

# Feuille d'exercices n°1 : Logique et raisonnements

## Exercice 1 [Tables de vérité]

Immédiat (il suffit de faire les tables)

## Exercice 2 [Négation d'assertions]

1.  $A$  et  $B$  et  $C$  ;
2.  $A$  et  $B$  et  $C$  ;
3. non  $A$  et (non  $B$  ou non  $C$ ) (plus facile par table de vérité) ;
4.  $\exists x \in E, \forall y \in F, \text{non } A(x, y)$  ;
5.  $\forall y \in F, \exists x \in E, \text{non } A(x, y)$  ;
6.  $(\forall x, \text{non } A(x))$   
ou  $(\exists x_1, x_2, (A(x_1) \text{ et } A(x_2) \text{ et } x_1 \neq x_2))$

## Exercice 3 [Quantificateurs]

Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse, et le prouver :

1. vrai :  $x = y = 1$  convient ;
2. faux :  $y = -x$  est un contre-exemple ;
3. vrai :  $y = -x + 1$  convient ;
4. faux :  $x = y = 0$  est un contre-exemple.

## Exercice 4 [Implications et contraposées]

1. Implication : si un nombre est impair, alors il n'est pas la somme de deux nombres impairs.  
Contraposée : si un nombre est la somme de deux nombres impairs, alors il est pair.  
Preuve : soient  $a = 2n+1, b = 2m+1$ , avec  $n, m \in \mathbb{Z}$ , deux nombres impairs. Alors :  $a+b = 2 \times (n+m+1)$  est pair.
2. Implication : un nombre premier est strictement plus grand que 2, alors il est impair.  
Contraposée : si un nombre premier est pair, alors il est inférieur ou égal à 2.  
Preuve : soit  $p$  premier pair. Alors  $p$  est seulement divisible par 1 et par  $p$ , et  $p$  est divisible par 2. Donc  $p = 2$ . Donc  $p \leq 2$ .
3. Implication : c'est l'énoncé.  
Contraposée : si  $m, n$  sont deux entiers impairs tels que  $m$  divise  $2n$ , alors  $m$  divise  $n$ .  
Preuve : on écrit  $m = 2a+1$  et  $n$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Il existe  $c$  tel que  $c \times m = 2n$ , c'est-à-dire :  $2ac+c = 2n$ . Donc  $c = 2n - 2ac$  est pair. On écrit  $c = 2b$ . Alors :  $2bm = 2n$ , donc  $bm = n$  et  $m$  divise bien  $n$ .

## Exercice 5 [Raisonnements direct]

1. Si  $x = \frac{p}{q}$  et  $y = \frac{p'}{q'}$  sont deux rationnels, alors :  $x + y = \frac{pq' + p'q}{qq'}$  est un rationnel.
2. Si  $n$  est un entier impair, on écrit  $n = 2k + 1$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Alors :  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$  est impair.

## Exercice 6 [Raisonnements par disjonction de cas]

1. — si  $x \geq 1$  :  $|x - 1| = x - 1$ . On veut montrer que  $x^2 - x + 1 \geq x - 1$ . Et  $x^2 - x + 1 - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ . Donc le résultat est vrai et il n'y a pas d'égalité possible.

— si  $x \leq 1$  :  $|x - 1| = 1 - x$ . On veut montrer que  $x^2 - x + 1 \geq 1 - x$ . Et  $x^2 - x + 1 - (1 - x) = x^2 \geq 0$  avec égalité si  $x = 0$ .

On a donc bien l'inégalité, avec égalité si, et seulement si,  $x = 0$ .

2. — si  $n$  est pair :  $n = 2m$  donc  $n^2 + 3n + 1 = 4m^2 + 6m + 1 = 2 \times (2m^2 + 3m) + 1$  est impair ;
- si  $n$  est impair :  $n = 2m + 1$  donc  $n^2 + 3n + 1 = 4m^2 + 4m + 1 + 6m + 3 + 1 = 2 \times (2m^2 + 5m + 2) + 1$  est impair.
3. — si  $x \leq -1$  : l'équation devient  $-x - 1 = 3 - (2 - 3x)$  et n'a pas de solution pour  $x \leq -1$  ;
- si  $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$  : l'équation devient  $x + 1 = 3 - (2 - 3x)$  et a 0 pour seule solution ;
- si  $x \geq \frac{2}{3}$  : l'équation devient  $x + 1 = 3 - (3x - 2)$  et a 1 comme seule solution.

Donc les solutions sont 0 et 1.

### Exercice 7 [Un raisonnement par disjonction de cas plus poussé]

1.  $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ .
2. Si  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est rationnel :  $x = y = \sqrt{2}$  convient.
3. Si  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est irrationnel :  $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  et  $y = \sqrt{2}$  convient.
4.  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est soit rationnel, soit irrationnel. Donc on a bien une solution.

### Exercice 8 [Raisonnements par contraposition ou par l'absurde]

À l'aide d'un raisonnement par contraposition ou par l'absurde :

1. Considérer  $p_1 \dots p_n + 1$ .
2.  $\sqrt{2}$  dans le cours ;  $\sqrt{6}$  très proche ;  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  : éléver au carré, et se ramener à “ $\sqrt{6}$  est irrationnel”.
3. Par contraposée. Réciproque fausse ( $x = \sqrt{2}$ ).
4. Factorisation de  $a^k - 1$  pour  $k$  impair.
5. Par l'absurde.

### Exercice 9 [Un raisonnement par l'absurde plus poussé]

Facile

### Exercice 10 [Raisonnements par analyse-synthèse]

1.  $x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  et  $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$  conviennent.
2. Analyse : mettre au carré et résoudre. Synthèse : vérifier que  $x(x - 3)$  et  $3x - 5$  sont positifs.

### Exercice 11 [Un raisonnement par analyse-synthèse plus poussé]

Utiliser les rotations d'angle  $\pm\pi/3$  dans un triangle équilatéral de centre un sommet : elle envoie le deuxième sommet sur le troisième.

### Exercice 12 [Raisonnements par récurrence]

À l'aide d'un raisonnement par récurrence :

1. Classique.
2. Immédiat.
3. Récurrence forte.

4. L'hérédité utilise que  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  avec égalité ssi  $x = 1$ . La condition d'égalité en découle : tous les  $a_i$  sont égaux.

**Exercice 13 [Un raisonnement par récurrence plus poussé]**

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $p_n$  le  $n$ -ème nombre premier.

1. On montre que  $p_{n+1}$  est au plus un diviseur de  $p_1 \dots p_n + 1$ .
2. Récurrence forte avec somme géométrique.