Feuille d'exercices n^{o}20 : Polynômes : généralités

Exercice 1 [Équations en les polynômes]
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$, en commençant par étudier le degré de P :

1. $P \circ P = P$;
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 2 [Valeurs d'un polynôme sur $\mathbb{U}$]
On considère $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, et on pose $M = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$.

1. Soient $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$: $\sum_{l=0}^{n} \left(\omega^{j-k}\right)^l = 0$ ou $(n+1)$ suivant que $k \neq j$ ou $k = j$. Et en déduire que : $P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \cdots + \omega^{-nk}P(\omega^n) = (n+1)a_k$.
2. En déduire que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$: $|a_k| \leqslant M$.

Exercice 3 [Une suite de polynômes]
On considère les polynômes P_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, définis par :

$$P_1 = X - 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n, b_n, c_n respectivement les coefficients de degré $0, 1, 2$ de P_n. Calculer explicitement a_n, b_n, c_n : on pourra expliciter une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n puis montrer successivement que (a_n) est constante, (b_n) est géométrique, et $\left(\dfrac{c_n}{4^n}\right)$ est arithmético-géométrique.

Exercice 4 [Équations en des polynômes et leurs dérivées]
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$:

1. $P'^2 = 4P$;
2. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 5 [Parité de polynômes]
On dit qu'il polynôme est **pair** (resp. **impair**) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

1. Montrer que, pour $P = \sum a_kX^k$, on a les équivalences :
$$P \text{ pair } \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(2k+1)}(0) = 0.$$
2. Donner une équivalence analogue pour les polynômes impairs.
3. Montrer que P est pair (resp. impair) si, et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) = P(-k)$ (resp. $P(k) = -P(-k)$). La même condition est-elle valable pour une fonction quelconque ?

Exercice 6 [Divisibilités de polynômes]

Montrer que l'on a les relations de divisibilité suivantes et calculer les quotients correspondants :

1. $(X-1)|(X^3-2X^2+3X-2)$;
2. $(X-2)|(X^3-3X^2+3X-2)$;
3. $(X+1)|(X^3+3X^2-2)$.

Exercice 7 [Quelques divisibilités]

On considère $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-P(X)$.
2. Déduire que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.
3. Plus généralement, si $l \in \mathbb{N}^*$ et que $Q_l = \underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{l \text{ fois}}$, montrer que $P(X)-X$ divise $Q_l(X)-X$.

Exercice 8 [Unicité de la division euclidienne]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos(t)+X\sin(t))^n$ par X^2+1.

Plus généralement, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, calculer le reste de la division euclidienne de $\prod_{k=1}^{n}(\cos(a_k)+X\sin(a_k))$ par X^2+1.

Exercice 9 [Divisibilité dans les entiers et les polynômes]

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^a par X^b-1 est X^r.
2. En déduire que : $b|a \Leftrightarrow X^b-1|X^a-1$.