# Feuille d'exercices n$^o$12 : L'ensemble ordonné des réels

### Exercice 1 [Recherche de bornes supérieures et inférieures]

1. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{0, 3/2, -2/3, 5/4, -4/5, 7/6, -6/7, \ldots\}$ donc $\sup(A) = \max(A) = 3/2$ et $\inf(A) = -1$ ;

2. $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ : $\sup(B) = \max(B) = 2$ et $\inf(B) = -1$.

3. $C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ : $\sup(C) = 1$ et $\inf(C) = -1$.

### Exercice 2 [Compatibilité de l'ordre et des bornes]

Soient $a \in A$ et $b \in B$ (quelconques) : alors $a$ est un minorant de $B$ et $b$ est un majorant de $A$, donc $A$ est non vide majorée donc admet une borne supérieure, et $B$ est non vide minorée donc admet une borne inférieure.

L'inégalité se prouve par l'absurde : si $M = \sup(A) > \inf(B) = m$ : posons $\varepsilon = \dfrac{M-m}{2} > 0$. Par définition :

$$\exists a \in A,\ M - \varepsilon < a \leqslant M \text{ et } \exists b \in B,\ m \leqslant b < m + \varepsilon$$

et pour de tels $a, b$ : $b < m + \varepsilon = \dfrac{M+m}{2} = M - \varepsilon < a$ d'où la contradiction.

### Exercice 3 [Bornes supérieures d'unions et d'intersections]

1. $A \subset A \cup B$ donc tout majorant de $A \cup B$ est un majorant de $A$ donc $\sup(A \cup B) \geqslant \sup(A)$. De même $\sup(A \cup B) \geqslant \sup(B)$, d'où : $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\sup(A), \sup(B))$.

   Pour l'égalité : soit $x \in A \cup B$. Alors :

   - si $x \in A$ : $x \leqslant \sup(A) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$;
   - si $x \in B$ : $x \leqslant \sup(B) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$.

   Donc $\max(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de $A$, donc $\sup(A \cup \max(\sup(A), \sup(B))) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$

2. $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$ donc $A \cap B$ est majorée et $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(A)$ et $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(B)$ donc $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.

   Avec $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0, 2\}$ on a l'inégalité stricte.

3. Posons $M_1 = \sup(A)$ et $M_2 = \sup(B)$. Soit $c \in A + B$. Posons $c = a + b$ ($a \in A$ et $b \in B$). Alors : $c \leqslant M_1 + M_2$. Donc $A + B$ est majorée par $M_1 + M_2$ donc $\sup(A + B)$ existe et $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$.

   Pour l'autre inégalité : si $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon/2 > 0$ donc :

   $$\exists a \in A,\ M_1 - \varepsilon/2 < a \leqslant M_1 \text{ et } \exists b \in B,\ M_2 - \varepsilon/2 < b \leqslant M_2$$

   puis par somme : $M_1 + M_2 - \varepsilon < \underbrace{a + b}_{\in A+B} \leqslant M_1 + M_2$ d'où l'égalité par caractérisation epsilonnesque de la borne supérieure.

**Exercice 4 [Borne supérieure d'un sous-ensemble]**

1. On pos e$M = \sup(A)$ : comme $M-1$ ne majore pas $A$, alors $B$ est non vide. Comme $B \subset A$, alors $\sup(B) \leqslant M$.

   Soit $x \in A$. Alors :

   - si $x \geqslant M-1$ : $x \in B$ donc $x \leqslant \sup(B)$ ;
   - si $x < M-1$ : alors $x$ ne majore pas $B$ donc $x \leqslant \sup(B)$.

   Donc $\sup(B)$ est un majorant de $A$, donc $M \leqslant \sup(B)$ donc $\sup(B) = M$.

2. Notons déjà que $A$ n'est pas réduit au singleton $\{x\}$ comme $\sup(A) \neq x$. Donc $A \setminus \{x\}$ est non vide.

   Comme $A \setminus \{x\} \subset A$, on déduit que $A \setminus \{x\}$ admet une borne supérieure avec $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant \sup(A)$.

   Soit $y \in A$ :

   - si $y \neq x$ : alors $y \in A \setminus \{x\}$ donc $y \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$ ;
   - si $y = x$ : alors $y \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$ : sinon $x$ serait un majorant de $A \setminus \{x\}$, donc de $A$, et on aurait donc $x = \max(A) = \sup(A)$, ce qui est interdit.

   Donc $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de $A$, donc $\sup(A) \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$. Et finalement : $\sup(A) = \sup(A \setminus \{x\})$.

**Exercice 5 [Ensembles adjacents]**

On fixe $a_0 \in A$ : c'est un minorant de $B$ donc $B$ est non vide minorée donc $\inf(B)$ existe.

On fixe $b_0 \in B$ : c'est un majorant de $A$ donc $A$ est non vide majorée donc $\sup(A)$ existe.

