

Nom :

Interrogation 9

Exercice 1 Énoncer les croissances comparées en $+\infty$ en termes de o :

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha < \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^\beta$;
2. si $a, b \in \mathbb{R}_+^* : a < b \Leftrightarrow a^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(b^x)$;
3. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* : (\ln(x))^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$;
4. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* : x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x})$.

Exercice 2

Énoncer les croissances comparées en 0 en termes de o :

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors : $\alpha > \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\beta)$;
2. si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R} : x^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o(|\ln(x)|^\beta)$ et $|\ln(x)|^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Exercice 3

Donner les équivalents en 0 des quantités suivantes :

1. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$
2. $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$
3. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$
4. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$
5. $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$
6. $\text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$
7. $(\alpha \in \mathbb{R}) (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \underset{x \rightarrow 0}{=} \alpha x + o(x)$

Exercice 4 Donner un équivalent puis la limite en a des quantités suivantes :

1. $a = 0 : \frac{\tan(x) + \cos(x)}{x^3 + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$
2. $a = 0 : (x - 4)\ln(1 + x + x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -4(x + x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -4x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
3. $a = +\infty : (x - 4)\ln(1 + x + x^3) = (x - 4) \left(\ln(x^3) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x\ln(x^3) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
4. $a = 2 : \text{on pose } x = 2 + h \text{ avec } h \text{ tendant vers } 0 : \exp(x) - \exp(2) = \exp(2 + h) - \exp(2) = \exp(2)(\exp(h) - 1) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \exp(2) \cdot h \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \exp(2) \cdot (x - 2)$
5. $a = +\infty : \frac{\text{ch}(x)}{xe^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2xe^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
6. $a = 0 : x^3\cos(x) + \tan(x)\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + o(x^3) + x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
7. $a = +\infty : \frac{e^x + \ln(x) - 4}{x^2 + \ln(x) - \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
8. $a = +\infty : \ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
Autre méthode : $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln(x) + \ln(1+1/x) - \ln(x) - \ln(1-1/x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + o(1/x) - \frac{-1}{x} + o(1/x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{x} + o(1/x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$