

## Feuille d'exercices n°19 : Dérivabilité

### Exercice 1 [Calculs de dérivées]

Donner les ensembles de définition, de dérivabilité, et la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2} - 1};$$

$$4. x \mapsto \ln \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}};$$

$$7. x \mapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2);$$

$$2. x \mapsto (\cos(x))^{\sin x};$$

$$5. x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x));$$

$$8. x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]};$$

$$3. \operatorname{Arccos}(\sqrt{1 - x^2});$$

$$6. x \mapsto \ln|\tan(x)|;$$

$$9. x \mapsto \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

### Exercice 2 [Symétrie et dérivées]

Que dire de la dérivée d'une fonction paire, impaire ou périodique ?

### Exercice 3 [Dérivée symétrique]

Si  $f$  est définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in \overset{\circ}{I}$ , on définit la dérivée symétrique de  $f$  en  $a$  comme la limite :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ , sous réserve que cette limite existe et soit finie.

1. Si  $f$  dérivable à droite et à gauche en  $a$ , montrer qu'elle admet une dérivée symétrique en  $a$ .
2. Que dire de la réciproque ?

### Exercice 4 [Dérivée et valeur absolue]

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable.

1. Montrer que  $x \mapsto |f(x)|$  est dérivable en tout point où  $f$  ne s'annule pas, et exprimer sa dérivée.
2. Que dire de la dérivabilité en les points d'annulation de  $f$  ?

### Exercice 5 [Règle de l'Hôpital]

On considère  $f, g$  deux fonctions continues sur  $[0, a]$  et dérivables sur  $]0, a[$  avec  $f(0) = g(0) = 0$ . On suppose que  $g$  et  $g'$  ne s'annulent pas sur  $]0, a[$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in ]0, a[$ , il existe  $c \in ]0, x[$  tel que  $g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$ .

2. En déduire que, si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ .

3. En déduire les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos(x)}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ .

### Exercice 6 [Extrema et points critiques]

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , possédant un unique point critique qui est un extremum local. Montrer qu'il s'agit d'un extremum global strict.

### Exercice 7 [Théorème de Darboux]

Montrer que, si  $f$  est dérivable, alors  $f'$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. En déduire qu'il existe des fonctions non continues qui vérifient le théorème des valeurs intermédiaires.

**Exercice 8 [Rolle “version limites”]**

Soit  $f : [0; +\infty[$  dérivable telle que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$ . Montrer qu’il existe  $c > 0$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 9 [Ramener l’infini au fini]**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, qui admet la même limite  $l \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Étudier la fonction  $g = f \circ \tan$ , et en déduire qu’il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 10 [Avec des dérivées secondes]**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable, telle que :  $f(a) = f'(a)$  et  $f(b) = f'(b)$ . Montrer qu’il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :  $f(c) = f''(c)$  (on pourra utiliser  $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\exp(x)$ ).

**Exercice 11 [Classe de fonctions]**

Déterminer la classe des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} ;$
2.  $x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} ;$
3.  $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ;$
4.  $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ .

**Exercice 12 [Polynômes et exponentielle 1]**

Déterminer  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  est de classe (au moins)  $\mathcal{C}^2$ . Peut-elle être  $\mathcal{C}^3$  ?

**Exercice 13 [Polynômes et exponentielle 2]**

Soit  $f$  une fonction polynomiale. Montrer que l’équation  $f(x) = e^x$  n’a qu’un nombre fini de solutions.

**Exercice 14 [Rolle généralisé]**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $n$ -fois dérivable telle que :

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0.$$

Montrer qu’il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

**Exercice 15 [Prolongement  $\mathcal{C}^\infty$ ]**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x > 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ .

1. Montrer que  $f$  se prolonge en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

3. En déduire que le prolongement continu de  $f$  à  $\mathbb{R}_+$  est lui-même  $\mathcal{C}^\infty$ .