

Feuille d'exercices n°23 : Dénombrement et probabilités

Exercice 1 [Un principe des tiroirs]

On considère $x_0, \dots, x_n \in [0; 1[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $|x_i - x_j| < \frac{1}{n}$.

En déduire que, si $x \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que : $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$ (on pourra regarder les éléments $x_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$).

Exercice 2 [Et un autre principe des tiroirs]

1. Rappeler comment exprimer $\tan(\alpha - \beta)$ en fonction de $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ lorsque cela a un sens.
2. Montrer que, étant donnés trois réels positifs ou nuls distincts, on peut toujours en trouver deux, notés x et y , tels que : $0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 1$.
3. Si on prend 13 réels (quelconques) distincts, montrer que l'on peut en trouver deux x et y tels que : $0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 2 - \sqrt{3}$. On pourra commencer par calculer $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 [Tirages de cartes]

On considère un jeu de 32 cartes. On en tire simultanément 8 cartes. Donner le nombre de tirages :

1. en tout ;
2. contenant les 4 as ;
3. contenant au moins un cœur ou une dame ;
4. ne contenant pas plus de deux couleurs ;
5. contenant exactement 4 trèfles dont la dame ;
6. ne contenant pas de cœur ;
7. contenant au plus 3 carreaux.

Exercice 4 [Dénombrements de parties d'un ensemble]

On considère E ensemble fini de cardinal n . Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :

1. $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$;
2. $A \cap B = \emptyset$;
3. $A \cup B = E$;
4. $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cup B = E$.

Exercice 5 [Une fourmi le long d'un mur]

On considère une fourmi qui se déplace le long d'un mur à la recherche de nourriture. Du fait de la taille du mur par rapport à la fourmi, on pourra considérer que le mur est infini. La fourmi procède de manière suivante : à chaque seconde qui s'écoule, elle choisit un sens (gauche ou droite) et se déplace dans ce sens d'un centimètre. La suite de ses positions définit ainsi un chemin

On considère $n \in \mathbb{N}^*$: combien y a-t-il de chemins possibles pour la fourmi au bout de n secondes écoulées, quelles sont les positions auxquelles la fourmi peut se trouver à la fin du chemin, et pour chacune de ses positions combien y a-t-il de chemins qui aboutissent à cette position ?

Exercice 6 [Le quatrième tirage]

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On s'intéresse au nombre K_n^p de n -uplets $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_1 + \dots + a_n = p$.

1. Expliquer en quoi ce problème revient à compter le nombre de manière de tirer p fois des boules dans une urne contenant n boules, sans tenir compte de l'ordre et avec des remises.
2. On souhaite montrer que $K_n^p = \binom{n+p-1}{n-1}$.
 - (a) Calculer K_1^p, K_2^p pour $p \in \mathbb{N}$ et K_n^0, K_n^1, K_n^2 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ on a la relation : $K_{n+1}^{p+1} = K_{n+1}^p + K_n^{p+1}$.
 - (c) Conclure.

Exercice 7 [Polygones et diagonales]

Combien de sommets possède un polygone qui a autant de côtés que de diagonales ?

Exercice 8 [Probabilité et proportionnalité]

On considère $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer sur Ω une probabilité telle que l'événement $\{k\}$ ait une probabilité proportionnelle à k .

Même question avec une probabilité proportionnelle à k^2 .

Exercice 9 [Presque des événements élémentaires]

On considère $\Omega = \{a, b, c\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x, y \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{b, c\}) = y$.

Exercice 10 [Probabilité d'une intersection]

Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . Montrer que :

$$\max(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Exercice 11 [Mélange de lettres]

On a mélangé aléatoirement les lettres du mot ANAGRAMME. Quelle est la probabilité que l'on ait quand même écrit ANAGRAMME ? Combien de mots différents (ayant un sens ou pas) peut-on écrire ?

