

## Feuille d'exercices n°22 : Formules de Taylor et développements limités

### Exercice 1 [Manipulations de dl]

À l'aide des développements limités usuels, déterminer les développements limités des fonctions suivantes, en les points considérés et à l'ordre imposé :

1.  $\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$  (ordre 2 en 0) ;
2.  $\frac{\ln(x)}{x^2}$  (ordre 3 en 1) ;
3.  $\sin(x)$  (ordre 4 en  $\pi/4$ ) ;
4.  $\tan(x) - \sin(x)$  (ordre 4 en 0) ;
5.  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$  (ordre 3 en 0) ;
6.  $\cos(\ln(x))$  (ordre 3 en 1) ;
7.  $\ln(1+e^x)$  (ordre 3 en 0) ;
8.  $\ln(2+\sin(x))$  (ordre 3 en 0) ;
9.  $\ln(e^x + \cos(x))$  (ordre 3 en 0) ;
10.  $\sqrt{3+\cos(x)}$  (ordre 3 en 0) ;
11.  $\ln(3e^x + e^{-x})$  (ordre 3 en 0) ;
12.  $\sin(x)\tan(x)$  (ordre 3 en 0) ;
13.  $\sqrt[3]{1+x}\sqrt{1-x}$  (ordre 3 en 0) ;
14.  $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$  (ordre 4 en 0) ;
15.  $e^{\sqrt{1+x}}$  (ordre 3 en 0) ;
16.  $\ln(x)$  (ordre 4 en  $e$ ) ;
17.  $e^x$  (ordre 4 en 2) ;
18.  $\frac{1}{1+e^x}$  (ordre 3 en 0) ;
19.  $\frac{x}{e^x-1}$  (ordre 2 en 0) ;
20.  $(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin(x))$  (ordre 7 en 0) ;
21.  $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$  (ordre 4 en  $0^+$ ).

### Exercice 2 [Développement limité d'une réciproque 1]

Soit  $f : x \mapsto xe^{x^2}$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est bijective, et donner le dl 5 en 0 de  $f^{-1}$ .

### Exercice 3 [Développement limité d'une réciproque 2]

Soit  $f : x \mapsto \frac{e^x-1+2x}{3}$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est bijective, et donner le dl 3 en 0 de  $f^{-1}$ .

### Exercice 4 [Ordre d'un développement limité 1]

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $n \geq 2$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que  $f$  admet des développements limités en 0 jusqu'à un ordre que l'on précisera.

### Exercice 5 [Ordre d'un développement limité 2]

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que  $f$  admet des développements limités en 0 à tout ordre, et le donner. Interpréter ce résultat.

### Exercice 6 [Calculs de développements limités sans calculs]

En ne faisant pas trop de calculs, donner les développements limités suivants :

1. dl à l'ordre 65537 en 0 de  $\ln\left(\sum_{k=0}^{65536} \frac{x^k}{k!}\right)$  ;
2. dl à l'ordre 21589 en 0 de  $\exp\left(\sum_{k=1}^{21588} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)$ .

### Exercice 7 [Calculs d'équivalents]

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes en 0 :

1.  $x(2 + \cos(x)) - 3\sin(x)$  ;
2.  $\text{Arctan}(2x) - 2\text{Arctan}(x)$  ;
3.  $x^x - (\sin(x))^x$ .

### Exercice 8 [Calculs de limites]

À l'aide de développements limités, calculez les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$  ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$  ;
7.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$  ;
8.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(a)}$  (pour  $a > 0$  avec  $a \neq e$ ).

### Exercice 9 [Développement asymptotique d'une suite définie implicitement]

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  comme étant l'unique solution strictement positive de l'équation  $x^5 + nx - 1 = 0$ .  
 0. Montrer que  $(u_n)$  converge, vers une limite que l'on déterminera, puis que  $u_n \sim \frac{1}{n}$  et enfin que  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ .

### Exercice 10 [Calculs de développements asymptotiques]

Déterminer les développements asymptotiques en  $+\infty$  suivants :

1.  $\sqrt{1+x}$  à la précision  $x^{-3/2}$  ;
2.  $x \ln(1+x) - (x+1) \ln(x)$  à la précision  $x^{-2}$  ;
3.  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$  à la précision  $x^{-2}$  ;
4.  $\text{Arctan}(x)$  à la précision  $x^{-3}$ .

### Exercice 11 [Développement asymptotique et asymptote 1]

Soit  $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donner le développement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$  à une précision de  $\frac{1}{x}$ . En déduire l'asymptote de  $f$  en  $+\infty$  ainsi que sa position relative à celle-ci.

### Exercice 12 [Développement asymptotique et asymptote 2]

Même chose avec  $g : x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Exercice 13 [Études d'asymptotes]

Étudier les asymptotes éventuelles des fonctions suivantes aux bornes de leurs ensembles de définition :

1.  $f : x \mapsto \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}$  ;
2.  $g : x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{|x-1| + x}$  ;
3.  $h : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \text{Arctan}(x)$ .