

Feuille d'exercices n°18 : Applications linéaires

Exercice 1 [Applications linéaires ou non]

1. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$: linéaire (vérifier les propriétés, ou dire que c'est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) ; image : $\{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$; noyaux : $\{0\}$ (injective, résoudre le système)
2. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$: pas linéaire $f(0, 0) = (0, 0, 1) \neq 0$
3. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, x, x)$: linéaire (vérifier les propriétés, ou dire que c'est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) ; image : $\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; noyau : $\{0\}$ (injective)
4. $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P(1) + P'(1) + P''$: linéaire en vérifiant les propriétés, ou comme somme des applications linéaires $P \mapsto P(1)$ qui est linéaire (évaluation), et $P \mapsto P'(1)$ qui est linéaire (composée de dérivation, linéaire, et d'évaluation, linéaire) et $P \mapsto P''$ (dérivation linéaire qu'on compose avec elle-même) ; image : $\mathbb{K}[X]$; noyau : $\{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } 5a + 2b + c = 0\} = \text{Vect}(X^2 - 5, X - 2)$;
5. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto f' - 3f$: linéaire en vérifiant les propriétés ou comme combinaison linéaire de la dérivation (linéaire) et de id (toujours linéaire) ; image : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (solution d'une équation différentielle) ; noyau : $\{x \mapsto \lambda e^{3x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{3x})$ (solution d'une équation différentielle homogène)
6. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto 2f \cdot f'$: pas linéaire (à cause du produit) : l'image de id est 2id mais l'image de 2id est 8id $\neq 2 \cdot (2\text{id})$
7. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt)$: linéaire (par linéarité de l'intégrale) ; image : $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ (fonctions de classe \mathcal{C}^1 qui s'annulent en 0, clair par double inclusion) ; noyau : $\{0\}$;
8. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt)$: linéaire (comme au-dessus) ; image : $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ (comme ci-dessus) ; noyau : $\{0\}$;
9. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$: linéaire (propriétés se vérifient facilement) ; image : tout (on définit un antécédent par récurrence) ; noyau : ensemble des suites constantes ;
10. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^T$: linéaire (linéarité de la transposition) ; image : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; noyau : $\{0\}$ (bijective, car involutive) ;
11. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto A \cdot M$ (pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée) : linéaire (par bilinéarité du produit matriciel) ; image : matrices dont les colonnes sont combinaisons linéaires des colonnes de A ; noyau : matrices dont chaque colonne est dans le noyau de A .

Exercice 2 [Morphisme d'évaluation]

Linéarité immédiate (vérifier les propriétés).

Noyau : applications qui s'annulent en a (qui est bien un sev de $\mathcal{F}(\Omega, E)$).

Image : E (on peut voir avec les applications constantes par exemple que tout élément de E est une image).

Exercice 3 [Inclusion d'espaces images]

Par double implication :

- si $f(A) \subset f(B)$: montrons l'inclusion. Soit $x \in A + \text{Ker}f$. On pose $x = a + y$ avec $a \in A$ et $y \in \text{Ker}f$.

Alors $f(x) = f(a) \in f(A) \subset f(B)$.

Donc il existe $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$.

Puis $x = b + (x - b)$ avec $b \in B$ et $f(x - b) = f(x) - f(b) = 0$, c'est-à-dire $x - b \in \text{Ker}f$.

Donc $x \in B + \text{Ker}f$.

D'où l'inclusion.

D'où la première implication..

- si $A + \text{Ker}f \subset B + \text{Ker}f$: soit $y \in f(A)$. Posons $a \in A$ tel que $f(a) = y$.

Comme $a \in A \subset A + \text{Ker}f \subset B + \text{Ker}f$, on peut écrire $a = b + x$ avec $b \in B$ et $x \in \text{Ker}f$.

Puis $y = f(a) = f(b + x) = f(b) + f(x) = f(b) \in f(B)$.

Donc $f(A) \subset f(B)$.

D'où l'inclusion.

D'où la réciproque.