Exercice 12 [S'habiller dans le noir]

Dans un tiroir se trouvent dix paires de chaussettes toutes différentes. On tire au hasard 4 chaussettes. Quelles sont les probabilités d'avoir tiré :

1. deux paires ;
2. au moins une paire ;
3. une seule paire.

Exercice 13 [Toutes les faces d'un dé]

On considère un dé équilibré à n faces. On le lance n fois. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu toutes les faces ?

Exercice 14 [Double lancer]

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Donner les probabilités des événements suivants :

1. on fait un double ;
2. on fait un double 6 ;
3. on fait au moins un 6 ;
4. la somme des chiffres est un nombre premier ;
5. le montant d'un dé ou la somme des montants vaut 6 ;
6. les chiffres sont de parité opposée.

Exercice 15 [Triple lancer]

On lance simultanément trois dés équilibrés à 6 faces. Est-il plus probable que la somme des chiffres fasse 10 ou 9 ? Pouvait-on anticiper ce résultat ?

Exercice 16 [Le paradoxe des anniversaires]

Dans une classe de 46 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves aient le même anniversaire ?

Exercice 17 [Non transitivité dans un lancer de dés]

On considère quatre dés équilibrés à 6 faces, nommés A, B, C, D , dont les montants sur les faces sont : respectivement $0, 0, 4, 4, 4, 4$; $3, 3, 3, 3, 3, 3$; $2, 2, 2, 2, 6, 6$ et $1, 1, 1, 5, 5, 5$. Calculer les probabilités, pour chaque couple de dés, que la valeur du premier soit supérieure strictement à celle du second. Quelle est la probabilité qu'un dé donné fasse un meilleur lancé qu'un autre dé choisi au hasard parmi les dés restants ?

Exercice 18 [Lancer répété d'un dé]

Combien de fois faudrait-il lancer un dé équilibré à 6 faces pour obtenir un 6 avec probabilité au moins $\frac{1}{2}$? Et pour obtenir un double 6 avec deux dés équilibrés à 6 faces ?

Exercice 19 [Gagner à la loterie]

On considère une loterie avec 100 tickets, desquels on tire 10 tickets gagnants. On souhaite avoir au moins un ticket gagnant. Est-il mieux d'acheter 10 tickets à un tirage, ou 1 ticket lors de 10 tirages ?

Exercice 20 [Quelques transferts]

Si X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 20 \rrbracket$, quelle est la loi de $\lfloor \sqrt{X} \rfloor$?

Si X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 6n \rrbracket$ ($n \in \mathbb{N}^*$), quelle est la loi de $\cos\left(\frac{\pi X}{3}\right)$?

Exercice 21 [Répétition d'une expérience]

On considère une expérience aléatoire, dont le succès a probabilité $p \in [0; 1]$. On répète $n \in \mathbb{N}^*$ fois cette expérience, de manière indépendante, et on note X la variable aléatoire qui vaut 0 s'il n'y a aucun succès, et l'indice du premier succès sinon.

Déterminer la loi de X .

Exercice 22 [Minimum et maximum]

On considère une urne qui contient n boules indiscernables numérotées de 1 à n . On tire successivement et avec remise deux boules, et on considère X (resp. Y) la variable aléatoire du maximum (resp. du minimum) des deux montants.

Déterminer les lois de X et de Y . On pourra commencer par exprimer les événements $X \geq k$ et $Y \leq k$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 23 [Mort et vie d'une machine à café]

On considère une machine à café. Si un jour $j \in \mathbb{N}$ la machine fonctionne, il y a une probabilité $a \in]0; 1[$ qu'elle fonctionne au jour $j + 1$. Si en revanche elle est en panne au jour j , il y a une probabilité $b \in]0; 1[$ qu'elle reste en panne au jour $j + 1$.

Calculer la probabilité p_j pour que la machine, qui fonctionne au jour 0, fonctionne au jour j .

Exercice 24 [Déformation d'une rumeur]

On considère $n \geq 2$ personnes, qui se font passer un message. On suppose que, d'une personne à l'autre, l'information passe normalement avec probabilité $p \in]0; 1[$, ou son contraire avec probabilité $1 - p$. En considérant que le contraire du contraire est l'information de départ, quelle est la probabilité que la n -ème personne reçoive la bonne information ?

