Feuille d'exercices n^{o}11 : Applications

Exercice 1 [Images directes]

1. $\exp(]-1;0]) =]e^{-1};1]$;
2. $\ln(]0;1[) =]-\infty;0 = \mathbb{R}_-^*$;
3. $f(]-2;4]) = [1;17]$;
4. $\sin\left([\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[$;
5. $\sin\left(]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{2}[\right) = [-1;1]$;
6. $\cos\left([\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[\right) = \left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Exercice 2 [Images réciproques]

1. $\exp^{-1}(]-1;1[) =]-\infty;0[= \mathbb{R}_-^*$;
2. $\ln^{-1}(]1;+\infty[)]e^1;+\infty[$;
3. $f^{-1}([2;5[) =]-2,-1] \cup [1;2[$;
4. $\sin^{-1}\left(\{\frac{1}{2}\}\right) \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
5. $\sin^{-1}\left(]0;\frac{1}{2}[\right) \cup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi;\pi/6+2k\pi[\cup]5\pi/6+2k\pi;(2k+1)\pi[$;
6. $\cos^{-1}([-1;1[) \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 3 [Étude d'une fonction par une composée] On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

1. $cx - a = 0 \Leftrightarrow x = a/c \notin E$ donc f définie sur E.
2. il faut vérifier que $f(E) \subset E$, et donc $a/c \notin f(E)$ (comme $f(E) \subset \mathbb{R}$). Pour tout $x \in E$:
$$f(x) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx-a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 + bc = 0$$
donc $f \circ f$ est bien définie sur E.
3. pour tout $x \in E$:
$$f \circ f(x) = \frac{af(x)+b}{cf(x)-a} = \frac{a^2x + ab + bcx - ab}{acx + bc - acx + a^2} = x$$
donc $f \circ f = \mathrm{id}$ donc $f(E) = E$ (une inclusion ok ; l'autre : $x = f(f(x)) \in f(E)$).

Exercice 4 [Quelques exemples d'applications]

1. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$: injective non surjective ($f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$)

2. $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$: bijective avec $g^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n-1 \end{array}\right.$;

3. $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 \\ (n,m) & \mapsto & (n-m, n+m) \end{array}\right.$: injective non surjective (résolution système) ; $h(\mathbb{Z}^2) = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a-b \text{ pair}\}$;

4. $k : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y) \end{array}\right.$: bijective avec : $k^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right) \end{array}\right.$ (résolution système)

5. $l : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}\right.$: non injective (seuls 0, 1 et -1 ont un unique antécédent) et non surjective ($l([-1;1]) = [-1;1]$)

6. $m : \left\{\begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}\right.$: bijective avec : $m^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

7. $n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}\right.$: injective et non surjective avec $n(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (variations ou utiliser $n : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{x-1}$)

8. $p : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}\right.$: injective et surjective avec $p^{-1} = p$.

Exercice 5 [Compositions et bijections 1]

$f \circ g \circ f$ est bijective donc :

- $f \circ (g \circ f)$ est surjective, donc f est surjective ;
- $(f \circ g) \circ f$ est injective, donc f est injective.

Donc f bijective puis $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective.

Exercice 6 [Compositions et bijections 2]

- $h \circ g \circ f$ est injective donc f est injective :
- $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives donc g et f sont surjective ;
- donc f est bijective puis $h \circ g = (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective, donc g est injective, donc bijective ;

- puis $h = (h \circ g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ est injective ;
- et $h = f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f \circ h)$ est surjective, donc h est surjective, donc bijective.

Montrer que f, g, h sont bijectives.

Exercice 7 [Compositions et injections]

Si g injective : soient $f_1, f_2 : E \to F$ telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Soit $x \in E$: $g \circ f_1 = g \circ f_2$ donc $g \circ f_1(x) = g(f_1(x)) = g \circ f_2(x) = g(f_2(x))$ puis $f_1(x) = f_2(x)$ (par injectivité de g). Comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f_1 = f_2$.

Réciproque : soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Posons $f_1, f_2 : E \to F$ définies par $f_1 : x \mapsto y_1$ et $x \mapsto y_2$. Alors $g \circ f_1 = g \circ f_2$ (ce sont les applications constantes de valeur $g(y_1) = g(y_2)$). Donc $f_1 = f_2$. Donc $y_1 = y_2$. D'où l'injectivité de g.

