Feuille d'exercices n^{o}13 : Suites numériques

Exercice 1 [Inégalité et limites]

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites qui tendent vers l_1, l_2 avec $l_1 < l_2$. Montrer que, à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$. Que dire si $l_1 \leqslant l_2$?

Exercice 2 [Critère de convergence de suites]

Montrer que les suites réelles (u_n) et (v_n) convergent dans les cas suivants, et préciser leurs limites :

1. (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $[0;1]$ et $\lim u_n v_n = 1$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant a$ et $v_n \leqslant b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et $\lim u_n + v_n = a + b$;
3. les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent respectivement vers $a, b \in \mathbb{R}$;
4. $\lim\ (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$.

Exercice 3 [Limites version ε]

En utilisant la définition de la limite ("avec des ε"), montrer que l'on a les limites suivantes :

1. $(\ln(n))$ tend vers $+\infty$;
2. (e^{-n}) tend vers 0 ;
3. $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 ;
4. $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 [Quelques calculs de limites]

Déterminer les limites des suites dont le terme général est le suivant :

1. $\frac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$;
2. $\sqrt{n}\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$;
3. $\frac{\sqrt{n+4}}{n-\sqrt{n}}$;
4. $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$;
5. $\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$;
6. $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 5 [Encadrements et limites de sommes]

À l'aide d'encadrements, déterminer les limites des sommes S_n suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$;
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$;
3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$;
4. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$;
5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$;
6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Exercice 6 [Critère de d'Alembert]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que $l \in \mathbb{R}_+$ ou $l = +\infty$.
2. Montrer que, si $l < 1$, alors (u_n) tend vers 0.
3. Montrer que, si $l > 1$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Montrer que, si $l = 1$, on ne peut pas conclure ni sur la convergence de (u_n), ni sur sa limite éventuelle.

Exercice 7 [Critère de Cauchy]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Montrer que les résultats de l'exercice précédente restent valables.

Exercice 8 [Vrai–Faux autour des suites]

Prouver ou invalider les affirmations suivantes (où (u_n) désigne une suite réelle) :

1. le produit de deux suites minorées est minoré ;
2. la somme de deux suites périodiques est périodique ;
3. si $|u_n|$ tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$;
4. si $u_n > 0$, alors (nu_n) tend vers $+\infty$;
5. si $u_n > 1$, alors (u_n^n) tend vers $+\infty$;
6. si (u_n^4) a une limite, alors (u_n^2) aussi ;
7. si u_n ne s'annule pas et u_n tend vers 0, alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$;
8. si u_n ne s'annule pas et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1, alors (u_n) converge ;
9. si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice 9 [Un calcul de limite]

On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que (u_n) est monotone et à valeurs dans $[0,1]$. En déduire qu'elle converge vers $l \in [0;1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n} \leqslant \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et en déduire l.

Exercice 10 [Suite définie implicitement 1]

1. Monter que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n = \cos(x)$ admet une unique solution sur $[0;1]$, que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) ainsi définie est convergente, et donner sa limite.

Exercice 11 [Suite définie implicitement 2]

1. Monter que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n \in [1/2;1]$.
3. Montrer que la suite (x_n) ainsi définie est convergente, et que sa limite l appartient à $[1/2;1[$.
4. Calculer l.

Exercice 12 [Limites de sinus ou de cosinus]

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On note $(u_n) = (\cos(n\alpha))$ et $(v_n) = (\sin(n\alpha))$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
2. En déduire que (u_n) converge si, et seulement si, (v_n) converge.
3. En déduire que (u_n) et (v_n) divergent.
4. Que se passe-t-il si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$?

Exercice 13 [Moyenne arithmético-géométrique]

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que : $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.

2. On considère les suites $(u_n), (v_n)$ définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée $M(a, b)$, appelée **moyenne arithmético-géométrique** de a et b.

3. Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$, et exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$).

Exercice 14 [Séries alternées]

On considère (u_n) une suite décroissante tendant vers 0 et on pose pour $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel l, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|S_n - l| \leqslant u_{n+1}$.

Exercice 15 [Limite d'une somme]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Montrer que les suite (u_n) et (v_n) sont adjacentes et en déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, puis la limite de $\frac{1}{n^\alpha} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 [Une suite complexe]

Montrer que la suite complexe $(e^{i \ln(n)})$ diverge (on pourra étudier la suite extraite des termes de rang pair).

Exercice 17 [Suites réelles et suites complexes]

On considère $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Exprimez simplement la suite $(w_n) = (u_n + i v_n)$ et en déduire les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 18 [Suite extraite et suites monotone]

Soit (u_n) une suite monotone telle que la suite (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 19 [Limites de suites extraites]

Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{3n}) et (u_{2n+1}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 20 [Suite extraites d'une suite de chiffres]

Soit (u_n) la suite des décimales de π. Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente.

Exercice 21 [Propriétés de suites extraites]

Montrer que toute suite extraite d'une suite monotone est aussi monotone de même monotonie.

Les suites extraites d'une suite périodique sont-elles périodiques ?

Exercice 22 [Suite de suites extraites]

Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \dfrac{n+p}{np}$.

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 23 [Suites arithmético-géométriques]

Donner les termes généraux des suites arithmético-géométriques données par les égalités suivantes en fonction de $u_0 = a \in \mathbb{R}$:

1. $u_{n+1} = 2u_n + 1$;
2. $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 24 [Doubles suites arithmético-géométriques]

Soient $(u_n), (v_n)$ les suites définies par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont chacune arithmético-géométriques, et donner la relation de récurrence qui les définit.
3. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 25 [Suites linéaires récurrentes d'ordre 2]

Donner les termes généraux des suites linéaires récurrentes données par les égalités suivantes :

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$;
2. $u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$;
3. $u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$;
4. $u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$.

Exercice 26 [Limites de suites récurrentes]

Étudier en fonction de la valeur de u_0 la limite de la suite (u_n) définie par les relations suivantes :

1. $u_{n+1} = u_n^2$;
2. $u_{n+1} = u_n^2 + 1$;
3. $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$;
4. $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$;
5. $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$;
6. $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$;
7. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Exercice 27 [Équation fonctionnelle et suite linéaire récurrente]

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall x > 0,\ f(f(x)) = 6x - f(x).$$

On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$, et on définit la suite (u_n) par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2.
2. En déduire une expression de (u_n) en fonction de n.
3. En déduire $f(a)$, et conclure quant aux possibilités pour la fonction f.