

## Feuille d'exercices n°21 : Convexité

### Exercice 1 [Quelques inégalités de convexité]

À chaque fois les fonctions considérées sont deux fois dérivables, donc il suffit d'étudier le signe de la dérivée seconde pour avoir la convexité/concavité.

On déduit directement les inégalités en appliquant la définition de la convexité/concavité.

### Exercice 2 [Caractérisation des fonctions affines]

Si  $f$  est convexe et concave : on a deux inégalités larges inversées, qui sont donc des égalités, et donnent directement le caractère affine. La réciproque est directe en dérivant deux fois : la dérivée seconde est nulle, donc à la fois positive et négative.

Un polynôme de degré impair a pour dérivée seconde :

- la fonction nulle si son degré est 1 ;
- un polynôme de degré impair sinon.

Le premier cas redonne la situation précédente. Le second montre qu'on ne peut avoir de convexité ou concavité, comme un polynôme de degré impair n'est pas de signe constant (regarder les limites en  $\pm\infty$  par exemple).

### Exercice 3 [Combinaisons linéaires de fonctions convexes ou concaves]

Direct dans chaque cas par sommes ou multiplication par une constante d'inégalités.

### Exercice 4 [Fonction convexe croissante]

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe strictement croissante, sa limite est  $+\infty$  : pour tout  $x \geq 1$ , la courbe de  $f$  est au-dessus de sa corde entre 0 et 1, donc :

$$\forall x \geq 1, f(x) \geq x \cdot (f(1) - f(0)) + f(0)$$

et en passant à la limite à droite, on trouve par divergence par minoration :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Pour  $f$  qui n'est pas décroissante, il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$  et  $f(a) < f(b)$ . Nécessairement, on a alors  $a \neq b$  donc  $a < b$ . Et on trouve alors :

$$\forall x \geq b, f(x) \geq x \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$$

et on conclut comme ci-dessus par passage à la limite dans le membre de droite et divergence par minoration en notant que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$  avec les conditions imposées sur  $a$  et  $b$ .

### Exercice 5 [Fonction convexe bornée]

On montre la contraposée : si elle n'est pas constante, notons  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et  $f(a) \neq f(b)$  :

- si  $f(a) < f(b)$  : comme ci-dessus, on trouve :

$$\forall x \geq b, f(x) > (x - a) \cdot (f(b) - f(a)) + f(a)$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (par minoration) donc  $f$  n'est pas bornée ;

- si  $f(a) > f(b)$  : on regarde de l'autre côté :

$$\forall x \leq a, f(x) > (x - a) \cdot (f(b) - f(a)) + f(a)$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  (par minoration) donc  $f$  n'est pas bornée ;

ce qui prouve la contraposée.

### Exercice 6 [Fonction convexe et asymptotes]

On a vu que : si  $f$  n'est pas décroissante, alors elle tend vers  $+\infty$ . Et donc ici, par contraposée, comme  $f$  ne tend pas vers  $+\infty$ , alors elle est décroissante. Et donc elle est décroissante tendant vers 0 : par limite monotone, 0 est donc sa borne inférieure, donc un minorant, donc  $f$  est positive.

Si  $f$  est convexe, et  $\Delta : y = ax + b$  est une asymptote de  $f$ , alors  $g : x \mapsto f(x) - (ax + b)$  est convexe (on retranche une fonction affine, donc concave, à une fonction convexe, ce qui préserve la convexité). Et  $\lim_{x \rightarrow 0^0} g(x) = 0$  (par définition d'une asymptote). Donc par le point précédent,  $g$  est positive, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - (ax + b) \geq 0 \text{ donc } f(x) \geq ax + b$$

et donc  $f$  est bien au-dessus de son asymptote.

Et ce serait pareil en  $-\infty$  : le résultat repose sur le fait que, si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , alors  $f$  est positive (soit en appliquant le résultat précédent à  $g : x \mapsto f(-x)$ , qui est convexe ; soit en refaisant un calcul assez proche).

### Exercice 7 [Minimum d'une fonction convexe]

Soit  $a$  un minimum local de  $f$  convexe définie sur  $I$  (intervalle). Notons  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta; a + \eta], f(x) \geq f(a)$$

Soit  $b \in I$ . Par exemple si  $b > a$ . On a alors deux cas :

- si  $b \leq a + \eta$  : alors  $b \in [a - \eta; a + \eta]$  donc  $f(b) \geq f(a)$  ;
- sinon : alors  $a < a + \eta < b$  avec  $a, b \in I$  intervalle donc  $a + \eta \in I$  donc  $f(a + \eta) \geq f(a)$ . Et par inégalité des pentes :

$$0 \leq \frac{f(a + \eta) - f(a)}{\eta} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et donc  $f(b) \geq f(a)$ .

Le cas  $b < a$  se traite de même. Le cas  $b = a$  est immédiat.

Et finalement pour tout  $b \in I$  :  $f(b) \geq f(a)$ . Donc  $f$  a un minimum global en  $a$ .