Exercice 4 [Image et noyau d'une composée]

1. $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}g)$: on peut faire par double inclusion, on directement :

$$x \in \text{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \text{Ker}g \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\text{Ker}(g)).$$

2. soit $x \in \text{Ker}f$. Alors $f(x) = 0$. Par linéarité de g : $g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$.

3. On peut faire par double inclusion (avec des quantificateurs) ou directement par manipulation d'ensembles :

$$\text{Im}(g \circ f) = \{g(f(x)) \mid x \in E\} = \{g(y) \mid y \in \text{Im}f\} = g(\text{Im}f).$$

4. Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$. Posons $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Alors $y = g(f(x)) \in \text{Im}g$.

5. double implication :

- si $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}f$: soit $y \in \text{Ker}g \cap \text{Im}f$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $g(y) = 0$. Puis $g \circ f(x) = g(y) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}f$ donc $f(x) = 0 = y$ donc $y = 0$. L'autre inclusion est toujours vraie (intersection d'espaces vectoriels) d'où la première implication.
- si $\text{Ker}g \cap \text{Im}f = \{0\}$: on a déjà l'inclusion de $\text{Ker}f$ dans $\text{Ker}(g \circ f)$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(g \circ f)$: alors $g \circ f(x) = 0$. Donc $f(x) \in \text{Im}f \cap \text{Ker}g$ (par définition à chaque fois) donc $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \text{Ker}f$. D'où la seconde implication.

6. double implication :

- si $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}g$: soit $x \in F$. Alors $g(x) \in \text{Im}g = \text{Im}(g \circ f)$ donc il existe $y \in F$ tel que $g(x) = g(f(y))$ puis $x = (x - f(y)) + f(y) \in \text{Ker}g + \text{Im}f$ ce qui assure $F \subset \text{Ker}g + \text{Im}f$. l'autre inclusion est toujours vérifiée car $\text{Ker}g$ et $\text{Im}f$ sont des sev de F donc leur somme aussi.

- si $\text{Ker}g + \text{Im}f = F$: on a déjà l'inclusion $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}g$. Réciproquement, si $y \in \text{Im}g$: on pose $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Et par propriété sur F on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Ker}(g)$ et $x_2 \in \text{Im}f$. On pose $x_2 = f(z)$ (par définition) et alors : $y = g(x) = g(x_1) + g(x_2) = 0 + g(f(z)) \in \text{Im}(g \circ f)$ ce qui prouve l'autre inclusion.

Exercice 5 [Image et noyau d'un endomorphisme]

1. par double implication :

- si $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$:
 - soit $x \in \text{Ker}f$: alors $f(x) = 0$ puis par linéarité : $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \text{Ker}f^2$; (inclusion qui n'utilise pas l'hypothèse : cf. exercice 8)
 - soit $x \in \text{Ker}f^2$: alors $f^2(x) = 0$. En posant $y = f(x)$, on a ainsi $y \in \text{Im}f$ (par définition) et $t \in \text{Ker}f$ (car $f(y) = f^2(x) = 0$) donc $y = 0$, donc $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \text{Ker}f$.

Donc $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2$

- si $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2$: soit $y \in \text{Im}f \cap \text{Ker}f$: on pose $y = f(x)$ (par définition de $\text{Im}f$) et on a $f(y) = 0$ (par définition de $\text{Ker}f$). Ainsi $f^2(x) = f(y) = 0$ donc $x \in \text{Ker}f^2 = \text{Ker}f$ donc $f(x) = 0$ donc $y = 0$ ce qui prouve $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$ (l'autre inclusion est toujours vraie comme on a une intersection d'espaces vectoriels)

2. On procède de même :

- si $E = \text{Im}f + \text{Ker}f$:
 - soit $y \in \text{Im}f^2$: on peut écrire alors $y = f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im}f$; donc $\text{Im}f^2 \subset \text{Im}f$ (inclusion qui n'utilise pas l'hypothèse : cf. exercice 8)
 - soit $y \in \text{Im}f$: on peut écrire alors $y = f(x)$ pour $x \in E$. Par hypothèse, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im}f$ et $x_2 \in \text{Ker}f$. On a alors : $y = f(x) = f(x_1) + 0 = f(x_1)$. Mais $x_1 \in \text{Im}f$ donc on peut écrire $x_1 = f(z)$ pour $z \in E$ et ainsi : $y = f(x_1) = f^2(z) \in \text{Im}f^2$. Donc $\text{Im}f \subset \text{Im}f^2$.

