alpha - \beta) \in]\tan(0), \tan(\pi/4)[=]0;1[.$$

3. Par formule de duplication, on trouve que $\tan(\pi/12)$ est racine du polynôme $X^2 + 2\sqrt{3}a - 1$ donc vaut $\pm 2 - \sqrt{3}$. Ce qui donne, avec le signe : $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$.

   Même principe qu'au-dessus ensuite : on écrit tous les éléments sous la forme $\tan(a_i)$, et deux des a_i sont éloignés au plus de $\pi/12$ (strictement). Si on note ces éléments $\alpha > \beta$ on trouve :

$$\frac{x-y}{1+xy} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \tan(\alpha - \beta) \in]\tan(0), \tan(\pi/12)[=]0; 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 3 [Tirages de cartes]

On considère un jeu de 32 cartes. On en tire simultanément 8 cartes. Donner le nombre de tirages :

1. en tout : $\binom{32}{8}$
2. contenant les 4 as : $\binom{28}{4}$
3. contenant au moins un cœur ou une dame : $\binom{32}{8} - \binom{21}{8}$
4. ne contenant pas plus de deux couleurs : $\binom{4}{2}\binom{16}{8} - 2 \cdot 4$.
5. contenant exactement 4 trèfles dont la dame : $\binom{7}{3}\binom{24}{4}$
6. ne contenant pas de cœur : $\binom{24}{8}$

7. contenant au plus 3 carreaux : $\sum_{k=0}^{3} \binom{8}{k}\binom{24}{8-k}$

Exercice 4 [Dénombrements de parties d'un ensemble]

On considère E ensemble fini de cardinal n. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :

1. $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$: 2^n (on prend $A \in \mathcal{P}(E)$ quelconque et $B = \overline{A}$) ;
2. $A \cap B = \emptyset$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$ (on prend $A \in \mathcal{P}(E)$ quelconque et $B \in \mathcal{P}(\overline{A})$) ;
3. $A \cup B = E$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$ (on prend $A \in \mathcal{P}(E)$ quelconque et $B = A \cup C$ pour $C \in \mathcal{P}(\overline{A})$) ;
4. $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cup B = E$: $3^n + 3^n - 2^n = 2 \cdot 3^n - 2^n$ (avec les questions précédentes).

Exercice 5 [Une fourmi le long d'un mur]

Il y a 2^n chemins : tous finissent sur un élément $k \in [\![-n; n]\!]$ et le nombre de chemin arrivant en k est : 0 si k et n n'ont pas même parité, et $\binom{n}{\frac{n-k}{2}}$ sinon.

Exercice 6 [Le quatrième tirage]

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On s'intéresse au nombre K_n^p de n-uplets $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_1 + \dots + a_n = p$.

1. Dans le n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$, le nombre a_i correspond au nombre de boules placées dans la i-ème urne.
2. (a) $K_1^p = 1$: il n'y a que a_1, qui vaut donc p

   $K_2^p = p + 1$: on veut $a_1 + a_2 = p$, donc a_1 prend toutes les valeurs entre 0 et p et a_2 vaut alors $p - a_1$.

   $K_n^0 = 1$: si la somme des a_i vaut 0, alors tous les a_i valent 0

   $K_n^1 = n$: la somme des a_i vaut 1 donc l'un des a_i vaut 1 et tous les autre 0

   $K_n^2 = n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$: pour que la somme des a_i fasse 2, il faut soit que l'un des a_i vaille 2 et les autres 0 (n possibilités) ou que deux des a_i vaillent 1 et les autres 0 ($\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ possibilités).

   (b) On cherche à déterminer toutes les possibilités sur $(a_1, \dots, a_{n+1})$ pour que $a_1 + \dots + a_{n+1} = p+1$. On a deux possibilités (disjointes) :

   - ou bien $a_{n+1} \neq 0$: alors $a_{n+1} > 0$ et on peut écrire :

     $$a_1 + \dots + a_n + (a_{n+1} - 1) = p$$

     en retranchant 1.

     Ce qui fait K_{n+1}^p possibilités en raisonnant sur les $(n+1)$-uplets $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1} - 1)$;
   - ou bien $a_{n+1} = 0$: et alors $a_1 + \dots + a_n = p + 1$ et on a K_n^{p+1} possibilités ;

   et on a bien le résultat par union disjointe.

