Feuille d'exercices n^{o}20 : Polynômes : généralités

Exercice 1 [Équations en les polynômes]

1. $P\circ P=P$: si P solution : $\deg(P\circ P)=\deg(P)^2=\deg(P)$ donc $\deg(P)\leqslant 1$. On pose $P=aX+b$, et alors :

$$P\circ P=P\Leftrightarrow a(aX+b)+b=aX+b\Leftrightarrow a(a-1)X+ab=0\Leftrightarrow a(a-1)=ab=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} & a=0\\ \text{ou} & a=1 \text{ et } b=0\end{array}\right.$$

donc les solutions sont X et les polynômes constants.

2. $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$: si P est solution : $\deg(P(X^2))=2\deg(P)=\deg((X^2+1)P)=2+\deg(P)$ donc $P=0$ ou $\deg(P)=2$. Réciproquement :

- $P=0$ est solution ;
- si $P=aX^2+bX+c$, alors :

$$P \text{ solution}\Leftrightarrow aX^4+bX^2+c=(X^2+1)(aX^2+bX+c)=aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c\Leftrightarrow b=a+c=0\Leftrightarrow P$$

Donc les solutions sont les polynômes de la forme $a(X^2-1)$ pour $a\in\mathbb{K}$.

Exercice 2 [Valeurs d'un polynôme sur $\mathbb{U}$]

On considère $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in\mathbb{C}[X]$, et on pose $M=\sup\limits_{|z|=1}|P(z)|$.

1. On a directement une somme géométrique de raison ω^{j-k} :

- si $k=j$: la raison est 1 et les termes valent tous 1 donc $\sum_{l=0}^n\left(\omega^{j-k}\right)^l=\sum_{l=0}^n 1=n+1$;
- sinon : la raison est différente de 1 et par formule générale d'une somme géométrique :

$$\sum_{l=0}^n\left(\omega^{j-k}\right)^l=\frac{\omega^{(n+1)(j-k)}-1}{\omega^{(j-k)}-1}=0.$$

On remplace :

$$P(1)+\omega^{-k}P(\omega)+\cdots+\omega^{-nk}P(\omega^n)=\sum_{l=0}^n\omega^{-lk}P(\omega^l)=\sum_{l=0}^n\sum_{j=0}^n a_j\omega^{-lk}\omega^{lj}=\sum_{j=0}^n a_j\left(\sum_{l=0}^n\left(\omega^{j-k}\right)^l\right)=(n+1)a_k$$

avec le résultat précédent.

2. Par inégalité triangulaire, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$:

$$|a_k|=\frac{|P(1)+\omega^{-k}P(\omega)+\cdots+\omega^{-nk}P(\omega^n)|}{n+1}\leqslant\frac{|P(1)|+|P(\omega)|+\cdots+|P(\omega^n)|}{n+1}\leqslant\frac{(n+1)M}{n+1}=M$$

en utilisant que $|\omega^{-ik}|=1$ et $|P(\omega^i)|\leqslant M$ (par définition de M et en utilisant que $\omega^{-ik},\omega^i\in\mathbb{U}$).

Exercice 3 [Une suite de polynômes]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P_n = a_n + b_nX + c_nX^2 + X^3Q_n$ (termes de degré plus que 2 ensuite qu'on regroupe dans $Q_n \in \mathbb{R}[X]$) puis :

$$P_{n+1} = P_n^2 - 2 = \left(a_n + b_nX + c_nX^2 + X^3Q_n\right)^2 - 2 = (a_n^2-2) + (2a_nb_n)X + (b_n^2 + 2a_nc_n)X^2 + \big(2a_nQ_n + 2b_nc_n + c_n^2X$$

ce qui définit les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ par :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{ccl} a_{n+1} & = & a_n^2 - 2 \\ b_{n+1} & = & 2a_nb_n \\ c_{n+1} & = & b_n^2 + 2a_nc_n \end{array} \right.$$

et on aurait aussi $Q_{n+1} = 2a_nQ_n + 2b_nc_n + c_n^2X + 2b_nQ_nX + 2c_nQ_nX^2 + Q_n^2X^3$ mais ce n'est pas utile.

On déduit :

- (a_n) est constante de valeur -1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -1$;
- en réinjectant : (b_n) est géométrique de raison -2 : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = (-2)^{n-1}$;
- en réinjectant : $c_{n+1} = 4^{n-1} - 2c_n$ puis :

$$\frac{c_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\frac{c_n}{4^n}$$

et $l = \frac{1}{16} - l/2 \Leftrightarrow l = \frac{1}{24}$ puis $\frac{c_n}{4^n} - \frac{1}{24} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{c_1}{4^1} - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et finalement : $c_n = \dfrac{2^{n-2}}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)$.

Exercice 4 [Équations en des polynômes et leurs dérivées]

1. $P'^2 = 4P$: si P est solution, ou bien P est constant (et il vaut 0), ou bien son degré vérifie $2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$ donc $\deg(P) = 2$.

   Réciproquement : $P = 0$ est solution. Considérons $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Alors :

$$P \text{ solution} \Leftrightarrow (2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c) \Leftrightarrow 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & a^2 \\ ab & = & b \\ b^2 & = & 4c \end{array} \right. \Leftrightarrow P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$$

   donc les solutions sont 0 et les polynômes de la forme $X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4}$ $(b \in \mathbb{K})$.

2. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$: si $P \neq 0$ est solution, en notant a_nX^n (pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$) le monôme dominant de P, alors $n(n-1)a_nX^n$ est celui de $(X^2+1)P''$ et $6a_nX^n$ est celui de $6P$. On doit donc avoir $n(n-1) = 6$, donc $n = 3$.

   Réciproquement, $P = 0$ est solution. Considérons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. ALors :

$$P \text{ solution} \Leftrightarrow 0 = (X^2+1)P'' - 6P = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b - 6aX^3 - 6bX^2 - 6cX - 6d = -4bX^2 + 6(a-c)X +$$

   donc les solutions sont les polynômes de la forme $aX^3 + aX$ pour $a \in \mathbb{K}$ (le cas $a = 0$ redonne 0).

Exercice 5 [Parité de polynômes]

On dit qu'il polynôme est **pair** (resp. **impair**) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

1. Pour $P = \sum a_k X^k$, on a $P(-X) = \sum (-1)^k a_k X^k$ et donc :

$$P \text{ pair } \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = (-1)^k a_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0$$

ce qui donne la première équivalence. La seconde vient du fait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ (par formule de Taylor par exemple).

2. Pour les polynômes impairs, on a :

$$P \text{ impair } \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(2k)}(0) = 0.$$

3. Posons $Q = P(X) - P(-X)$:

   - si P est pair : $Q = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) = P(-k)$;
   - réciproquement, si $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) = P(-k)$: alors Q possède une infinité de racines (tous les entiers), donc $Q = 0$, donc P est pair.

   Le résultat pour les polynômes impairs se montre de même en posant $Q = P(X) + P(-X)$.

   C'est faux pour une fonction : prenons $f : x \mapsto \sin(\pi x)$, qui s'annule en tous les entiers, et vérifie donc bien $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = f(-k)$ (ces quantités valent 0). Mais f n'est pas paire car $f(-1/2) = -1 \neq 1 = f(1/2)$. Et on pourrait multiplier f par une fonction quelconque et avoir le même problème.

Exercice 6 [Divisibilités de polynômes]

On pose la division euclidienne à chaque fois comme on souhaite les quotients. Si on voulait seulement la divisibilité, comme on veut une divisibilité par un polynôme de la forme $X - a$, il suffit de vérifier que $P(a) = 0$ (ce qui est plus rapide).

1. $\dfrac{X^3 - 2X^2 + 3X - 2}{X - 1} = X^2 - X + 2$;
2. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + 3X - 2}{X - 2} = X^2 - X + 1$;
3. $\dfrac{X^3 + 3X^2 - 2}{X + 1} = X^2 + 2X - 2$.

Exercice 7 [Quelques divisibilités]

1. On écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de sorte que :

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k (P(X)^k - X^k) = \sum_{k=1}^n a_k (P(X)^k - X^k)$$

   et, par factorisation, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $P(X)^k - X^k = (P(X) - X)\left(\sum_{i=0}^{k-1} P(X)^i X^{k-1-i}\right)$ qui est donc divisible par $P(X) - X$.

   Par somme, $P(P(X)) - P(X)$ est divisible par $P(X) - X$.

2. Et finalement $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$ et aussi $P(X) - X$, donc il divise leur somme, donc $P(P(X)) - X$.

3. On montre par récurrence que $P(X) - X$ divise $Q_{l+1}(X) - Q_l(X)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$:

- initialisation : déjà fait avant pour $l = 1$ (et trivial pour $l = 0$) ;
- hérédité : on fixe $l \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(X) - X$ divise $Q_{l+1}(X) - Q_l(X)$. Montrons que $P(X) - X$ divise $Q_{l+2}(X) - Q_{l+1}(X)$. Par définition :

$$Q_{l+2}(X) - Q_{l+1}(X) = P(Q_{l+1}(X)) - P(Q_l(X)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(Q_{l+1}(X)^k - Q_l(X)^k\right)$$

  où chaque terme est divisible par $Q_{l+1}(K) - Q_l(X)$. Donc par $P(X) - X$. D'où l'hérédité.

D'où la récurrence.

Et on déduit le résultat par telescopage comme : $Q_l(X) - X = \sum_{k=0}^{l-1} Q_{k+1}(X) - Q_k(X)$.

Exercice 8 [Unicité de la division euclidienne]

Ce reste est de la forme $R \in \mathbb{R}_1[X]$, donc on peut l'écrire $R = a + bX$. On évalue en i la division euclidienne, ce qui donne :

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt) = a + ib$$

donc $R = \cos(nt) + X\sin(nt)$.

Pour le cas général, on trouve de même comme reste : $\cos(a_1 + \cdots + a_n) + \sin(a_1 + \cdots + a_n)X$.

Exercice 9 [Divisibilité dans les entiers et les polynômes]

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. On écrit $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$ et alors :

$$X^a = X^a - X^r + X^r = X^r(X^{bq} - 1) + X^r$$

   où $X^{bq} - 1 = (X^b - 1)(\sum_{k=0}^{q-1} X^{bk})$ est un multiple de $X^b - 1$: on a donc écrit la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$. Le reste est donc X^r.

2. On écrit $a = bq + r$ (division euclidienne). En reprenant les calculs ci-dessus, le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ est $X^r - 1$. Et donc :

$$X^b - 1 | X^a - 1 \Leftrightarrow X^r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow b|a$$

   ce qui est l'équivalence demandée.