d'où l'égalité $\text{Im}f = \text{Im}f^2$ par double inclusion ;

- si $\text{Im}f = \text{Im}f^2$: soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \text{Im}f = \text{Im}f^2$ donc il existe $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z)$. Puis $f(x - f(z)) = f(x) - f^2(z) = 0$ donc $x - f(z) \in \text{Ker}f$. Et comme $f(z) \in \text{Im}f$ (par définition) on déduit : $x = f(z) + (x - f(z)) \in \text{Im}f + \text{Ker}f$. Donc $E = \text{Im}f + \text{Ker}f$ (l'autre inclusion est toujours vérifiée comme $\text{Im}f$ et $\text{Ker}f$ sont des sev de E , donc leur somme aussi).

Exercice 6 [Endomorphismes qui commutent]

Pour le noyau : soit $x \in \text{Ker}f$. Montrons que $g(x) \in \text{Ker}f$. On a :

$$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

en utilisant la commutativité de f et g , et la linéarité de g . Donc $g(x) \in \text{Ker}f$. Et ainsi : $\text{Ker}f$ est bien stable par g .

Pour l'image : soit $y \in \text{Im}f$. Montrons que $g(y) \in \text{Im}f$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et ainsi :

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \text{Im}f$$

par commutativité de f et g , et par définition de $\text{Im}f$. Donc $g(y) \in \text{Im}f$. Et ainsi : $\text{Im}f$ est bien stable par g .

Pour $P(g)$, il suffit de voir que $P(g)$ et f commutent. Posons $P = \sum a_i g^i$. Alors :

$$g^i \circ f = g^{i-1} \circ g \circ f = g^{i-1} \circ f \circ g = \dots = g \circ f \circ g^{i-1} = f \circ g \circ g^{i-1} = f \circ g^i$$

en utilisant l'associativité de la composition, pour faire passer un g de la gauche de f à sa droite (ce qu'on peut aussi montrer par récurrence si on préfère). Et par linéarité de la composition :

$$P(g) \circ f = \left(\sum a_i g^i \right) \circ f = \sum a_i (g^i \circ f) = \sum a_i (f \circ g^i) = f \circ \left(\sum a_i g^i \right) = f \circ P(g)$$

donc f et $P(g)$ commutent, et on peut appliquer le résultat précédent, ce qui donne le résultat demandé.

Exercice 7 [Images et noyaux itérés]

- $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$: soit $x \in \text{Ker } f^k$. Alors $f^k(x) = 0$. Puis $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker } f^{k+1}$.
- $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$: soit $y \in \text{Im } f^{k+1}$. Posons $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Alors : $y = f^k(f(x)) \in \text{Im } f^k$.

Exercice 8 [Caractérisation des homothéties]

Si f est une homothétie : notons $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{id}$. Alors pour tout $x \in E$: $(x, f(x)) = (x, \lambda x)$ est liée (les vecteurs sont proportionnels).

Réciproquement : si pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée. Si $x \neq 0$, la famille (x) est libre, et la famille $(x, f(x))$ est liée donc il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ (qui dépend de x) tel que $f(x) = \lambda x$. Ce qui légitime de définir l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \text{l'unique } \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(x) = \lambda x \end{cases}$$

On va montrer que φ est constante. Pour cela, soient x, y non nuls. Alors :

- si (x, y) est libre : on a par définition de φ et par linéarité de f :

$$f(x) + f(y) = \varphi(x) \cdot x + \varphi(y) \cdot y = f(x + y) = \varphi(x + y)(x + y) = \varphi(x + y) \cdot x + \varphi(x + y) \cdot y$$

et on a donc deux combinaisons linéaires en x et y qui sont égales. Par liberté, elles sont égales coefficient par coefficient, et donc $\varphi(x) = \varphi(x + y) = \varphi(y)$ donc $\varphi(x) = \varphi(y)$.