   (c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

   $$\mathcal{P}(n) : \forall p \in \mathbb{N},\ K_n^p = \binom{n+p-1}{n-1}.$$

   - initialisation : on a montré que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $K_1^p = 1$, et comme $\binom{1+p-1}{1-1} = \binom{p}{0} = 1$, on a bien le résultat pour $n = 1$.

- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors par télescopage :

$$K_{n+1}^{p} - K_{n+1}^{0} = \sum_{k=0}^{p-1} \left(K_{n+1}^{k+1} - K_{n+1}^{k}\right) \overset{2)b)}{=} \sum_{k=0}^{p-1} K_{n}^{k+1} \overset{HR}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+k}{n-1}$$

$$\overset{Pascal}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+k+1}{n} - \binom{n+k}{n} \overset{telescopage}{=} \binom{n+p}{n} - 1$$

  et comme $K_{n+1}^{0} = 1$, on a bien :

$$K_{n+1}^{p} = \binom{n+p}{n} = \binom{(n+1)+p-1}{(n+1)-1}$$

  ce qui conclut l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 7 [Polygones et diagonales]

Chaque sommet est relié à deux sommets de manière directe. Dans un polygone à n sommets, chaque sommet possède $n-3$ diagonales. Mais comme chaque diagonales relie deux sommets, cela fait en tout : $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Un polygone à n sommets possédant n côtés, on cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{n(n-3)}{2} = n$$

qui a pour solutions 0 (discutable) ou 5.

Exercice 8 [Probabilité et proportionnalité]

On veut : $\mathbb{P}(\{k\} = \alpha k$ pour un $\alpha > 0$. Par normalisation, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = 1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha k = \alpha \frac{n(n+1)}{2}$$

et donc $\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

Et un tel α fournit bien une distribution de probabilités, donc on a une probabilité.

Pour la seconde version, on écrit $\mathbb{P}(\{k\}) = \beta k^2$ et on trouve $\beta = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 9 [Presque des événements élémentaires]

On pose $\mathbb{P}(a) = \alpha, \mathbb{P}(b) = \beta, \mathbb{P}(\{c\}) = \gamma$. Alors on veut :

$$\alpha + \beta = x,\ \beta + \gamma = y,\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } \alpha, \beta, \gamma \in [0;1]$$

donc $x, y \in [0;1]$ et $x + y = 1 + \beta \in [1;2]$.

Et finalement $x, y \in [0;1]$ et $x + y \geqslant 1$. Et en effet on peut alors poser :

$$\beta = (x+y) - 1, \alpha = x - \beta = 1 - y, \gamma = y - \beta = 1 - x$$

qui sont bien dans $[0;1]$ et vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$ donc donnent une distribution de probabilité.

Exercice 10 [Probabilité d'une intersection 1]

Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on a déjà par croissance $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$ (elle est plus petite que chacune).

Par définition d'une probabilité, on a aussi $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$.

Reste à montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$: mais on a directement :

$$1 \geqslant \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

Exercice 11 [Mélange de lettres]

On dénombre les lettres : 3 A, 2 M et 1 N,G,R,E. On a donc :

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240$$

écritures différentes.

Le nombre de mélanges de lettres est $9! = 362880$, tandis que 6 mélanges donnent le bon mot, donc une probabilité de $\dfrac{6}{9!} = \dfrac{1}{60480}$.

Exercice 12 [S'habiller dans le noir]

On a en tout $\binom{20}{4}$ tirages équiprobables. Il suffit de dénombrer les tirages réalisant les événements considérés :

1. deux paires : $\binom{10}{2}$ tirages (il suffit de déterminer les paires tirées) donc probabilité de : $\dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{3}{323}$;
2. au moins une paire : on passe au complémentaire, qui a $\binom{10}{4}2^4$ possibilités, donc probabilité de $1 - \dfrac{\binom{10}{4}2^4}{\binom{20}{4}} = \dfrac{99}{323}$
3. une seule paire : on fait la différence des deux ce qui donne $\dfrac{99}{323} - \dfrac{3}{323} = \dfrac{96}{323}$.