Tout $b \in B$ est un majorant de $A$, donc par définition on a $b \geqslant \sup(A)$ (le plus petit majorant). Donc $\sup(A)$ est un minorant de $B$, donc par définition $\sup(A) \leqslant \inf(B)$ (le plus grand minorant).

Par l'absurde, supposons que $\sup(A) < \inf(B)$. Posons $\varepsilon = \dfrac{\inf(B) - \sup(A)}{2} > 0$. Par définition, pour tout $(a, b) \in A \times B$ : $a \leqslant \sup(A)$ et $b \geqslant \inf(B)$ donc $b - a \geqslant \inf(B) - \sup(A) = 2\varepsilon > \varepsilon$, ce qui contredit la seconde assertion.

Donc $\sup(A) = \inf(B)$.

**Exercice 6 [Fonctions additives et fonctions linéaire]**

On a déjà que toute fonction linéaire est continue et monotone. Reste à montrer les réciproques :

- si $f$ vérifie la condition et est continue : on a vu qu'en posant $\alpha = f(1)$ on a : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \alpha x$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n \in \mathbb{Q}$ l'approximation décimale de $y$ à $10^{-n}$ près par défaut. Alors : $f(y_n) = \alpha y_n$ puis en passant à la limite (comme $f$ est continue) : $f(y) = \alpha y$. Donc $f$ est linéaire ;

- si $f$ vérifie la condition et est monotone : pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n, z_n$ les approximations décimales de $y$ par défaut et par excès à $10^{-n}$ près. Selon que $f$ est croissante ou décroissante, on trouve $f(y_n) \leqslant f(y) \leqslant f(z_n)$ ou $f(z_n) \leqslant f(y) \leqslant f(y_n)$. Dans les deux cas, on conclut par théorème d'encadrement que $f(y) = \alpha y$. Donc $f$ est linéaire.

Et toute fonction linéaire est solution.

**Exercice 7 [Fonction additive et multiplicative sur les réels]**

1. $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ donc $f(0)=0$

   $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)$ donc $f(1)=0$ ou $1$ mais si $f(1)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)=f(1\cdot x)=f(1)\cdot f(x)=0$ donc $f$ est nulle (interdit) donc $f(1)=1$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0$ donc $f(-x)=-f(x)$ donc $f$ est impaire et $f(-1)=-f(1)=-1$

3. Par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=n$. Par parité : $\forall n\in\mathbb{Z},\ f(n)=n$.

   Pour $n,m\in\mathbb{Z}$ avec $m\neq 0$ : $n=f(n)=f\left(m\cdot\frac{n}{m}\right)=f(m)f\left(\frac{n}{m}\right)=mf\left(\frac{n}{m}\right)$ donc $f(n/m)=n/m$.

   Donc pour tout $x\in\mathbb{Q}$ : $f(x)=x$.

4. Soit $x\geqslant 0$. Alors : $f(x)=f(\sqrt{x}^2)=f(\sqrt{x})^2\geqslant 0$.

5. Soient $x,y\in\mathbb{R}$ avec $x\geqslant y$. Alors : $f(x)=f(y+(x-y))=f(y)+f(x-y)\geqslant f(y)$ donc $f$ est croissante.

   Par même méthode que l'exercice précédent on déduit $f$ linéaire : comme $f(1)=1$, alors $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

**Exercice 8 [Fonction croissante et point fixe]**

1. $A$ est non vide : $f(0)\in[0;1]$ donc $f(0)\geqslant 0$ donc $0\in A$

   $A$ est majorée : $A\subset[0;1]$ donc $A$ est majorée par 1.

   Par théorème de la borne supérieure, $a$ possède une borne supérieure $a$, avec $a\in[0;1]$.

2. Si $f(a)\geqslant a$ : par croissance de $f$ : $f(f(a))\geqslant f(a)$ donc $f(a)\in A$.

3. Si $f(a)\leqslant a$ : soit $x\in A$. Alors $x\leqslant a$ ($a$ est un majorant de $A$) puis $f(x)\leqslant f(a)$ (par croissance).

   Mais $x\in A$ donc $x\leqslant f(x)$ (par définition de $A$). Donc $x\leqslant f(a)$. Donc $f(a)$ est un majorant de $A$.

4. Montrons que $f(a)=a$ :

   - si $f(a)\geqslant a$ : par le premier point, $f(a)\in A$ ; et $a$ étant un majorant de $A$, on a donc $f(a)\leqslant a$. Donc $f(a)=a$.
   - si $f(a)\leqslant a$ : par le second point, $f(a)$ est un majorant de $A$. Mais $a$ est le plus petit majorant de $A$ donc $f(a)\geqslant a$. Donc $f(a)=a$.

   Dans les deux cas, on a bien $f(a)=a$ : donc $f$ possède un point fixe, qui est $a$.