- si (x, y) est liée : posons $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu \cdot x$. Alors par définition de φ et par linéarité de f :

$$f(y) = \varphi(y) \cdot y = f(\mu \cdot x) = \mu \cdot f(x) = \mu \varphi(x) \cdot x = \varphi(x) \cdot y$$

et comme $y \neq 0$, la famille (y) est libre ce qui veut dire que $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Dans les deux cas $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Donc φ est constante : en notant λ son unique valeur, on déduit que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x$$

et comme l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$ (on trouve $0 = 0$), on déduit que :

$$\forall x \in E, f(x) = \lambda x$$

c'est-à-dire que $f = \lambda \text{id}$ est une homothétie !

Exercice 9 [Composée de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E . Montrer que :

1. Par double implication :

- si $\text{Imp} = \text{Im}q$: les rôles de p et q sont symétriques donc il suffit de montrer l'une des égalités.
Soit $x \in E$. Alors $q(x) \in \text{Im}q = \text{Imp}$ donc $p(q(x)) = q(x)$. Et donc $p \circ q = q$.
- si $(p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p)$: par symétrie il suffit de montrer une inclusion : soit $x \in \text{Imp}$. Alors $x = p(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) \in \text{Im}q$. Donc $\text{Imp} \subset \text{Im}q$.

2. Par double implication :

- si $\text{Kerp} = \text{Ker}q$: par symétrie il suffit de montrer l'une des égalités.
Soit $x \in E$. Alors $(p(x) - x) \in \text{Kerp} = \text{Ker}q$. Donc $q(p(x) - x) = 0$, puis $q \circ p(x) = q(x)$. Donc $q \circ p = q$.
- si $(p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q)$: par symétrie il suffit de montrer une inclusion.
Soit $x \in \text{Kerp}$: alors $q(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) = q(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}q$. Donc $\text{Kerp} \subset \text{Ker}q$.

Exercice 10 [Somme de projecteurs]

Comme p, q projecteurs, on a :

$$(p + q)^2 - (p + q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 - p - q = p \circ q + q \circ p.$$

ce qui prouve déjà que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q + q \circ p = 0$.

Et ainsi :

- si $p \circ q = q \circ p = 0$: alors $p \circ q + q \circ p = 0 + 0 = 0$ donc $p + q$ est un projecteur ;
- si $p + q$ est un projecteur : alors $p \circ q = -q \circ p$ mais alors en composant par p à gauche et à droite, on obtient :

$$p \circ q = p^2 \circ q = -p \circ q \circ p \text{ et } p \circ q \circ p = -q \circ p^2 = -q \circ p$$

et donc $p \circ q = -p \circ q \circ p = q \circ p = -p \circ q$, donc $p \circ q = q \circ p = 0$.

On détermine l'image et le noyau par double inclusion :

• image :

- soit $x \in \text{Imp} + \text{Im}q$: notons $x = p(y) + q(z)$ pour $y, z \in E$. Et alors : $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = p^2(y) + p \circ q(z) + q \circ p(y) + q^2(z) = p(y) + q(z) = x$ en notant que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$.
- soit $x \in \text{Im}(p + q)$: alors $x = (p + q)(x) = p(x) + q(x) \in \text{Imp} + \text{Im}q$; et cette somme est directe car, si $x \in \text{Imp} \cap \text{Im}q$, alors $x = p(x) = q(x)$ puis $x = p(q(x)) = 0$ (car $p \circ q = 0$).

D'où l'égalité pour l'image.

• noyau :

- soit $x \in \text{Ker}(p + q)$: alors $p(x) + q(x) = 0$. En composant avec p et q il vient $p^2(x) + p(q(x)) = 0$ donc $p(x) = 0$ et $q(p(x)) + q^2(x) = 0$ donc $q(x) = 0$ et donc $x \in \text{Kerp} \cap \text{Ker}q$;
- soit $x \in \text{Kerp} \cap \text{Ker}q$: alors $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$ donc $x \in \text{Ker}(p + q)$.

D'où l'égalité pour le noyau.