   Autre méthode : de manière directe on a $\binom{10}{1}\binom{9}{2}2^2$ possibilités.

Exercice 13 [Toutes les faces d'un dé]

Chaque face est tombée une seule fois. Donc chaque face qui tombe est différente de toutes celles tombées avant. On a donc une probabilité de $\dfrac{n-k+1}{n}$ d'avoir une issue favorable au k-ème lancer, et donc une probabilité d'issue finale de :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} = \prod_{l=1}^{n} \frac{l}{n} = \frac{n!}{n^n}.$$

Autre méthode : les n^n lancers sont équiprobables, et si on ne veut pas de répétitions cela revient à faire une permutation des numéros des faces, et donc $n!$

Exercice 14 [Double lancer]

On a une équiprobabilité entre les $6 \times 6 = 36$ lancers. Il suffit de compter les possibilités :

1. on fait un double : 6 possibilités donc une probabilité de $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

2. on fait un double 6 : une seule possibilité donc une probabilité de $\dfrac{1}{36}$
3. on fait au moins un 6 : on passe par le complémentaire, qui a 25 possibilités, donc 11 possibilités pour l'événement et une probabilité de $\dfrac{11}{36}$
4. la somme des chiffres est un nombre premier : les montants premiers possibles sont 2, 3, 5, 7, 11 qui correspondent respectivement à 1, 2, 4, 6 et 3 possibilités, donc 16 possibilités en tout et une probabilité de $\dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$
5. le montant d'un dé ou la somme des montants vaut 6 ; les deux événement sont incompatible (si un dé vaut 6, la somme vaut au moins 7) donc on a directement $11 + 5 = 16$ possibilité, donc une probabilité de $\dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$
6. les chiffres sont de parité opposée : on peut faire tous les bilans pairs/impairs possibles, ou voir que, étant donné un dé, le second a une chance sur deux d'être de parité opposée, donc une probabilité de $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 15 [Triple lancer]

Pour faire 10, on peut faire les lancers suivants :

$$(6,3,1),(6,2,2),(5,4,1),(5,3,2),(4,4,2),(4,3,3)$$

qui, avec permutations, donnent respectivement $6,3,6,6,3,3$ possibilités donc 27 possibilités en tout.

Pour faire 9, on peut faire les lancers suivants :

$$(6,2,1),(5,3,1),(5,2,2),(4,4,1),(4,3,2)$$

qui, avec permutations, donnent respectivement $6,6,3,3,6$ possibilités donc 24 possibilités.

Et donc la probabilité de faire 10 est plus grande que celle de faire 9.

En moyenne, un dé a un montant de 3.5, donc la somme moyenne des montants est de 10.5 : on est (comme pour deux dés) sur une distribution qui décroit quand on s'éloigne de la moyenne, donc c'est normal d'avoir une probabilité plus faible pour 9 que pour 10

Exercice 16 [Le paradoxe des anniversaires]

On raisonne avec le complémentaire : il y a $A_{365}^{46} = \binom{365}{46} \cdot 46!$ possibilités pour que les anniversaires soient tous différents. Donc une probabilité associée de :

$$\frac{A_{365}^{46}}{365^46} \simeq 0.05$$

donc une probabilité de 95% (environ) que deux élèves aient le même anniversaire dans une classe de 46 élèves.

Exercice 17 [Non transitivité dans un lancer de dés]

On note respectivement a,b,c,d les montants donnés par les dés A,B,C,D. On décompose chaque événements en union disjointe (formule des probabilités totales) :

- $a > b = [a = 4 \cap b = 3]$ de probabilité $\dfrac{2}{3} \cdot 1 = \dfrac{2}{3}$;
- $a > c = [a = 4 \cap c = 2]$ de probabilité $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$;

- $a > d = [a = 4 \cap d = 1]$ de probabilité $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$;
- $b > c = [b = 3 \cap c = 2]$ de probabilité $1 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$;
- $b > d = [b = 3 \cap d = 1]$ de probabilité $1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;
- $c > d = [c = 2 \cap d = 1] \cup [c = 6 \cap d = 1] \cup [c = 6 \cap d = 5]$ de probabilité $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$;