Exercice 8 [Compositions et surjections]

Si f surjective : soient $g_1, g_2 : F \to G$ telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Soit $y \in F$. Notons $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (par surjectivité de f). Alors :

$$g_1(y) = g_1(f(x)) = g_1 \circ f(x) = g_2 \circ f(x) = g_2(f(x)) = g_2(y)$$

donc $g_1(y) = g_2(y)$. Comme ceci est vrai pour tout $y \in F$, on a bien $g_1 = g_2$.

Pour la réciproque, raisonnons par contraposée. Supposons que f ne soit pas surjective. Notons $b \in F$ tel que $b \notin f(E)$. Fixons $c_1, c_2 \in G$ avec $c_1 \neq c_2$. Considérons $g_1, g_2 : F \to G$ définies par :

$$g_1 : y \mapsto c_1 \text{ et } g_2 : y \mapsto \begin{cases} c_1 & \text{si} \quad y \neq b \\ c_2 & \text{si} \quad y = b \end{cases}$$

Alors $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ (ce sont les applications constantes de valeur c_1) mais $g_1 \neq g_2$.

Exercice 9 [Application idempotente]

Si f est injective : soit $x \in E$. Alors $f(x) = f \circ f(x) = f(f(x))$. Par injectivité : $x = f(x)$. Donc $x \in f(E)$. Donc f est surjective. Donc f bijective.

Si f est surjective : soient $y_1, y_2 \in E$ tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Par surjectivité, posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in E$. Alors $f(y_1) = f(f(x_1)) = f(x_1) = y_1$ et $f(y_2) = y_2$. Puis $y_1 = f(y_1) = f(y_2) = y_2$. D'où l'injectivité. Donc f bijective.

Par définition : si f bijective, alors f injective et f surjective.

D'où l'équivalence.

Et alors : $f = \mathrm{id}$ (on compose par f^{-1} ou on reprend les preuves).

Exercice 10 [Application produit]

1. Si f injective :
$$h(x) = h(y) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ g(x) = g(y) \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$
et pareil si g injective.
2. Par exemple $f = g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (x, x)$ donc $(-1, 1) \notin h(\mathbb{R})$ donc h n'est pas surjective.

Exercice 11 [Fonctions sur les parties 1]

1. Si f injective : $f(E) = f(A \cup B) = f(A \Cup B)$ donc $A \cup B = E$ (A et B forment un recouvrement de E).

   Si $A \cup B = E$: soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. Alors $\left\{ \begin{array}{rcl} X \cap A & = & Y \cap A \\ X \cap B & = & Y \cap B \end{array} \right.$ donc $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y$
   D'où l'injectivité.

2. Si f surjective : $(A, \emptyset)$ possède un antécédent par f. En le notant X, on a : $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$. Puis : $A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$.

   Réciproquement : si $A \cap B = \emptyset$, soient $X \subset A$ et $Y \subset B$. Alors : $X \cap A = X$, $X \cap B = \emptyset = Y \cap A$ et $Y \cap B = Y$ puis :
   $$f(X \cup Y) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) = (X, Y)$$
   donc (X, Y) a bien un antécédent, et f est surjective.

3. f est bijective si, et seulement si : $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$, c'est-à-dire que (A, B) forme un recouvrement disjoint de E (par exemple une partition).

Exercice 12 [Fonctions sur les parties 2]

1. Distinguer suivant que $A, B = \emptyset$ ou pas : si $A = B = \emptyset$: $(\emptyset, E)$ n'a pas d'antécédent ; sinon $(\emptyset, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent.

2. Si f injective : $f(A \cap B) = (A, B) = f(\emptyset)$ donc $A \cap B = \emptyset$.

   Si $A \cap B = \emptyset$: soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. Alors : $X \cup A = Y \cup A$ et $X \cup B = Y \cup B$ puis $X = X \cup (A \cap B) = (X \cup A) \cap (X \cup B) = (Y \cup A) \cap (Y \cup B) = Y \cup (A \cup B) = Y$ d'où l'injectivité.