Exercice 11 [Inversibilité unilatérale]

Soient E un espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \text{id}$.

1. Par double inclusion à chaque fois :

• $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker} f$:

- soit $x \in \text{Ker} f$: alors $f(x) = 0$ puis $g \circ f(x) = g(0) = 0$ (par linéarité) d'où la première inclusion ;
- soit $x \in \text{Ker} g \circ f$: alors $g \circ f(x) = 0$ puis $f(g \circ f(x)) = 0$ (par linéarité) mais $f(g \circ f(x)) = f \circ g \circ f(x) = \text{id} \circ f(x) = f(x)$. Donc $f(x) = 0$, d'où la seconde inclusion.

D'où l'égalité.

• $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g$:

- soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$: alors il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x)) \in \text{Im} g$, d'où la première inclusion ;
- soit $y \in \text{Im} g$: alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ puis $f(y) = f \circ g(x) = x$ donc $y = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y) \in \text{Im} g \circ f$.

D'où l'égalité.

Et pour la dernière inclusion on peut aussi utiliser que $f \circ g = \text{id}$ est surjective, donc f aussi, donc $f(E) = E$, puis $\text{Im}(g \circ f) = g(f(E)) = g(E) = \text{Im} g$.

2. On montre séparément que la somme est directe et génératrice :

• la somme est directe : soit $x \in \text{Ker} f \cap \text{Im} g$: alors $f(x) = 0$, et il existe $y \in E$ tel que $g(y) = x$. Puis :

$$0 = f(x) = f \circ g(y) = y$$

donc $y = 0$ puis $x = g(y) = 0$ (par linéarité de g) ;

• la somme est génératrice : soit $x \in E$: alors $f(x) = f \circ g \circ f(x) = f(g \circ f(x))$ et par linéarité $f(x - g \circ f(x)) = 0$. Donc $x - g \circ f(x) \in \text{Ker} f$. Et finalement : $x = (x - g \circ f(x)) + g(f(x)) \in \text{Ker} f + \text{Im} g$.

D'où le résultat.

3. On a deux supplémentaires, on cherche une application : ça a de fortes chances d'être un projecteur. On a :

$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \text{id} \circ f = g \circ f$$

et donc on a bien un projecteur !

Mais $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker} f$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g$ donc c'est le projecteur sur $\text{Im} g$ parallèlement à $\text{Ker} f$.

4. On travaille sur les suites. On considère :

$$f : (u_n) \mapsto (u_{n+1}) = (u_1, u_2, \dots) \text{ et } g : (u_n) \mapsto (0, u_0, u_1, \dots)$$

c'est-à-dire que la première décale les indices de 1 vers la gauche (en supprimant u_0) et la seconde décale les indices de 1 vers la droite (en rajoutant au début la valeur 0). Ces deux applications sont des endomorphismes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (la linéarité est claire, et acquise dans le second cas justement parce que l'on a fixé comme valeur 0 pour le premier terme). Et pour toute suite (u_n) :

$$f \circ g((u_n)) = f((0, u_0, u_1, \dots)) = (u_0, u_1, \dots) = (u_n) \text{ et } g \circ f((u_n)) = g((u_1, u_2, \dots)) = (0, u_1, u_2, \dots)$$

ce qui donne bien $f \circ g = \text{id}$, mais $g \circ f \neq \text{id}$ (on a remplacé le premier terme de la suite par 0). Et ce n'est pas surprenant : f n'est pas injective, et son noyau est l'ensemble des suites nulles à partir du rang 1, donc deux éléments ayant même image différent seulement à leur premier terme.

Exercice 12 [Composition double]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. On montre séparément que la somme est directe et génératrice :

- la somme est directe : soit $x \in \text{Im}f \cap \text{Ker}g$: alors $g(x) = 0$, et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
Puis :

$$x = f(y) = f \circ g \circ f(y) = f \circ g(x) = f(0) = 0$$

donc $x = 0$, et la somme est directe.