On remplit les cases du tableau suivant avec la probabilité que $x > y$ pour x et y qui valent respectivement a, b, c, d. Et on calcule les autres probabilités que ci-dessus en passant au complémentaire (comme deux dés différents ne peuvent avoir le même montant) :

$x \backslash y$	a	b	c	d
a		2/3	4/9	1/3
b	1/3		2/3	1/2
c	5/9	1/3		2/3
d	2/3	1/2	1/3	

On raisonne par formule des probabilités totales :

- si le premier dé est le dé A : la probabilité de faire un meilleur lancé est :
$$p_A = \frac{1}{3} \left(\mathbb{P}(a > b) + \mathbb{P}(a > c) + \mathbb{P}(a > d) \right) = \frac{13}{27}.$$
- si le premier dé est le dé B : la probabilité de faire un meilleur lancé est :
$$p_B = \frac{1}{3} \left(\mathbb{P}(b > a) + \mathbb{P}(b > c) + \mathbb{P}(b > d) \right) = \frac{1}{2}.$$
- si le premier dé est le dé C : la probabilité de faire un meilleur lancé est :
$$p_C = \frac{1}{3} \left(\mathbb{P}(c > a) + \mathbb{P}(c > b) + \mathbb{P}(c > d) \right) = \frac{14}{27}.$$
- si le premier dé est le dé D : la probabilité de faire un meilleur lancé est :
$$p_D = \frac{1}{3} \left(\mathbb{P}(d > a) + \mathbb{P}(d > b) + \mathbb{P}(d > c) \right) = \frac{1}{2}.$$

Donc le dé C est meilleur.

Exercice 18 [Lancer répété d'un dé]

On passe au complémentaire : la probabilité, en lançant un dé n fois, de ne jamais faire de 6 est de $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$. On veut que cette probabilité soit plus petite que $\dfrac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exp(n \ln(5/6)) < 1/2 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(1/2)}{\ln(5/6)} = \frac{\ln(2)}{\ln(6) - \ln(5)} \simeq 3.8 \Leftrightarrow n \geqslant 4$$

donc il faut faire au moins 4 lancés.

Même méthode pour deux dés pour faire un double 6. On a :

$$\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exp(n \ln(35/36)) < 1/2 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(1/2)}{\ln(35/36)} = \frac{\ln(2)}{\ln(36) - \ln(35)} \simeq 24.6 \Leftrightarrow n \geqslant 25$$

donc il faut faire au moins 25 lancés.

Exercice 19 [Gagner à la loterie]

On évalue les probabilités de perdre :

- avec 10 tickets sur un tirage, la probabilité de perdre est de :

$$p_1 = \frac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{90 \cdot 89 \cdot \dots \cdot 81}{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 91};$$

- avec 1 ticket lors de 10 tirages, la probabilité de perdre est de :

$$p_2 = \left(\frac{\binom{99}{10}}{\binom{100}{10}} \right)^{10} = \left(\frac{99 \cdot \dots \cdot 90}{100 \cdot \dots 91} \right)^{10} = \left(\frac{90}{100} \right)^{10} = \frac{90 \cdot 90 \cdot \dots \cdot 90}{100 \cdot 100 \cdot \dots \cdot 100}.$$

Mais pour tout $k \in [\![1;9]\!]$ on a :

$$\frac{90-k}{100-k} = \frac{100-k-10}{100-k} = 1 - \frac{10}{100-k} < 1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$$

et par produit d'inégalités à membres positifs :

$$p_1 < p_2$$

donc en passant aux probabilités des complémentaires : $1 - p_1 > 1 - p_2$.

La stratégie d'acheter 10 tickets lors d'un seul tirage est meilleure !