Exercice 13 [Caractérisation de l'injectivité et surjectivité par les parties]

1. Soient $A, A' \in \mathcal{P}(E)$.

   - Supposons que $f(A) \subset f(A')$:
     Soit $x \in A$.
     Alors $f(x) \in f(A)$.
     Donc $f(x) \in f(A')$.
     Ce qui veut dire que : $x \in f^{-1}(f(A'))$.
     Et donc : $A \subset f^{-1}(f(A'))$
   - Réciproquement, supposons que $A \subset f^{-1}(f(A'))$:
     Soit $y \in f(A)$.
     Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
     Et donc il existe $x \in f^{-1}(f(A'))$ tel que $y = f(x)$.
     Comme $x \in f^{-1}(f(A'))$, alors $f(x) \in f(A')$.
     Et donc $y \in f(A')$.
     Et finalement : $f(A) \subset f(A')$.

2. On déduit que :

- si f est injective : soit $A \in \mathcal{P}(E)$: comme $f(A) \subset f(A)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ par le point précédent. Pour l'inclusion réciproque, soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Par injectivité, $x = x'$ donc $x \in A$. D'où l'inclusion réciproque ;
- si f vérifie l'assertion : soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $x_1 \in f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\}$ donc $x_1 = x_2$. D'où l'injectivité de f.

3. Soient $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

   - Supposons que $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$:
     Soit $y \in f(f^{-1}(B))$.
     Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$.
     Donc il existe $x \in f^{-1}(B')$ tel que $f(x) = y$.
     Un tel x vérifie $f(x) \in B'$ (par définition).
     Et donc $y = f(x) \in B'$.
     Ce qui prouve bien : $f(f^{-1}(B)) \subset B'$.
   - Réciproquement, supposons que $f(f^{-1}(B)) \subset B'$:
     Soit $x \in f^{-1}(B)$.
     Alors $f(x) \in f(f^{-1}(B))$.
     Donc $f(x) \in B'$.
     Ce qui revient à dire que $x \in f^{-1}(B')$.
     Et ainsi : $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

4. On déduit que :

   - si f est surjective : soit $B \in \mathcal{P}(F)$: comme $f-1(B) \subset f^{-1}(B)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ par le point précédent. Pour l'inclusion réciproque, soit $y \in B$. Par surjectivité, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, alors par définition $x \in f^{-1}(B)$. Donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. D'où l'inclusion réciproque ;
   - si f vérifie l'assertion : avec $B = F$ on a $F = f(f^{-1}(F)) = f(E)$ donc f est surjective.

Exercice 14 [Caractérisation de la bijectivité par les parties]
Supposons : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Soit $x, y \in E$. Supposons que $f(x) = f(y)$. Posons $A = \{x\}$. Alors, $f(E \setminus \{x\}) = \{f(\bar{x})\}$; notamment, pour tout $z \in E$ différent de x, $f(z) \neq f(x)$. C'est donc, puisque $f(y) = f(x)$, que $y = x$. On a montré que f est injective.

Appliquons l'hypothèse faite sur f à $A = E$. On a donc que $f(\bar{E}) = f(\emptyset) = \emptyset = f(\bar{E})$. Cela veut dire que $f(E) = F$, autrement dit que $\mathrm{Im}(f) = F$. C'est donc que f est surjective.

Étant injective et surjective, f est bien bijective. D'où le résultat !

Réciproquement, si f est bijective : soit $A \in \mathcal{P}(E)$:

- si $y \in f(\overline{A})$: par définition, il existe $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. Mais alors $y \notin f(A)$, car sinon on pourrait écrire $x' \in A$ tel que $y = f(x) = f(x')$ et par injectivité on aurait $x = x'$, ce qui est impossible comme $x \notin A$ mais $x' \in A$; et ainsi : $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
- si $y \in \overline{f(A)}$: alors $y \in F$ mais $y \notin f(A)$; par surjectivité, on peut écrire $y = f(x)$ pour $x \in E$. Nécessairement $x \notin A$ comme $y \notin f(A)$. Donc $y \in f(\overline{A})$; et ainsi $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

D'où l'égalité par double inclusion.