Feuille d'exercices n^{o}10 : Ensembles

Exercice 1 [Caractérisation de l'inclusion 1]
Clair par double implication à chaque fois.

Exercice 2 [Caractérisation de l'inclusion 2]
Double implication :

- si un Z vérifie $Z \cap X \subset Z \cap Y$ et $Z \cup X \subset Z \cup Y$: soit $x \in X$:
  - si $x \in Z$: alors $x \in Z \cap X \subset Z \cap Y \subset Y$ donc $x \in Y$;
  - si $x \notin Z$: $x \in Z \cup X \subset Z \cup Y$ donc $x \in Z$ ou $x \in Y$ donc $x \in Y$

  donc $x \in Y$, puis $X \subset Y$;
- si $X \subset Y$: tout Z convient.

Exercice 3 [Caractérisation de l'inclusion 3]

1. $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$:
   - si $X \subset Y$: $Y \subset X \cup Y$ toujours vrai ; si $x \in X \cup Y$: alors $x \in X \subset Y$ ou $x \in Y$ donc $x \in Y$ d'où l'égalité par double inclusion ;
   - si $X \cup Y = Y$: soit $x \in X$; alors $x \in X \cup Y \subset Y$ donc $x \in Y$.

   d'où équivalence par double implication ;
2. $X = Y \Leftrightarrow X \cup Y = X \cap Y$:
   - si $X = Y$:$X \cup Y = X = X \cap Y$;
   - si $X \cup Y = X \cap Y$: soit $x \in X$; alors $x \in X \cup Y \subset X \cap Y$ donc $x \in Y$; donc $X \subset Y$; rôles symétriques : $Y \subset X$. Donc $X = Y$ par double inclusion.

Exercice 4 [Simplification d'opérations sur les ensembles]
Se voit bien sur un diagramme de Venn :

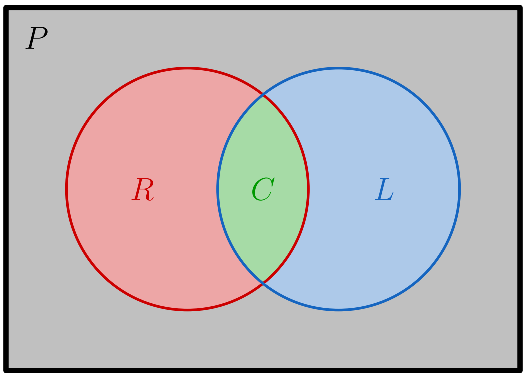
$$X = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (B \cap (A \cup C)) \cup (C \cap A)$$

$$= (B \cup (C \cap A)) \cap ((A \cup C) \cap (C \cap A)) = (B \cup (C \cap A)) \cap (A \cup C)$$

$$= ((A \cup B) \cap (B \cup C)) \cap (C \cup A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = Y.$$

Exercice 5 [Une autre version du produit cartésien]
Distinguer selon que $x = y$ ou $x \neq y$.

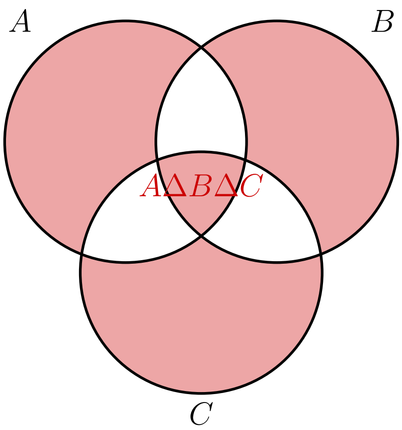
Exercice 6 [Inclusions des ensembles de quadrilatères]



Exercice 7 [Différence symétrique 1]

1.
$$\begin{array}{rcl}(A\Delta B)\Delta C & = & \big((A\Delta B)\cap\overline{C}\big)\cup\big(\overline{A\Delta B}\cap C\big) \text{ par définition}\\ & = & \big(\big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)\cap\overline{C}\big)\cup\big(\big((\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\big)\cap C\big) \text{ par définition}\\ & = & (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C) \text{ par distributivité}\end{array}$$

Par symétrie de A, B, C dans l'expression précédente (par commutativité de l'union), on peut échanger leurs rôles dans l'expression précédente et on a $(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A$ représenté en rouge :



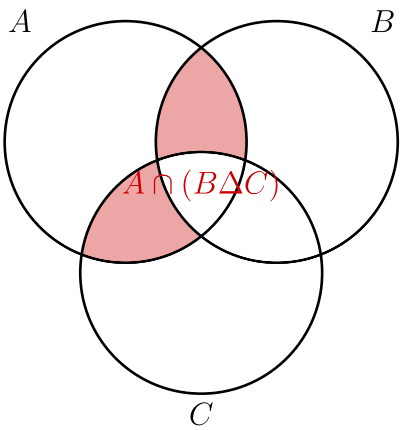
2. $A\cap(B\Delta C) = A\cap\big((B\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap C)\big) = (A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$ mais :

$A\cap B\cap\overline{C} = (A\cap B\cap C)\cup\emptyset = (A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{A}) = (A\cap B)\cap\big(\overline{C}\cup\overline{A}\big) = (A\cap B)\cap\overline{A\cap C}$