Exercice 20 [Quelques transferts]

On détermine à chaque fois $X(\Omega)$, puis on regroupe les probabilités :

- si X suit une loi uniforme sur $[\![1;20]\!]$: $Y = \sqrt{X}$ est à valeurs dans $[\![1;4]\!]$. Et on a :

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3}{10},\ \mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(4 \leqslant X \leqslant 8) = \frac{5}{20},$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(9 \leqslant X \leqslant 15) = \frac{7}{20} \text{ et } \mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(16 \leqslant X \leqslant 20) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

- si X suit une loi uniforme sur $[\![1;6n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : $Z = \cos\left(\frac{\pi X}{3}\right)$ est à valeurs dans $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$. Et on a :

$$\mathbb{P}(Z=1/2) = \mathbb{P}(X \equiv \pm 1[6]) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(Z=-1/2) = \mathbb{P}(X \equiv \pm 2[6]) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X \equiv 0[6]) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(Z=-1) = \mathbb{P}(X \equiv 3[6]) = \frac{1}{6}.$$

Exercice 21 [Répétition d'une expérience]

On a $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

On a directement $\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n$ (l'expérience fait n échecs).

Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1 \text{ échecs}} \cdot \underbrace{p}_{\text{réussite}}.$$

Exercice 22 [Minimum et maximum]

On note A, B les montants de boules tirées. On a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(A=k)=\mathbb{P}(B=k)=\frac{1}{n}.$$

Par définition d'un max :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X \leqslant k)=\mathbb{P}((A \leqslant k) \cap (B \leqslant k))=\mathbb{P}(A \leqslant k)\cdot\mathbb{P}(B \leqslant k)=\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

avec une formule valable aussi pour $k=0$. Et par union disjointe :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X \leqslant k)-\mathbb{P}(X \leqslant k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2=\frac{2k-1}{n^2}.$$

et par définition d'un min :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(Y \geqslant k)=\mathbb{P}((A \geqslant k) \cap (B \geqslant k))=\mathbb{P}(A \geqslant k)\cdot\mathbb{P}(B \geqslant k)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2$$

avec une formule valable aussi pour $k=n+1$. Et par union disjointe :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Y \geqslant k)-\mathbb{P}(Y \geqslant k+1)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2-\left(\frac{n-k}{n}\right)^2=\frac{2n-2k+1}{n^2}.$$

On vérifie la normalisation dans les deux cas en reconnaissant des sommes arithmétiques.

Exercice 23 [Mort et vie d'une machine à café]

Par formule des probabilités totales, on a :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ p_{j+1}=ap_j+(1-b)(1-p_j)=(a+b-1)p_j+(1-b).$$

Et donc la suite (p_j) est une suite arithmético-géométrique. Et comme $a,b \in]0;1[$ on a $a+b-1 \neq 1$ et on a la méthode générale pour les suites arithmético-géométriques. On a :

$$l=(a+b-1)l+(1-b) \Leftrightarrow l=\frac{1-b}{2-a-b}$$

et donc $(q_j)=(p_j-\dfrac{1-b}{2-a-b})$ est géométrique de raison $(a+b-1)$ et de premier terme $q_0=p_0-\dfrac{1-b}{2-a-b}=1-\dfrac{1-b}{2-a-b}=\dfrac{1-a}{2-a-b}$. D'où finalement :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ p_j=(a+b-1))^j\frac{1-a}{2-a-b}+\frac{1-b}{2-a-b}.$$

Exercice 24 [Déformation d'une rumeur]

Même méthode qu'à l'exercice précédent. Si on note p_j la probabilité que la j-ème personne ait la bonne information. Par formule des probabilités totales, on a :

$$\forall j \in [\![0;n-1]\!],\ p_{j+1}=p\cdot p_j+(1-p)\cdot(1-p_j)=(2p-1)p_j+(1-p)$$

et on a par même méthode :

$$\forall j \in [\![0;n]\!],\ p_j=(2p-1))^j\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

et avec $j=n$, la probabilité cherchée est : $\dfrac{(2p-1)^n+1}{2}$.b

Exercice 25 [Étude du comportement d'un cochon d'Inde]

1. Par formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} m_{n+1} & = & \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{4}d_n + \frac{1}{4}b_n \\ d_{n+1} & = & \frac{3}{4}d_n + \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}m_n \end{array} \right.$$

donc $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

2. On trouve $4M^3 - 5M^2 = -M$. Donc le polynôme $P = 4X^3 - 5X^2 + X$ annule M. On va exprimer toutes les puissances d'exposant strictement positif de M comme combinaison linéaire de M et M^2. On va construire récursivement des suites $(a_n)_{n \geqslant 1}, (b_n)_{n \geqslant 1}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ M^n = a_n M + b_n M^2.$$