Exercice 25 [Étude du comportement d'un cochon d'Inde]

Croquette le cochon d'Inde occupe ses journées à boire, manger et dormir. Toutes les 5 minutes, il change (ou pas) d'occupation, suivant le protocole suivant :

- s'il était en train de manger : il continue de manger avec probabilité $\frac{1}{2}$, ou il va boire sinon ;
- s'il était en train de dormir : il continue de dormir avec probabilité $\frac{3}{4}$, ou il va manger sinon ;
- s'il était en train de boire : il va manger avec probabilité de $\frac{1}{4}$ ou va se coucher sinon.

Le matin, quand Croquette se réveille, il commence toujours par manger. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note m_n, d_n, b_n les probabilités que Croquette soit respectivement en train de manger, dormir, boire sur la tranche horaire entre $5n$ et $5n + 5$ minutes après son lever (de sorte que $(m_0, d_0, b_0) = (1, 0, 0)$). On note

$$C_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = MC_n$.
2. Calculer $4M^3 - 5M^2$, et en déduire les puissances de M .
3. En déduire les limites de $(m_n), (d_n), (b_n)$ en fin de journée. Que peut-on conclure sur cette journée ?

Exercice 26 [Culpabilité conditionnelle]

On considère un procès, dans lequel deux personnes, se faisant leur jugement de manière indépendantes que l'accusé soit coupable ou non, font office de jurés.

L'accusé a 60% de chances d'être coupable. S'il est coupable, chaque juré a 70% de chance de le déclarer coupable. S'il est innocent, chaque juré a 20% de chances de le déclarer coupable.

Les deux jurés déclarent l'accusé coupable : quelle est la probabilité qu'il soit non coupable ?

Exercice 27 [Détection de dé truqué]

On considère deux dés à 6 faces : l'un est équilibré, et l'autre est truqué (donnant 1 avec probabilité $\frac{5}{6}$ et équiprobabilité pour les autres montants). On choisit un dé au hasard, qu'on lance $2n$ fois, en obtenant n fois le montant 1. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit le dé truqué ?

Et si on avait $N \in \mathbb{N}^*$ dés dont un seul était truqué ?

Exercice 28 [Mauvais conducteurs]

Dans la population, on peut classer les conducteurs en trois catégories : les bons, les moyens et les mauvais, qui représentent respectivement 20%, 50% et 30% de la population, et ont respectivement des probabilités de 0,05, 0,15 et 0,30 d'avoir un accident dans l'année.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard ait un accident dans l'année ?
2. Quelle est la probabilité que quelqu'un qui n'a pas eu d'accident dans l'année soit un bon conducteur ?

Exercice 29 [Le concierge alcoolique]

Un concierge possède un trousseau de 10 clés, dont une seule ouvre la porte qu'il souhaiterait ouvrir. On note X la variable aléatoire du nombre de clés essayées. Déterminer la loi de X dans les cas suivants :

1. le concierge essaie les clés une à une, mais en oubliant à chaque fois les clés qu'il a déjà essayées ;
2. le concierge essaie les clés dans un ordre donné (et n'essaie donc pas deux fois la même clé) ;
3. le concierge a une chance sur 3 d'avoir trop bu, et procède suivant la deuxième méthode s'il est sobre, et la première sinon.

Sachant que l'on est dans la troisième situation, et que le concierge a mis 6 essais, quelle est la probabilité qu'il soit ivre ? Et pour 37 essais ?

Exercice 30 [Auto-indépendance]

Que dire d'un événement indépendant de lui-même ?

Exercice 31 [Lancer de deux dés indépendants]

On considère deux dés équilibrés à 6 faces que l'on lance. On considère $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$. Pour quelles valeurs de i et k les événements A_i = "le montant du premier dé est i " et B_k = "la somme des deux montants vaut k " sont-ils indépendants ?