Nom :

Interrogation 8

Exercice 1 1. Rappeler TOUS les résultats de croissances comparées en $+\infty$ pour ln et les fonctions puissances sous formes de limites, et les énoncer avec les relations de comparaison.

2. Rappeler les deux limites classiques associées à ln et exp, et les énoncer avec des relations de comparaison.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. Alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et donc :
$$\ln(x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x^\alpha).$$

2. On a :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
et donc :
$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \text{ et } e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Exercice 2 1. En utilisant éventuellement une intégration par parties, donner l'expression de l'unique primitive de Arcsin sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0.

2. En faisant le changement de variable $u = e^t$, calculer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t + 1}$.

1. On dérive Arcsin et on primitive la constante. Pour, $x \in]-1;1[$, on peut bien procéder par intégration par parties comme les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \mathrm{Arcsin}(t)$ sont bien $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;x]$ ou $[x;0]$ (suivant le signe de x), et on a donc :
$$\int_0^x \mathrm{Arcsin}(t)\mathrm{d}t = [t\mathrm{Arcsin}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$
$$= x\mathrm{Arcsin}(x) + \int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = x\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} - 1.$$
donc l'unique primitive de Arcsin qui s'annule en 0 est $x \mapsto x\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$.

2. Avec $u = e^t$, on a $\mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t$ et ainsi :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1} = \int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \left[\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|\right]_1^e = \ln(2) - \ln(e+1) + 1.$$

Exercice 3 Trouver toutes les solutions à l'équation différentielle : $y' + \dfrac{e^x}{1+e^x}y = 1$ et donner la solution au problème de Cauchy $y(0) = 0$.

Méthode habituelle : on trouve :

$$S = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda + x + e^x}{1+e^x} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

et la solution au problème de Cauchy est $x \mapsto \dfrac{-1 + x + e^x}{1+e^x}$.

Exercice 4 Trouver toutes les solutions à l'équation différentielle : $y'' - y = e^x \cos(2x)$ et donner la solution au problème de Cauchy $y(0) = -\dfrac{1}{8}$ et $y'(0) = \dfrac{1}{8}$.

Méthode habituelle avec polynôme caractéristique pour l'équation homogène. On passe par les complexes pour une solution particulière. On trouve :

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^x - \frac{e^x}{8} \left(\cos(2x) - \sin(2x) \right) | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

et la solution au problème de Cauchy est : $x \mapsto -\dfrac{e^x}{8} \left(\cos(2x) - \sin(2x) \right)$.