- pour $n = 1$: $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent ;
- pour $n = 2$: $a_2 = 0$ et $b_2 = 1$ conviennent ;
- soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $M^n = a_n M + b_n M^2$. Alors :

$$M^{n+1} = M^n \cdot M = (a_n M + b_n M^2) \cdot M = a_n M^2 + b_n M^3 = -\frac{b_n}{4} M + \left(\frac{5b_n}{4} + a_n \right) M^2$$

donc $a_{n+1} = -\frac{b_n}{4}$ et $b_{n+1} = \frac{5b_n}{4} + a_n$ conviennent, ce qui conclut la récurrence.

On cherche donc $(a_n), (b_n)$ qui vérifient les premiers termes et la relation ci-dessus. En réinjectant, on trouve :

$$a_{n+2} = -\frac{b_{n+1}}{4} = -\frac{5b_n}{16} - \frac{a_n}{4} = \frac{5}{4}a_{n+1} - \frac{a_n}{4} \text{ et } b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{b_n}{4}$$

donc on est ramené à déterminer deux suites linéaires récurrentes d'ordre 2, de polynôme caractéristique :

$$X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X-1)(X-1/4)$$

donc a_n et b_n sont de la forme :

$$a_n = \lambda + \frac{\mu}{4^n} \text{ et } b_n = \alpha + \frac{\beta}{4^n}$$

et avec les conditions initiales on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = -\frac{1}{3} + \frac{16}{3 \cdot 4^n} \text{ et } b_n = \frac{4}{3} - \frac{16}{3 \cdot 4^n}.$$

3. Avec la question 1 on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$C_n = M^n C_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on cherche donc la première colonne de M^n.

Par la 2, on a :

$$M^n = a_n M + b_n M^2$$

dont la première colonne est donc :

$$C_n = a_n \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 3/8 \\ 3/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

et en utilisant que $a_n \to -\dfrac{1}{3}$ et $b_n \to \dfrac{4}{3}$, on déduit que :

$$C_n \to \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

et donc en moyenne, en fin de journée, Croquette passe la moitié de son temps à dormir, un tiers à manger, et un sixième à boire.

Exercice 26 [Culpabilité conditionnelle]

On note les événements suivants :

- C ="l'accusé est coupable" ;
- J_i ="le juré i déclare l'accusé coupable".

Les hypothèses sont :

- pour les valeurs des probabilités :

$$\mathbb{P}(C) = 0.6,\ \mathbb{P}_C(J_1) = \mathbb{P}_C(J_2) = 0.7 \text{ et } \mathbb{P}_{\overline{C}}(J_1) = \mathbb{P}_{\overline{C}}(J_2) = 0.2;$$

- pour l'indépendance :

$$\mathbb{P}_C(J_1 \cap J_2) = \mathbb{P}_C(J_1) \cdot \mathbb{P}_C(J_2) \text{ et } \mathbb{P}_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2) = \mathbb{P}_{\overline{C}}(J_1) \cdot \mathbb{P}_{\overline{C}}(J_2)$$

Par formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{J_1 \cap J_2}(\overline{C}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2) \cdot \mathbb{P}(\overline{C})}{\mathbb{P}(J_1 \cap J_2)}$$

et avec les hypothèses :

- $\mathbb{P}_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2) = \mathbb{P}_{\overline{C}}(J_1)\mathbb{P}_{\overline{C}}(J_2) = 0.04$;
- $\mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \mathbb{P}(C) = 0.4$;
- $\mathbb{P}(J_1 \cap J_2) = \mathbb{P}_C(J_1 \cap J_2)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2)\mathbb{P}(\overline{C}) = 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = 0.31$

Et finalement :

$$\mathbb{P}_{J_1 \cap J_2}(\overline{C}) = \frac{0.04 \cdot 0.4}{0.31} \simeq 0.0516 = 5.16\%.$$

Exercice 27 [Détection de dé truqué]

