Nom :

# Interrogation 7

**Exercice 1** On considère le complexe $z = \dfrac{2}{1+i}$.

1. Écrire $z$ sous forme algébrique. Donner les racines carrées de $z$ sous forme algébrique.

2. Écrire $z$ sous forme trigonométrique. Donner les racines cubiques de $z$ sous forme trigonométrique.

1. $z = 2\dfrac{1-i}{1^2+1^2} = 1-i$

   On résout $\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & 1 \\ 2xy & = & -1 \\ x^2+y^2 & = & \sqrt{2} \end{array}\right.$ donc les racines carrées de $z$ sont $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

2. On a directement $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et ainsi : $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Donc les racines cubiques de $z$ sont $\sqrt[6]{2}e^{-i\pi/12}$, $\sqrt[6]{2}e^{7i\pi/12}$, $\sqrt[6]{2}e^{5i\pi/4}$.

**Exercice 2** On considère $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t}^3}$.

1. Justifier que $f$ possède une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sous forme d'intégrale l'expression de $F$, l'unique primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

2. En faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donner l'expression de $F$ à l'aide des fonctions usuelles.

1. Les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t + t^3$ sont continues donc leur composée aussi. De plus $t \mapsto \sqrt{t}+\sqrt{t}^3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Par quotient, $f$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ : elle y possède une primitive par théorème fondamental de l'analyse.

   Son unique primitive qui s'annule en 1 est : $F : x \mapsto \int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t}^3}$.

2. On a avec le changement de variable :

$$F : x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = [2\arctan(u)]_1^{\sqrt{x}} = 2\mathrm{Arctan}(\sqrt{x}) - \pi.$$

**Exercice 3** Donner TOUTES les primitives sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \cos^4(t)$.

On linéarise, ce qui donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^4(x) = \dfrac{1}{8}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$.

Et donc les primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3x}{8} + \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ si on veut travailler avec des fonctions à valeurs complexes).

**Exercice 4** On considère $a \in \mathbb{R}$ et on pose $P : t \mapsto x^2 + a$.

1. Donner suivant la valeur de $a$ les racines réelles de $P$.
2. En déduire, selon la valeur de $a$, une primitive de $f : t \mapsto \dfrac{1}{P(t)}$.

1. On a trois cas :
   - si $a > 0$ : pas de racines réelles ;
   - si $a = 0$ : 0 est l'unique racine réelle ;
   - si $a < 0$ : les deux racines réelles sont $\pm\sqrt{-a}$.
2. On a trois cas :
   - si $a > 0$ : on a $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{(x/\sqrt{a})^2 + 1}$ qui se primitive en $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a}}\arctan(x/\sqrt{a})$ ;
   - si $a = 0$ : on a $f : t \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui se primitive en $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ ;
   - si $a < 0$ : on a $f : t \mapsto \dfrac{1}{(x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a})} = \dfrac{1}{2\sqrt{-a}}\left(\dfrac{1}{x - \sqrt{-a}} - \dfrac{1}{x + \sqrt{-a}}\right)$ qui se primitive en $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{-a}}\ln\left|\dfrac{x - \sqrt{-a}}{x + \sqrt{-a}}\right|$.

**Exercice 5** On considère $A, B, M$ des points distincts d'affixes respectivement $z_A, z_B, z \in \mathbb{C}$.

1. À quelle condition sur $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ les points $A, B, M$ sont-ils alignés ? Comment se traduit le fait que $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est imaginaire pur ?

2. En déduire le lieu géométriques des points $M$ tels que $\dfrac{z - 3 + i}{z + 5 - 2i} \in \mathbb{R}$, et celui tel que $\dfrac{z - 3 + i}{z + 5 - 2i} \in i\mathbb{R}$.

1. $A, B, M$ sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est un réel

   $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est un imaginaire pur si, et seulement si, les droites $(AM)$ et $(BM)$ sont perpendiculaires.

2. On pose $z_A = 3 - i$ et $z_B = -5 + 2i$.

   On déduit que les $M$ tels que $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est un réel forment la droite $(AB)$ (privée des points $A$ et $B$ si on veut être cohérent avec le préambule).

   De même, $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est un imaginaire pur si, et seulement si, le triangle $ABM$ est rectangle en $M$, c'est-à-dire que les points $M$ décrivent alors le cercle de diamètre $[AB]$ (privé de $A$ et $B$ si on veut être cohérent avec le préambule).