Feuille d'exercices n^{o}11 : Applications

Exercice 1 [Images directes]
Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants :

1. $f = \exp$ et $I =]-1;0]$;
2. $f = \ln$ et $I =]0;1[$;
3. $f : x \mapsto 1+x^2$ et $I =]-2;4]$;
4. $f = \sin$ et $I = [\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$;
5. $f = \sin$ et $I =]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{2}[$;
6. $f = \cos$ et $I = [\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 2 [Images réciproques]
Déterminer $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :

1. $f = \exp$ et $I =]-1;1[$;
2. $f = \ln$ et $I =]1;+\infty[$;
3. $f : x \mapsto 1+x^2$ et $I = [2;5[$;
4. $f = \sin$ et $I = \{\frac{1}{2}\}$;
5. $f = \sin$ et $I =]0;\frac{1}{2}[$;
6. $f = \cos$ et $I = [-1;1[$.

Exercice 3 [Étude d'une fonction par une composée] On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx-a}$ est bien définie sur E.
2. Montrer que la composée $f \circ f$ est bien définie sur E.
3. Exprimer $f \circ f(x)$ pour tout $x \in E$, et en déduire $f(E)$.

Exercice 4 [Quelques exemples d'applications]
Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

1. $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$;
2. $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$;
3. $h : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 \\ (n,m) & \mapsto & (n-m, n+m) \end{array} \right.$;
4. $k : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y) \end{array} \right.$;
5. $l : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$;
6. $m : \left\{ \begin{array}{rcl} [-1;1] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$;
7. $n : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$;
8. $p : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$;

En cas de non-surjectivité, décrire simplement l'image de la fonction.

Exercice 5 [Compositions et bijections 1]
Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective.
Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 6 [Compositions et bijections 2]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$. On suppose que :

- $h \circ g \circ f$ est injective ;

- $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives.

Montrer que f, g, h sont bijectives.

Exercice 7 [Compositions et injections]
Soient E, F, G trois ensembles et $g : F \to G$.

Montrer que g est injective si, et seulement si : $\forall f_1, f_2 : E \to F,\ g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$.

Exercice 8 [Compositions et surjections]
Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$. On suppose que G possède au moins deux éléments.

Montrer que f est surjective si, et seulement si : $\forall g_1, g_2 : F \to G,\ g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$.

Exercice 9 [Application idempotente]
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

et préciser ce que vaut f dans ce cas.

Exercice 10 [Application produit]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : E \to G$. On définit l'application $h : E \to F \times G$ par : $\forall x \in E, h(x) = (f(x), g(x))$.

1. On suppose que f ou g est injective. Montrer que h est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives : h est-elle surjective ?

Exercice 11 [Fonctions sur les parties 1]
On considère A, B deux parties d'un ensemble E. On définit l'application f suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est injective si, et seulement si : $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si : $A \cap B = \emptyset$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Exercice 12 [Fonctions sur les parties 2]
On considère A, B deux parties d'un ensemble E. On définit l'application f suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f n'est pas surjective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit injective.

Exercice 13 [Caractérisation de l'injectivité et surjectivité par les parties]
Soit $f : E \to F$:

1. Montrer que pour tous $A, A' \in \mathcal{P}(E)$: $f(A) \subset f(A') \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(f(A'))$.
2. En déduire que f est injective si, et seulement si : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.
3. Montrer que pour tous $B, B' \in \mathcal{P}(F)$: $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B'$.
4. En déduire que f est surjective si, et seulement si : $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 14 [Caractérisation de la bijectivité par les parties]
Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si, et seulement si : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.