Par formule de Bayes : on définit l'événement T ="le dé est truqué" et X la variable aléatoire du nombre de 1 et on a :

$$\mathbb{P}_{X=n}(T) = \frac{\mathbb{P}_T(X=n) \cdot \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(X=n)}$$

où $\mathbb{P}_T(X=n) = \binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}}$ (comportement analogue à une loi binomiale), $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}$ (il y a deux dés) et par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}_T(X=n) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\overline{T}}(X=n) \cdot \mathbb{P}(\overline{T}) = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}} = \binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}}$$

et après simplification :

$$\mathbb{P}_{X=n}(T) = \frac{1}{2}.$$

Avec $N \in \mathbb{N}^*$ dés dont un seul était truqué, les probabilités deviennent $\mathbb{P}_T(X=n) = \binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}}$ (comportement analogue à une loi binomiale), $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{N}$ (il y a deux dés) et par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}_T(X=n) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\overline{T}}(X=n) \cdot \mathbb{P}(\overline{T}) = \frac{1}{N}\binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}} + \frac{N-1}{N}\binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}} = \binom{2n}{n}\frac{5^n}{6^{2n}}$$

et après simplification :

$$\mathbb{P}_{X=n}(T) = \frac{1}{N}.$$

Exercice 28 [Mauvais conducteurs]

1. Par formule des probabilités totales, cette probabilité vaut :

$$0.20 \cdot 0.05 + 0.50 \cdot 0.15 + 0.30 \cdot 0.30 = 0.175.$$

2. Par formule de Bayes, si on note les événements A ="avoir un accident dans l'année" et B ="être un bon conducteur", on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{\mathbb{P}_B(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{0.95 \cdot 0.20}{0.825} = \frac{38}{165}.$$

Exercice 29 [Le concierge alcoolique]

1. À chaque tentative, il a une chance sur 10 de réussir. Donc il peut se tromper un nombre arbitrairement grand de fois, donc $X(\omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10} = \frac{9^{k-1}}{10^k}.$$

2. Il n'essaie pas deux fois la même clé, donc $X(\Omega) = [\![1;10]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![1;10]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{11-k}{12-k} \cdot \frac{1}{11-k} = \frac{11-k}{10 \cdot (11-k)} = \frac{1}{10}$$

ce qui n'est pas trop surprenant si on se dit que la bonne clé a autant de chance d'être la première, la deuxième, etc. clé essayée.

3. On procède par formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(I, \overline{I})$ pour I l'événement "le concierge est ivre", avec les deux résultats précédents, et donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = \begin{cases} \dfrac{2}{30} + \dfrac{1}{3}\dfrac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si} \quad k \leqslant 10 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si} \quad k \geqslant 11 \end{cases}.$$

Par formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{X=6}(I) = \frac{\mathbb{P}_I(X=6)\cdot\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(X=6)} = \frac{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9^5}{10^6}}{\dfrac{2}{30}+\dfrac{9^5}{3\cdot 10^6}} = \frac{9^5}{2\cdot 10^5 + 9^5} = 59049/259049 \simeq 0.228$$

et pour 37 même pas besoin de calcul : il est nécessairement ivre !

Exercice 30 [Auto-indépendance]

Un tel événement A vérifie : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap A) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1. Et donc c'est un événement certain ou impossible. Et il est alors indépendant de tout autre événement.

Exercice 31 [Lancer de deux dés indépendants]

On calcule les probabilités des événements. On a :

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(B_k) = \begin{cases} 1/36 & \text{si} \quad k = 2 \text{ ou } 12 \\ 1/18 & \text{si} \quad k = 3 \text{ ou } 11 \\ 1/12 & \text{si} \quad k = 4 \text{ ou } 10 \\ 1/9 & \text{si} \quad k = 5 \text{ ou } 9 \\ 5/36 & \text{si} \quad k = 6 \text{ ou } 8 \\ 1/6 & \text{si} \quad k = 7 \end{cases}$$

alors que les événements $A_i \cap B_k$ ont une probabilité donnée par le tableau suivant :

	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
A_1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
A_2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
A_3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
A_4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
A_5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
A_6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

et donc on a indépendance seulement si $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B_k) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(A_i \cap B_k) = \dfrac{1}{36}$: c'est le cas seulement pour $k = 7$, et alors toute valeur de i convient.