Feuille d'exercices n^{o}21 : Convexité

Exercice 1 [Quelques inégalités de convexité]

Dans chaque cas, étudier la convexité des fonctions suivantes et en déduire les inégalités associées :

1. ln puis :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in]0;1[,\ x^t y^{1-t} \leqslant tx + (1-t)y;$$
2. exp puis :
$$\forall x \in [-1;1],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \exp(\lambda x) \leqslant \mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda);$$
3. $x \mapsto (1+x)^n$ (pour $n \geqslant 2$) puis :
$$\forall x \in [-1;+\infty[,\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx;$$
4. $x \mapsto \ln(\ln(x))$ puis :
$$\forall x, y \in]1;+\infty[,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)};$$

Exercice 2 [Caractérisation des fonctions affines]

Montrer que les fonctions affines sont exactement les fonctions à la fois convexe et concaves.

Montrer que ce sont aussi les seules fonctions polynomiales de degré impair à être convexes.

Exercice 3 [Combinaisons linéaires de fonctions convexes ou concaves]

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, f_1, f_2 deux fonctions convexes sur I, g_1, g_2 deux fonctions concaves sur I, $\lambda\mathbb{R}_+$ et $\mu \in \mathbb{R}_-$. Montrer que :

1. $f_1 + f_2$ est convexe et $g_1 + g_2$ est concave ;
2. $f_1 - g_1$ est convexe et $g_2 - f_2$ est concave ;
3. λf_1 est convexe et λg_2 est concave ;
4. μf_2 est concave et μg_2 est convexe ;
5. $x \mapsto \max(f_1(x), f_2(x))$ est convexe et $x \mapsto \min(g_1(x), g_2(x))$ est concave.

Exercice 4 [Fonction convexe croissante]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe strictement croissante. Que dire de la limite en $+\infty$?

Montrer qu'il en est de même si on suppose seulement que f n'est pas décroissante.

Exercice 5 [Fonction convexe bornée]

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe bornée est constante.

Exercice 6 [Fonction convexe et asymptotes]

Soit f convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive.

En déduire qu'une fonction convexe est au-dessus de ses asymptotes.

Exercice 7 [Minimum d'une fonction convexe]

Montrer qu'un minimum local d'une fonction convexe est également un minimum global.