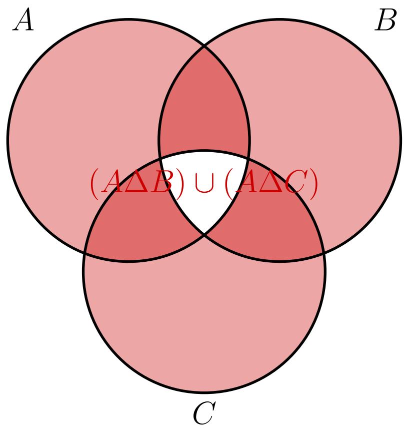
et pareil en échangeant les rôles de B et C d'où :

$$A\cap(B\Delta C) = \big((A\cap B)\cap\overline{A\cap C}\big)\cup\big((A\cap C)\cap\overline{A\cap B}\big) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

ensemble en rouge :



3. $(A\Delta B)\cup(A\Delta C)=(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$.



Exercice 8 [Différence symétrique 2]

1. $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$:
   - si $B=C$: $A\Delta B=A\Delta C$;
   - si $A\Delta B=A\Delta C$: soit $x\in B$:
     - si $x\in A$: $x\notin A\Delta B=A\Delta C$ donc $x\in C$;
     - si $x\notin A$: $x\in A\Delta B=A\Delta C$ donc $x\in C$

     Donc $x\in C$ puis $B\subset C$. Par symétrie : $C\subset B$ puis $B=C$ (par double inclusion).
2. $A\Delta B=A\cap B\Leftrightarrow A=B=\emptyset$:
   - si $A=B=\emptyset$: $A\cap B=\emptyset$ et $A\Delta B=\emptyset$ donc $A\Delta B=A\cap B$;
   - si $A\Delta B=A\cap B$: par l'absurde, si $x\in A\cup B$:
     - si $x\in A\cap B$: alors $x\in A\cap B$ mais $x\notin A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$: contradiction ;
     - si $x\notin A\cap B$: alors $x\in A\cup B\setminus A\cap B=A\Delta B$ mais $x\notin A\cap B$: contradiction.

     Donc $A\cup B=\emptyset$ puis $A=B=\emptyset$.

Exercice 9 [Équivalence d'égalités]

- si $A\cap B=A\cap C$: soit $x\in A\cap\overline{B}$: alors $x\in A$ et $x\notin B$ donc $x\notin A\cap B=A\cap C$; donc $x\notin A$ ou $x\notin C$; mais $x\in A$ donc $x\notin C$; donc $x\in A\cap\overline{C}$. D'où $A\cap\overline{B}\subset A\cap\overline{C}$. L'autre inclusion s'obtient par symétrie. Puis égalité par double inclusion ;

- si $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$: on applique le résultat précédent à $\overline{B}$ et $\overline{C}$, ce qui assure $A\cap\overline{\overline{B}}=A\cap\overline{\overline{C}}$ et donc $A\cap B=A\cap C$.

Exercice 10 [Unions, intersections et parties]

1. $E\subset F\Leftrightarrow\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$:

- si $E \subset F$: soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A \subset E \subset F$ donc $A \subset F$ donc $A \in \mathcal{P}(F)$ puis $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$;
- si $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$: comme $E \in \mathcal{P}(E)$, alors $E \in \mathcal{P}(F)$ donc $E \subset F$.

2. $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$: pour A ensemble :

$$A \in \mathcal{P}(E \cap F) \Leftrightarrow A \subset E \cap F \Leftrightarrow A \subset E \text{ et } A \subset F \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } A \in \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F).$$

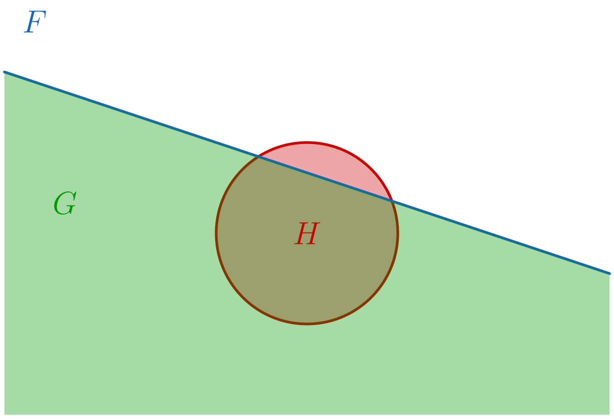
3. On a seulement $(\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$: si $A \in (\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F))$, alors $A \in \mathcal{P}(E)$ ou $A \in \mathcal{P}(F)$ donc $A \subset E \subset E \cup F$ ou $A \subset F \subset E \cup F$ donc $A \subset E \Cup F$, donc $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$.

   Contre-exemple : $E = \{0\}$ et $F = \{1\}$: $(\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)) = \{\emptyset,\ \{0\},\ \{1\}\} \neq \mathcal{P}(E \cup F) = \{\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}\}$

Exercice 11 [Unions, intersections et produits cartésiens]
On considère E, F deux ensembles, $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(F)$.

1. Montrer que : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \times B_2)$.
2. Montrer que $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$
3. Quel est le lien entre $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$ et $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

Exercice 12 [Représentation d'ensembles]



Exercice 13 [Ensembles et parties]

Facile