Nom :

Interrogation 6

Exercice 1 On fait apparaître des croissances comparées ou des limites classiques. On conclut par opérations sur les limites (plus de FI) :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^3)+x}{x^2-1}$:
$$\frac{\ln(x^3)+x}{x^2-1} = \frac{3\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} \to 0$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-x^2}{x^7}$:
$$\frac{e^{2x}-x^2}{x^7} = \frac{e^x - \frac{x^2}{e^x}}{\frac{x^7}{e^x}} \to +\infty$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-x^2\ln(x^5+1)+e^{-2x}}{x^2-e^{x/2}+4}$:
$$\frac{x^3-x^2\ln(x^5+1)+e^{-2x}}{x^2-e^{x/2}+4} = \frac{x^3}{e^{x/2}}\frac{1-\frac{\ln(x^5+1)}{x}+\frac{e^{-2x}}{x^3}}{\frac{x^2}{e^{x/2}}-1+\frac{4}{e^{x/2}}} \to 0$$

4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}$:
$$\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot x \to 0$$

Exercice 2 1. Complétez les formules suivantes (avec toutes les versions s'il y en a plusieurs) :

(a) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

(b) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

(c) $\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) = 2\cos^2(a)-1 = 1-2\sin^2(a)$

(d) $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

2. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t)-\sqrt{3}\sin(t) = A\cos(t-\varphi).$$
On prend la méthode du cours. On a : $A = \sqrt{1+3} = 2$ et φ vérifiant $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\varphi) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ convient.

Exercice 3 1. Rappeler la définition et les propriétés générales de la fonction Arcsin (continuité, monotonie, parité, dérivabilité).

2. Justifier pour quelles valeurs de x la quantité $\tan(\text{Arcsin}(x))$ est bien définie, et la simplifier.

1. La fonction Arcsin est la bijection réciproque de la restriction de sin à $[-\pi/2;\pi/2]$. Elle est définie de $[-1;1]$ dans $[-\pi/2;\pi/2]$. Elle est impaire. Elle est strictement croissante. Elle est continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$, de dérivée : $\text{Arcsin}' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. La fonction Arcsin est à valeurs dans $[-\pi/2;\pi/2]$. Les seules valeurs de cet intervalle pour lesquelles tan n'est pas définie sont $\pm\pi/2$, qui ont pour antécédents ± 1 par Arcsin. Donc l'expression n'a de sens que pour $x \in]-1;1[$.

   Pour un tel x, on a : $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$. Et de plus : $\text{Arcsin}(x) \in]-\pi/2;\pi/2[$ donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geq 0$. Et ainsi : $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-\sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}$. Et ainsi :

$$\tan(\text{Arcsin}(x)) = \frac{\sin(\text{Arcsin}(x))}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

   et on retrouve d'ailleurs le même ensemble de définition dans l'expression finale que dans l'expression initiale : tout va bien !

Exercice 4 1. Complétez les formules suivantes :

   (a) $\cos(2\pi/3) = -\dfrac{1}{2}$

   (b) $\sin(-5\pi/6) == -\dfrac{1}{2}$

   (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\dfrac{\pi}{3})$

   (d) $-\sqrt{3} = \tan(-\dfrac{\pi}{3})$

2. Complétez les formules suivantes :

   (a) $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$

   (b) $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$

   (c) $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

   (d) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$