- la somme est génératrice : soit $x \in E$: alors $g(x) = g \circ f \circ g(x)$ puis par linéarité de g : $g(x - f \circ g(x)) = 0$, c'est-à-dire que $(x - f \circ g(x)) \in \text{Ker}g$.
Et ainsi : $x = (x - f \circ g(x)) + f(g(x)) \in \text{Ker}g + \text{Im}f$. Donc la somme est génératrice.

Et ainsi $\text{Im}f$ et $\text{Ker}g$ sont bien supplémentaires dans E .

2. On procède par double inclusion :

- soit $y \in f(\text{Im}g)$: notons $x \in \text{Im}g$ tel que $y = f(x)$. Alors $x \in E$ donc $y = f(x) \in \text{Im}f$, ce qui prouve la première inclusion.
- soit $y \in \text{Im}f$: notons $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors :

$$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f \left(\underbrace{g(f(x))}_{\in \text{Im}g} \right) \in f(\text{Im}g).$$

D'où l'égalité par double inclusion.

Exercice 13 [Supplémentaire commun à deux hyperplans]

Montrons déjà le premier résultat.

Si $F = G$: alors $F \cup G = F$ est un hyperplan de E , donc $F \cup G \neq E$

Sinon, montrons que $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel : comme E est un espace vectoriel, cela conclura que $F \cup G \neq E$. On a déjà montré que, à moins d'être triviale, l'union de deux espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel. Montrons donc que $F \not\subset G$ et que $G \not\subset F$.

Par symétrie des rôles de F et G , il suffit de montrer que $F \not\subset G$.

Par l'absurde, si on avait $F \subset G$: comme $F \neq G$, on peut donc trouver $x \in G \setminus F$. Un tel x n'étant pas dans F , d'après le cours, on a : $E = F \oplus \text{Vect}(x)$. Mais $F \subset G$ et $x \in G$, donc par somme il vient $E \subset G$, puis $G = E$. D'où la contradiction avec le fait que G est un hyperplan de E .

Et finalement $F \cup G \neq E$. Mais $F \cup G \subset E$ (union de sous-ensembles de E). Donc il existe $x \in E$ tel que $x \notin F \cup G$. Un tel x n'est ni dans F , ni dans G . Et donc $D = \text{Vect}(x)$ est à la fois un supplémentaire de F et de G : c'est un supplémentaire commun à F et G .

Exercice 14 [Détermination d'une forme linéaire]

La famille $((1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 2, 3))$ est une base de \mathbb{R}^3 , ce qui justifie déjà qu'une telle forme linéaire existe et est unique.

Pour trouver son expression générale, on considère $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: il suffit d'exprimer (x, y, z) dans la base précédente pour conclure. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x + 5y - 4z \\ x - 2y + z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}$$

(en résolvant le système. Et ainsi pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu + 4 \cdot \nu = -x - 2y + 3z$$

et on vérifie que l'on retrouve bien les trois valeurs initiales.

Autre méthode (plus efficace) : on sait déjà que f est de la forme $f : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$. En utilisant les trois valeurs données, on trouve :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + c = 1 \\ a + 2b + c = 4 \end{cases}$$

qu'on résout, ce qui donne $a = -1$, $b = -2$ et $c = 3$. C'est bien la forme précédente.

Exercice 15 [Forme linéaire sur les polynômes]

On pose $\psi : P \mapsto P(a)$. Alors φ et ψ sont des formes linéaires non nulles.

Mais $\text{Ker}\psi = \{P \in \mathbb{K}[X], | P(a) = 0\} = \{(X - a)P \mid P \in \mathbb{K}[X]\} \subset \text{Ker}\varphi$.

Nécessairement, cette inclusion est une égalité : sinon, on pourrait trouver $P \in \text{Ker}(\varphi) \setminus \text{Ker}\psi$, et alors $\text{Vect}(P)$ serait un supplémentaire de $\text{Ker}\psi$. Puis $E = \text{Ker}(\psi) \oplus \text{Vect}(P) \subset \text{Ker}(\varphi)$ donc $E = \text{Ker}(\varphi)$ puis $\varphi = 0$, ce qui est exclu.

Donc $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\psi$: les formes linéaires ψ et φ sont proportionnelles.